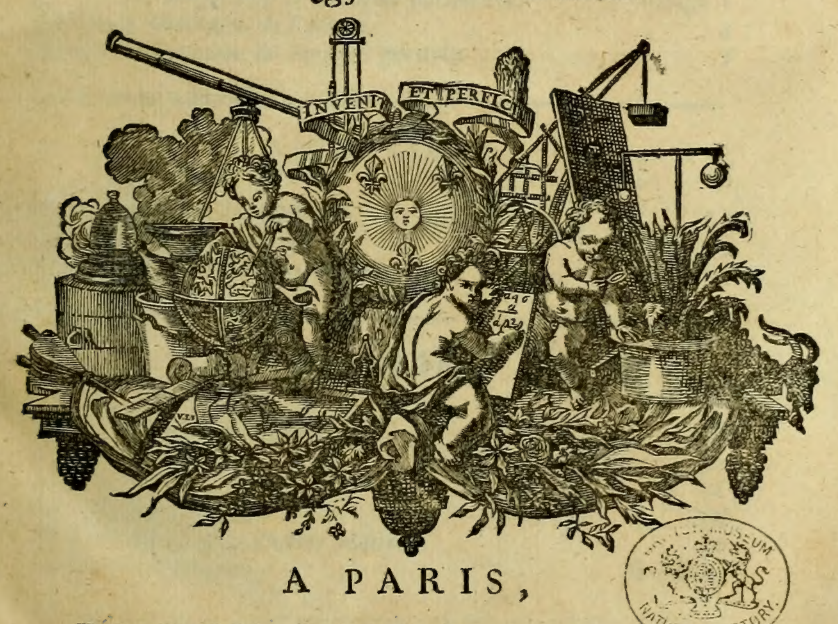
HISTOIRE
DE
L'ACADEMIE
ROYALE
DES SCIENCES.

Année MDCCVI.

Avec les Memoires de Mathématique & de Physique, pour la même Année.

Tirés des Registres de cette Academie.



A PARIS,

Chez { GABRIEL MARTIN. JEAN-BABPTISTE COIGNARD fils. H. LOUIS GUERIN. } ruë S. Jacques.

M DCCXXXI.

AVEC PRIVILEGE DU ROY.

TABLE POUR L'HISTOIRE.

PHYSIQUE GENERALE.

ANATOMIE.

CHIMIE.

ALGEBRE.

GEOMETRIE.

ASTRONOMIE.

ACOUSTIQUE. 124

MECHANIQUE.

TABLE
POUR
LES MEMOIRES

Fin des Tables.



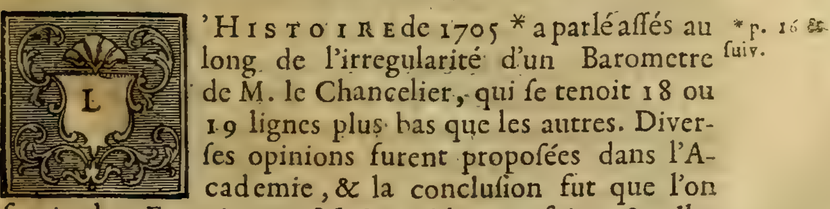


HISTOIRE
DE
L'ACADEMIE ROYALE
DES SCIENCES.

Année M. DCCVI.

PHYSIQUE GENERALE.

SUR UNE IRREGULARITÉ DE QUELQUES BAROMETRES.



L'Histoire de 1705 * a parlé assés au long de l'irregularité d'un Barometre de M. le Chancelier, qui se tenoit 18 ou 19 lignes plus bas que les autres. Diverses opinions furent proposées dans l'Academie, & la conclusion fut que l'on feroit des Experiences. M. Maraldi en a fait, & elles confirment toute la pensée de M. Homberg, qui croyoit

* p. 16 & suiv.

que le Barometre de M. le Chancelier se tenoit plus bas que les autres, parce qu'avant que d'être chargé de Mercure, il avoit été lavé avec de l'esprit de vin. Il prétendoit qu'il y en étoit resté quelques goutelettes, qui lorsque le vuide s'étoit fait, s'étant extrêmement rarefiées, avoient abaissé le Mercure, soit qu'elles l'abaissassent par elles-mêmes, soit que l'air qu'elles renfermoient, dégagé par leur rarefaction, l'abaissât.

Voici quel est le resultat des experiences de M. Maraldi.

Aprés qu'on a lavé un Tuyau par dedans avec l'Esprit de vin, & qu'on l'a essuyé plusieurs fois avec differens linges, le Mercure s'y tient pour l'ordinaire moins haut qu'auparavant, & en differentes experiences, la difference des hauteurs varie depuis 6 lignes jusqu'à 18.

Quand on charge le Tuyau immédiatement aprés l'avoir lavé, le Mercure s'y tient plus bas, que si le Tuyau avoit été chargé quelques heures plus tard.

Si un Tuyau a été lavé avec de l'Esprit de vin, le Mercure s'y tient plus bas, que si ce même tuyau avoit été lavé avec de l'Eau de vie; & s'il a été lavé avec de l'Eau de vie, le Mercure s'y tient plus bas que dans un tuyau lavé avec de l'eau.

Si des Tuyaux lavés avec ces differentes liqueurs ont été ensuite bien essuïez & bien sechez, le Mercure s'y tient à la hauteur où il étoit avant qu'ils eussent été lavez.

Pour secher parfaitement des Tuyaux qui ont été lavez avec de l'Esprit de vin, il suffit de les laisser exposez plusieurs jours à l'air, pourvû qu'il ne soit pas humide.

On a beau laver & frotter un Tuyau par dehors avec de l'Esprit de vin, le Mercure ne baisse point.

Dans un Barometre qui avoit deux Feslures à son extremité superieure, le Mercure n'a point baissé pendant deux mois, c'est-à-dire qu'il n'a baissé que comme dans les autres Barometres.

En construisant des Barometres avec plusieurs Tuyaux differens, qui ne paroissoient point humides, le Mercure

s'eſt mis à differentes hauteurs, & la plus grande difference a été de 2 lignes. On a bien ſeché les Tuyaux où il étoit le plus bas, & enſuite il s'y eſt mis à la même hauteur que dans les autres.

De tout cela, il eſt aiſé de conclure quelles ſont les précautions & les ſoins qu'il faut apporter à la couſtruction d'un bon Barometre. Et quant à la Theorie, on ne peut imaginer autre choſe, ſinon que les petites gouttes de liqueur, qui ont humecté le dedans du Tuyau, étant rarefiées dans le vuide, où l'air renfermé dans ces liqueurs en étant dégagé, font baiſſer le Mercure. La premiere idée eſt la moins vraiſemblable, parce que ſi l'Eſprit de vin abaiſſoit par lui-même le Mercure, il l'abaiſſeroit moins que l'Eau de vie, puiſqu'il eſt moins peſant, & l'Eau de vie moins peſante que l'Eau, l'abaiſſeroit moins auſſi, & c'eſt tout le contraire. Il faut donc que conformément à la ſeconde idée, il y ait plus d'air renfermé dans l'Eſprit de vin que dans l'Eau de vie, ou qu'il s'en dégage plus aiſément, & ce ſera la même choſe de l'Eau de vie comparée à l'Eau. Or ces hypotheſes ont aſſez d'apparence.

Il eſt vrai qu'il reſte toûjours la difficulté objectée par feu M. Amontons *, juſqu'à ce qu'elle ſoit levée on n'eſt pas en droit de traiter de ſyſtême ce qu'on imagine ſur cette matiere. Si l'on ne donnoit ce nom qu'à ce qui le merite parfaitement, les Syſtémes ne ſeroient pas fort communs en Phyſique.

* V. l'Hiſt. de 1705. p. 20 & 21.

SUR LA DECLINAISON DE L'AIMAN.

LA belle idée de M. Halley ſur la Déclinaiſon de l'Aiman, expoſée dans l'Hiſt. de 1701 *, & que l'on a déja commencé à verifier dans l'Academie*, s'y verifie encore. M. Deliſle ayant entre les mains un Journal

* P. 9. & ſuiv.
* V. l'Hiſt. de 1705. p. 9.

exact fait par M. de Marchais dans un voyage de Guinée & d'Amerique en 1704, 1705, & 1706, a pris soin de comparer à la Carte de M. Halley les Observations qui regardoient la Declinaison de l'Aiguille. Cette Carte a été faite par son Auteur pour l'Année 1700, ainsi dans les années suivantes on ne doit plus trouver les Déclinaisons qu'il a marquées, mais des Déclinaisons peu differentes, & plus ou moins differentes à proportion du temps, & ce peu de difference, pourvû qu'il suive le Systéme de M. Halley, en est une pleine confirmation. C'est aussi ce que M. Delisle a trouvé. La ligne Courbe exempte de Declinaison tracée par M. Halley autour du Globe de la Terre, ne differe de celle que donne le Journal de M. de Marchais, qu'en ce qu'elle est peut-être d'un demi-degré plus à l'Oüest; mais, & nous l'avions annoncé dans l'Hist. de 1701 *, on s'est toûjours bien attendu à voir quelque mouvement dans cette ligne. De ce terme, les Declinaisons observées par M. de Marchais augmentent toutes vers l'Orient, & diminuent vers l'Occident par rapport à celles de la Carte de M. Halley, & la plus grande difference, qui même ne se trouve qu'une fois ou deux si forte, ne va qu'à 2 degrés à peu près en 4 ou 5 ans. On voit par là ce que l'on sçavoit déja d'ailleurs, que la Declinaison ne varie pas également & uniformément par toute la Terre. Il y a de l'apparence que nous aurons le plaisir de voir le Systéme de M. Halley se conformer de jour en jour; c'est un des misteres de la Physique, absolument inconnu jusqu'à present, & qui peut-être commence à se déveloper.

* p. 11.

DIVERSES OBSERVATIONS DE PHYSIQUE GENERALE.

I.

MONSIEUR Homberg a dit qu'un Vaiſſeau de verre mis en Hiver devant le feu, caſſe s'il eſt plein d'eau, & encore plus aiſément s'il l'eſt de Mercure, mais non pas s'il eſt plein d'Eſprit de vin. La raiſon qu'il en imagine, eſt que la matiere de la lumiere ayant de la peine à paſſer au travers de l'eau ou du Mercure, & par conſequent arrêtée en partie par cet obſtacle, s'amaſſe en trop grande quantité dans les pores du verre, où elle eſt continuellement pouſſée par le feu, qu'elle dilate trop ces pores, force le reſſort du verre, & par là le caſſe, au lieu que ſi dans le même Vaiſſeau elle eût rencontré de l'Eſprit de vin, qui lui eſt plus homogéne, & qu'elle pénetre facilement, elle n'eût pas eu occaſion d'exercer cette violence. L'experience ſe doit faire en Hiver, parce que les vaiſſeaux qui paſſent alors d'un air froid à une grande chaleur, ſont plus diſpoſez à caſſer ; mais il ne faut pas que le feu ſoit aſſez grand, ou qu'ils en ſoient aſſez près pour caſſer par cette ſeule raiſon. M. Homberg explique à peu près de la même maniere, pourquoi un vaiſſeau de verre vuide, & non bouché, étant chauffé bruſquement devant le feu, caſſe ordinairement, s'il eſt épais, & non pas, s'il eſt mince. L'épaiſſeur fait que la matiere de la lumiere dilate beaucoup plus les pores de la ſurface tournée du côté du feu, que ceux de la ſurface interieure ; & de cette inégalité de dilatation s'enſuit évidemment tout le reſte.

II.

Une Chienne Danoiſe pleine, & prête à mettre bas, aïant été oubliée & enfermée dans une chambre d'une maiſon de Campagne, d'où l'on s'en retournoit à Paris,

fut retrouvée au bout de 41 jours couchée ſur un lit, vivante, mais ne pouvant ſe ſoûtenir, & ſans aucun ſigne de rage. On ne vit aucun reſte de ſes petits, ni de ſes excrémens, elle devoit s'en être nourrie, & apparemment auſſi de ſon lait, & même d'une partie de la futaine d'un Matelas qu'elle avoit toute rompuë, & de la laine du dedans qu'elle avoit toute bouleverſée. On lui donna de la nourriture, & elle commençoit à revenir de ſon extrême langueur, lorſque M. l'Abbé Galois rapporta cette hiſtoire.

A cette occaſion, M. du Hamel parla d'une autre Chienne qui avoit été 6 ſemaines ſans rien manger, horſmis la paille d'une chaiſe, qui étoit dans le lieu où on l'avoit enfermée. Elle avoit auſſi bû de l'eau. Elle vêcut fort bien après cela.

III.

M. Maraldi rapporta auſſi à ce ſujet, que dans un Tremblement de terre arrivé à Naples, un jeune homme avoit été 15 jours entiers ſous des ruines, & n'étoit pas mort de faim.

IV.

M. Geoffroy a fait voir une Pierre venuë d'Allemagne, il ne ſçait pas dequel endroit. Elle eſt marbrée, fort douce au toucher, & quaſi graſſe & ſavonneuſe. C'eſt comme un marbre tendre, ou du Savon petrifié. On a crû que c'étoit une Glaiſe deſſechée, & endurcie. M. Hombert a dit, que ſa nature conſiſtoit en ce qu'elle a un grain plus fin que le marbre, quoiqu'elle peſe moins, parce qu'elle a de plus grands pores. Il a ajoûté, pour prouver la fineſſe de ſon grain, que broïée & diſſoute dans de l'eau, elle la trouble, ce que ne fait pas le marbre. Ses effets ſont à peu près les mêmes que ceux du Savon. M. de la Hire a dit, qu'à Montmartre il y a une ſemblable Pierre entre des bancs de ſable.

V.

M. Lémery aïant acheté chez un Droguiſte demi-livre de Galbanum, autant de Sagapenum, autant de Bi-

tume de Judée, & 4 onces d'Opopanax, & ayant mis dans ses poches toutes ces Drogues, chacune envelopée dans un petit sac, horsmis le Sagapenum & l'Opopanax qui étoient ensemble, fut fort étonné, quand il rentra chez lui, de ce que tout le monde trouvoit qu'il sentoit horriblement le musc, car chacune de ces Drogues en particulier a une odeur trés puante, & très penetrante, à la réserve du Bitume de Judée, qui cependant ne sent rien d'approchant du Musc, & ces mêmes Drogues là sont employées dans la Medecine contre les Vapeurs que le musc & d'autres odeurs semblables peuvent avoir causées. Il examina tous les sacs l'un après l'autre, ils étoient tous neufs, aucun n'avoit servi à enveloper du musc, ni ne le sentoit, & ils n'avoient que l'odeur de la Drogue qu'on y avoit mise. Il les rapprocha tous, & ils produisirent une odeur de musc. Celle dont les habits de M. Lemery étoient parfumez lui dura jusqu'au lendemain, & assés forte. On ne se seroit pas avisé de ces ingredients pour former une bonne odeur, car celle du musc doit passer pour telle, quoique peu à la mode aujourd'hui, & assez decriée.

V I.

M. Poupart a donné l'Histoire du Formica-Leo dans les Memoires de 1704 *, & nous la supposons pour l'intelligence de ce qui suit. Un ami de M. Carré cherchant de ces Insectes à la Campagne, trouva un grand nombre de ces trous qu'ils sçavent faire avec tant d'adresse, mais la plûpart étoient sans Formica-Leo, ce qui lui fit croire qu'ils avoient été la proye de quelques animaux, plus *Lions* qu'eux-mêmes. Il fut bien-tôt détrompé, en remarquant au fond de ces trous de petits vers longs d'environ 6 lignes sur une demi-ligne de large. Il en prit quelques-uns qu'il mit dans du sable, où il leur vit faire leurs trous à la maniere du Fomica-Leo. Il leur jetta des Fourmis, que les Formica-Leo aiment tant, & ils s'en saisirent avec ardeur en les envelopant avec la moitié de leur corps, car l'autre demeure enfoncée dans le sable. Comme ils n'ont

* p. 235.

pas autant de force que les Formica-Leo, leur proye leur échape souvent, & pour la rattraper ils se servent de la même ruse, ils construisent leur fosse plus en talut, ce qui fait retomber l'animal. Les Formica-Leo s'en accommodent fort bien, quand on leur en donne, mais il ne faut pas s'en étonner, puisqu'ils s'accommodent bien de leur propre espece. Ces Vers se metamorphosent en un Insecte fort semblable au Cousin, sinon qu'il est plus long, & plus gros. L'observateur les nomment *Formica-vulpes*, pour les distinguer des Formico-Leo, & marquer leur finesse.

V I I.

Le même ami de M. Carré examinant le Cristallin d'un Serpent, qui avoit une ligne de diametre, le trouva d'une sphericité parfaite, même avec la Loupe. Comme il ressembloit à une Lentille faite à la Lampe, il voulut s'en servir pour voir les objets à travers, & il trouva qu'il les grossissoit extrémement, & autant qu'une semblable Lentille de verre, mais que la transparence du verre y manquoit, apparemment à cause de la membrane qui envelope le Cristallin. Il est certain par là que ces animaux doivent voir les Objets incomparablement plus grands que nous ne les voyons.

V I I I.

Le même Observateur de la Nature a rencontré par hazard un Ver long de 2 pouces sur 1 ligne de large, & $\frac{1}{2}$ d'épaisseur, d'un jaune assez foncé, comme les Perce-oreilles, & qui a 80 jambes de chaque côté. La tête & la queuë different si peu par leur figure, qu'on ne peut conjecturer laquelle des deux extremitez est la tête. On ne le distingue point non plus au marcher de l'Animal, car quand on le contrarie dans sa marche, il ne se détourne pas à côté comme les autres, mais retourne tout court sur ses pas en allant à rebours, de sorte que la partie qui dans le premier mouvement étoit la posterieure, devient l'anterieure dans le second, & ces deux mouvemens sont d'une égale facilité. Peut-être cet Insecte

ſecte a-t-il deux têtes & deux cervaux, comme d'autres ont pluſieurs poumons. Quoiqu'il en ſoit, ſes deux extrémités ſe terminent en pointe avec deux petites Cornes ſemblables à ſes jambes, & longues environ d'une ligne. Il eſt fort vif, & fort agile, & l'ordre avec lequel il remuë ſucceſſivement ſes 160 jambes eſt admirable.

Le Philoſophe qui l'obſervoit le coupa en deux parties égales, & dont par conſequent chacune avoit 80 jambes, elles marcherent toutes deux avec la même agilité que l'Animal entier; elles cherchoient à ſe cacher dans quelque trou, & l'Obſervateur ayant mis de l'eau à leur paſſage, chacune s'y engagea un peu, mais elles ſçurent bien en ſortir. Il coupa de nouveau chaque partie en deux, & toutes les quatre marcherent encore, mais plus lentement; elles faiſoient ſouvent des contorſions ſemblables à celles des Queües de Serpents que l'on a coupées. Les parties ſeparées ne cherchoient point à ſe rejoindre; quand on les remettoit l'une contre l'autre, elles ſe recoloient un peu par le moïen d'un ſuc viſqueux qui ſortoit des plaïes, mais elles ne s'accordoient pas dans leurs mouvemens.

IX.

Ce Philoſophe a encore trouvé un Inſecte Poiſſon qui ſe transforme en Demoiſelle. Quand il eſt dans l'eau, il a près de 2 pouces de longueur, une queüe qui en tient les deux tiers, & qui a 4 lignes de large au milieu, & ſe termine en pointe. Elle eſt platte en deſſous, & ronde en deſſus. Dans l'autre tiers de la longueur de l'Animal, on voit ſa tête, & 6 jambes. La Demoiſelle qui en ſort eſt de celles qui voltigent ſur les eaux dormantes, où elles dépoſent leurs œufs. Voilà un Animal qui de Poiſſon devient oiſeau, different apparemment des deux eſpeces dont M. Poupart a parlé dans les Memoires de 1704*; peut-être trouvera-t-on à force d'obſerver que ce changement d'habitation & d'Element eſt aſſés commun.

* p. 240. & ſuiv.

X.

Ce que nous avons raporté dans l'Hiſtoire de 1703*,

* p. 22. & ſuiv.

de ces Pierres tirées dans le Veronois qui renferment des Plantes & des Poissons desséchés, a été confirmé par M. Leibnits. Il dit que dans le Païs de Brunsvic aux environs d'Osteroda, dans la Comté de Mansfeld aux environs d'Eisslebe, & en beaucoup d'autres endroits d'Allemagne, on trouve des veines d'Ardoise horisontales à peu prés, où il y a des representations, mais très-exactes & très-finies, de diverses sortes de Poissons ou de Plantes, qui paroissent dans leur longueur & dans leur largeur naturelles, mais sans aucune épaisseur. Ces traces sont souvent marquées sur un mélange de Cuivre, qui contient même de l'Argent. Il y a quelques-unes de ces Plantes que l'on ne connoît plus en ces Païs-là, mais on les retrouve dans les figures des Plantes des Indes.

M. Leibnits conçoit qu'une espece de terre a couvert des Lacs & des Prés, & y a enseveli des Poissons & des Plantes, ou que quelque eau bourbeuse chargée de terre les a envelopez ou emportez. Cette terre s'est depuis durcie en Ardoise, & la longueur du temps, ou quelque autre cause a détruit la matiere délicate du Poisson ou de la Plante, à peu près de la même maniere dont les corps des mouches ou des Fourmis que l'on trouve enfermez dans l'Ambre jaune, ont été dissipez, & ne sont plus rien de palpable, mais de simples délinéations. La matiere du Poisson ou de la Plante étant consumée, a laissé sa forme empreinte dans l'Ardoise par le moyen du creux qui en est resté, & ce creux a été enfin rempli d'une maniere metallique, soit qu'un feu souterrain cuisant la terre en Ardoise en ait fait sortir le metal qui y étoit mêlé, soit qu'une vapeur metallique penetrant l'Ardoise se soit fixée dans ces creux. M. Leibnits ajoûte qu'on peut imiter cet effet par une operation assez curieuse. On prend une Araignée, ou quelqu'autre Animal convenable, & on l'ensevelit sous de l'argile, en gardant une ouverture qui entre du dehors dans le creux. On met la masse au feu pour la durcir ; la matiere de l'Animal s'en va en cendres, qu'on fait sortir par le moyen

de quelque liqueur. Aprés quoi on verse par l'ouverture de l'argent fondu, qui étant refroidi, on trouve au dedans de la masse la figure de l'Animal assés bien representée en argent.

Plusieurs Auteurs ont appellé ces sortes de representations de Poissons ou de Plantes dans des Pierres, *Jeux de la Nature*; mais c'est là une pure idée Poëtique, dont un Philosophe tel que M. Leibnits ne s'accommode pas. Si la Nature se joüoit, elle joüeroit avec plus de liberté, elle ne s'assujettiroit pas à exprimer si exactement les plus petits traits des Originaux, &, ce qui est encore plus remarquable, à conserver si juste leurs dimensions, Quand cette exactitude ne se trouve pas, ce peuvent être des Jeux, c'est à dire, des arrangemens en quelque sorte fortuits. Il est vrai qu'une representation d'une Plante des Indes dans une Pierre d'Allemagne semble d'abord contraire au Sistême de M. Leibnits. Mais que la Plante representée se retrouve aux Indes, c'est déja un grand prejugé qu'il n'y a pas là de Jeu; il est aisé d'imaginer plusieurs accidents par lesquels une Plante aura été apportée des Indes en Allemagne, même dans les temps où il n'y avoit pas de commerce entre ces païs-là par la navigation; & enfin il paroît à plusieurs marques, qu'il doit s'être fait de grands changemens phisiques sur la surface de la terre. M. Leibnits croit que la mer a presque tout couvert autrefois, & qu'ensuite une grande partie de ses eaux se sont fait un passage pour entrer dans des abismes creux, qui sont au dedans de nôtre Globe. De-là viennent les Coquillages des Montagnes. Mais toute cette matiere meriteroit une plus ample discussion.

NOus renvoyons aux Memoires:

Le Journal des Observations de M. de la Hire pendant l'année 1705, sur la Quantité d'Eau de pluye, sur les Vents, &c. Celles de M. le Baron de Pontbriand, V. les M. p. 1. 6. & 12.

& celles du Pere Fulchiron Jesuite, faites à Lyon.

V. les M. p. 12. Les Observations que M. Maraldi a faites du Barometre & du Thermometre pendant la même année, & celles qu'il a recueillies de differens endroits.

V. les M. p. 336. Les Observations de M. Bianchini sur les Flames qui paroissent dans un petit canton de l'Apennin.

V. les M. p. 432. Une Histoire des Barometres & Thermometres par M. de la Hire le Fils, qui n'y comprend peut-être que trop exactement tous les Thermometres qui ont été trouvés jusqu'ici.

ANATOMIE.

SUR LES CATARACTES DES YEUX.

V. les M. p. 20. IL pourroit sembler étonnant qu'une Operation Chirurgique fût incertaine, non pas quant au succès, mais en elle-même, c'est à dire, que les uns soûtinssent qu'on fait une chose, les autres qu'on en fait une autre; mais l'Operation dont nous allons parler est si delicate, & si peu sensible à la main même qui l'execute, que toute la surprise doit être qu'on ait osé la tenter.

Les *Cataractes* des yeux ont esté ainsi appellées d'un mot Grec qui signifie une Porte qu'on laisse tomber de haut en bas comme une Sarrasine, & en effet ce sont des especes de Portes qui ferment l'œil aux rayons de la lumiere. A la vûë il paroît que ce sont de petites pellicules assés épaisses étenduës sur l'ouverture de la prunelle, & formées dans l'humeur Aqueuse, & ç'a été dans cette pensée que l'on a imaginé une operation qui a réüssi. On

pique l'œil par le côté, on vient à la pellicule, on la tourne autour de l'aiguille, & après l'avoir ainsi roulée & reduite en moins d'espace, on l'enfonce dans le bas de l'œil, & on l'y laisse, après quoi la lumiere peut entrer dans l'œil sans obstacle. Il faut que la pellicule ou cataracte soit *mûre*, c'est à dire, de telle consistence, qu'elle se roule aisément, qu'elle se brise en même temps qu'elle se roule, qu'elle ne remonte pas par son ressort après avoir été abaissée, ce qui arrive quelquefois, & que peut-être aussi elle se fonde & se dissolve dans le bas de l'œil.

Voilà qu'elles sont les idées communes sur les Cataractes, mais d'habiles gens, & fort versés dans ces matieres, n'en tombent pas d'accord. Ils prétendent que quand on croit abaisser une petite membrane, c'est le Cristallin même que l'on abaisse, & qu'on range dans le bas de l'humeur Vitrée. Il s'est épaissi, & a perdu sa transparence, & par conséquent, au lieu qu'il étoit un des principaux instrumens de la vision, il ne fait plus qu'y apporter un obstacle, en fermant le passage aux rayons qui vont à la Retine, & il faut l'ôter de leur chemin. L'alteration de sa transparence, ou son opacité est accompagnée d'un changement de couleur, il devient verdâtre, & par cette raison les Grecs ont appellé cette maladie *Glaucoma*. Le Glaucoma & la Cataracte sont la même chose dans l'opinion de ceux qui croyent que la Cataracte est le Cristallin épaissi, mais selon le sentiment ordinaire, ce sont deux maladies très-differentes. On croit la premiere absolument incurable, & non pas la seconde.

La nouvelle Hipothese fut proposée dans l'Academie; une des plus fortes raisons de ceux qui la soûtiennent, c'est qu'après l'operation de la Cataracte, on ne voit point sans loupe. Or si l'on n'a fait qu'ôter un rideau de devant le Cristallin, il se retrouve tel qu'il étoit, il fait les mêmes refractions, & la loupe n'est pas plus necessaire qu'auparavant. Si au contraire on a abatu le Cri-

ſtallin, il eſt évident qu'il faut une loupe à ſa place.

Mais d'un autre côté, l'Academie a lieu de tenir pour certain, qu'il y a des gens qui après l'operation de la Cataracte ont vû ſans loupe. Un ſeul exemple de cette eſpece ſuffit, & il ôte à tous les exemples contraires le pouvoir de rien conclure. C'eſt même une choſe fort établie que pluſieurs perſonnes auſſitôt après l'operation ont vû très-diſtinctement, & quoiqu'enſuite elles ayent ceſſé de voir, les unes parce que la Cataracte étoit remontée, les autres ſans avoir eu cet accident, le premier moment où elles ont vû, eût-il été unique, prouve aſſés qu'on ne leur avoit pas abatu le Chriſtallin.

Pourquoi donc après l'operation a-t-on ordinairement beſoin d'une loupe? M. de la Hire en rend cette raiſon. Quoique la Cataracte ſoit abatuë, le vice qui l'a produite eſt encore dans l'Humeur Aqueuſe, elle eſt toûjours trop épaiſſe, trop trouble, & par conſéquent laiſſe paſſer trop peu de rayons, & la loupe qui en fait tomber une plus grande quantité ſur la Retine, repare ce défaut.

Quoique ce que nous avons dit juſqu'ici paroiſſe aſſés décifif pour l'ancienne hipotheſe, M. de la Hire a voulu encore la confirmer par les circonſtances & les détails de l'operation, qu'il a faite lui-même ſur des yeux de Beuf. Ce qui en réſulte de plus conſiderable, c'eſt que le Criſtallin ne ſe laiſſe jamais enfoncer entierement dans le bas de l'œil, & qu'il boucheroit toûjours en partie le paſſage des rayons, tant parce qu'il eſt trop gros, que parce qu'il eſt ſoûtenu par l'Humeur Aqueuſe, & par la Vitrée, ſur tout par cette derniere, qui eſt épaiſſe comme de la gelée. On abat une Cataracte entierement, ce n'eſt donc pas le Criſtallin que l'on abat; on rétablit parfaitement la viſion, du moins pour quelque temps, & on ne la rétabliroit qu'imparfaitement, puiſque le Criſtallin intercepteroit une partie de la lumiere.

M. de la Hire remarque qu'il eſt fort aiſé que dans l'operation la pointe de l'aiguille entame la ſurface an-

terieure du Cristallin, & ouvre par consequent la membrane dont il est envelopé. Or telle est la nature du Cristallin que quand cette membrane a été ouverte, il se plisse & se ride. S'il a donc été blessé dans l'operation de la Cataracte, ces plis & ces rides doivent rendre les réfractions si irrégulieres, & changer si fort les directions des rayons qui devoient fraper au même point, que la peinture des objets en sera entierement détruite. Mais cela ne doit pas arriver dans l'instant d'après la blessure, parce que le Cristallin humecté & rafraîchi par l'humeur Aqueuse dans sa partie blessée, doit être quelque tems sans perdre sensiblemement sa configuration. De-là vient, selon M. de la Hire, que quelquefois un Homme qui a vû immediatement après l'operation, est entierement privé de la vûë au bout de quelque tems, sans que l'on voye la Cataracte remontée.

Quelques-uns croïent que la Cataracte est, non pas le Cristallin, mais sa membrane exterieure, ou son envelope épaissie par le vice de son suc nourricier, & devenuë trop opaque pour laisser penetrer la lumiere jusqu'à la substance du Cristallin. C'est, selon eux, cette membrane que l'on détache du Cristallin qu'elle enferme. Mais M. de la Hire ne croit pas cette operation possible, & si elle l'étoit, il faudroit necessairement, qu'en enlevant cette membrane, on rompît le Ligament *Ciliaire* qui y est attaché, & qui tient le Cristallin suspendu au milieu de l'œil, & les inconveniens du Cristallin abatu reviendroient.

SUR LA FORMATION

DE LA VOIX.

TOut Sujet exactement consideré devient infini, & l'attention est une espece de microscope, qui le grossit & le multiplie toûjours, à proportion qu'elle est V. les M. p. 136. & 338.

plus parfaite. Le Siftême de M. Dodart fur la Formation de la Voix *, quoique déja traité avec affés d'étenduë, n'étoit pas épuifé, & l'on verra combien il y manquoit de chofes ou curieufes ou même neceffaires, à quoi peut-être on ne penfoit pas. La plûpart des Lecteurs s'aperçoivent moins de ce qui manque à un fujet que l'Auteur, mais en recompenfe ils s'aperçoivent mieux de ce qu'il y a de trop.

* V. l'Hift. de 1700. p. 17 & fuiv.

M. Dodart confirme & explique plus particulierement l'ufage qu'il avoit donné à la Glotte de former le Son de la Voix par fon ouverture, & les differens Tons par les differens degrés de cette ouverture.

Le *Larinx* eft un Canal cilindrique fort court qui fait le haut de la Trachée, auquel font attachées en dedans deux membranes demi-circulaires tenduës horifontalement, qui peuvent fe joindre exactement par leurs diametres, mais laiffent prefque toûjours entre elles un intervalle qu'on appelle la Glotte. Le Larinx eft tout compofé de Cartilages, auffi-bien que la Trachée, & il a des Mufcles tant internes qu'externes. Les Anatomiftes ont attribué la formation des Tons, ou les differentes ouvertures de la Glotte à l'action de ces mufcles; mais M. Dodart fait voir par leur grandeur, par leur pofition, & par leur direction, que ni aucun d'eux en particulier, ni tous enfemble, ne peuvent fermer entierement la Glotte, ni empécher totalement le paffage de l'air, comme on le fait pour quelques inftans, quand on retient fa refpiration. Or il eft plus que vraifemblable que la même caufe qui peut fermer entierement la Glotte eft celle qui la refferre par degrés jufqu'a cette entiere clôture; & par confequent cette derniere action n'apartient pas aux mufcles du Larinx non plus que la premiere. Ils ont d'autres fonctions; il y en a qui ne fervent qu'à tenir ferme la caiffe entiere du Larinx, ce qui eft neceffaire, afin que la Glotte qui y eft contenuë ait des appuis fixes pour fes mouvemens; il y en a qui la dilatent extraordinairement lorfqu'il faut qu'elle donne un plus grand

paffage.

passage à des matieres épaisses qui sortent du Poûmon, d'autres, antagonistes de ceux-ci, la remettent dans son état ordinaire, mais ils ne le modifient ni les uns ni les autres de la maniere qui seroit necessaire pour la production des differens Tons.

Il ne reste plus pour principes du mouvement, qui en ouvrant ou resserrant la Glotte forme les Tons, que deux Cordons tendineux enfermés dans les deux lévres de cette ouverture. Car chacune des deux membranes demicirculaires, dont l'intervalle fait la Glotte, est repliée sur elle-même & doublée, & toute l'étenduë où chacune se replie & se double fait les lévres de la Glotte. Au dedans de la *duplicature* de chaque membrane est un cordon tendineux qui la renfle un peu, attaché par un bout à la partie anterieure du Larinx, & par l'autre à la posterieure. C'est à ces deux cordons que M. Dodard attribuë tout le jeu des differentes ouvertures de la Glotte par rapport aux Tons.

Il est vrai qu'ils paroissent *tendineux* & nullement *musculeux*, ligamens & non muscles, c'est-à-dire, propres à lier, à affermir, à soûtenir, mais non pas à s'accourcir en se gonflant, car ils ne sont composés que de fibres blanches ou membraneuses, & non de fibres rouges ou charnuës, seules capables de gonflement & de contraction, du moins autant qu'on le peut sçavoir par l'exemple de tous les Muscles connus. Mais est-il bien certain que l'on connoisse toute la Mechanique que le Créateur peut avoir employée à cet égard ? on a de grands sujets d'en douter, & M. Dodart les fait bien valoir. Un Muscle d'une structure singuliere ne servira même qu'à relever encore à nos yeux l'intelligence infinie qui brille dans les Machines de tous les Animaux. Mais on peut ajoûter à tout cela que les cordons des deux lévres de la Glotte ne sont peut-être pas des Muscles extraordinaires. Il faut se souvenir qu'il est necessaire pour le Chant que le petit diametre de cette ouverture ovale puisse être divisé en plus de 9632 parties, quoiqu'il ait moins d'une ligne. Ces divisions si fines ne s'executent que par l'approche mutuelle des

deux lévres, & ſi les deux cordons qu'elles enferment en ſont le principe, & qu'ils agiſſent à la maniere des Muſcles connus, il faut que leur gonflement ou leur contraction ſoit d'une petiteſſe, non ſeulement imperceptible aux yeux & aux meilleurs Microſcopes, mais preſque incomprehenſible à l'Eſprit. Des fibres rouges & charnuës, où le ſang eſt plus abondant au temps de la contraction, auroient eté infiniment trop groſſieres pour de ſemblables mouvemens, & la Nature n'a dû y employer que des fibres blanches & membraneuſes, qui ſe gonflent ſuffiſamment par la plus legere augmentation de la quantité des Eſprits qui y coulent. On voit aſſés que ces deux cordons qui dans leurs relâchement font chacun un petit arc d'Ellipſe, deviennent toûjours en ſe contractant de plus en plus des arcs d'une Ellipſe plus ſerrée, plus allongée & moins courbe, & enfin par la derniere contraction dont ils ſoient capables, degenerent en deux lignes droites appliquées l'une contre l'autre, plus courtes que tous les arcs precedens.

M. Dodart fait ici aprés Galien une réflexion aſſés importante, & explique ce que cet Auteur n'avoit fait qu'admirer. Quand la Glotte eſt abſolument fermée, l'air qu'on a pris par la derniere *aſpiration* ne pouvant ſortir de la poitrine, elle demeure dilatée comme elle étoit, & le Diaphragme demeure baiſſé, & dans l'action de comprimer tous les viſceres contenus dans le ventre. Toutes les forces oppoſées tant à la dilatation de la poitrime, qu'à l'abaiſſement du Diaphragme, c'eſt-à-dire, tous les Muſcles qui reſſerrent la poitrine, & tous ceux qui pareillement compriment le ventre, & repouſſent le Diaphragme en enhaut, font un effort commun contre l'état de ce moment là, & ſont tous ſoûtenus & vaincus par la force qui ferme la Glotte, puiſque pour peu qu'elle s'ouvrît, l'air s'échaperoit, & le combat finiroit, pour ainſi dire, à leur avantage. On ſçait combien leur action eſt puiſſante, ſur tout celle des Muſcles du bas ventre, qui quelquefois en le comprimant violemment chaſſent hors

du corps ou les Boyaux, ou même la Matrice, & on pourroit croire d'abord qu'il eſt contre la vraiſemblance de ſuppoſer une force égale & ſuperieure dans ces deux petits cordons qui ferment la Glotte, & qui, s'ils ſont Muſcles, ne le ſont que d'une maniere inſenſible. Mais M. Dodart fait voir que ces petits Muſcles n'agiſſent pas ſeuls, que l'air contenu dans la poitrine, & qui en s'échauffant & ſe rarefiant toûjours de plus en plus, tend à la dilater davantage par ſon reſſort, conſpire avec eux à cet égard, qu'ils ſont principalement aidés par l'action du Diaphragme qui eſt alors bandé, & ſoûtient l'effort contraire des Muſcles du ventre, qu'enfin tout ce qu'il y a d'effort employé contre la Glotte ne tend qu'à la ſoûlever de bas en haut, ce qui eſt impoſſible, & non à l'ouvrir, ce qui ſeroit neceſſaire, qu'à cauſe du contact immediat de ſes deux lévres la petite lame d'air, qui tendroit à faire cette ouverture, doit être imaginée ſans largeur, & par conſequent ſans force, & que c'eſt-là un Exemple ſingulier, où par une Mechanique très-ſimple, la ſeule poſition de deux parties l'un contre l'autre leur donne une force infinie.

A ces Recherches curieuſes ſur l'Organe de la Voix, M. Dodart en joint d'autres ſur les circonſtances de la Voix.

1°. Il demande ce qui cauſe la difference de la Voix, *pleine* & de la Voix de *fauſſet*, qui commence au plus haut ton de la Voix pleine, qui ne lui ajoûte que trois Tons au plus, horſmis dans quelques Exemples rares, & qui a preſque toûjours quelque choſe de forcé. Il a obſervé que dans tous ceux qui chantent en fauſſet le Larinx s'éleve très-ſenſiblement, & par conſequent le canal de la Trachée s'allonge & s'étrecit, ce qui donne une plus grande vîteſſe à l'air qui y coule, même avant qu'il ſoit arrivé à l'ouverture de la Glotte. Cela ſeul ſuffiroit pour hauſſer le Ton, mais de plus il eſt très vraiſemblable que la Glotte ſe reſſerre encore, & plus que pour les Tons naturels. On peut même imaginer dans

quelque cas extrordinaire un troisiéme principe, qui sera une plus grande force, dont le Musicien poussera l'air dans la voix de fausset; le Ton deviendra plus aigu comme il le devient dans une fluste sur un même trou, lorsque le souffle est plus fort. Le Larinx étant toûjours plus élevé dans la Voix de fausset, il arrive par la disposition des parties entre elles que le *jet* d'air poussé n'enfile presque que la route du nés, & non celle de la bouche, d'où il s'ensuit par ce qui a déja été établi dans l'Hist. de 1700, que le resonnement qui s'unit au son, est agréable, mais plus foible que s'il se faisoit & dans la bouche & dans le nés, comme celui de la Voix pleine, & qu'enfin la Voix de fausset ne doit être qu'une espece de demi-voix.

2°. La Voix *fausse* est differente de celle de fausset; c'est celle qui ne peut entonner juste le Ton qu'elle voudroit. M. Dodart en rapporte la cause à l'inégale constitution des deux lévres de la Glotte, soit en grandeur, soit en épaisseur, soit en tension; car cette inégalité supposée, elles ne peuvent jamais concourir ensemble à produire le même Ton par leurs tremblemens, l'une fait, pour ainsi dire, la moitié d'un Ton, l'autre la moitié d'un autre, & l'effet total n'est ni l'un ni l'autre Ton, mais quelque chose de moyen, & d'incommensurable en quelque sorte à ce que la volonté demandoit. C'est par le méme principe que des cordes d'instrument sont fausses; elles ont quelques parties qui ne sont pas assés semblables aux autres.

3°. Pourquoi des personnes qui ont le Son de la voix agréable en parlant, l'ont-elles desagreables en chantant, ou au contraire? Voici ce que M. Dodart répond. L'action de chanter demande plus de force que celle de parler; non-seulement les petits cordons tendineux & musculeux de la Glotte agiront pour lui donner l'ouverture convenable à un certain Ton qu'on veut entonner en chant, mais comme il faut le porter & le soûtenir autant qu'il est possible, les muscles du Larinx agiront aussi

de la maniere necessaire pour aider à ceux de la Glotte, au lieu qu'ils n'eussent point pris de part à ce même ton, formé negligemment pour la simple Parole. En un mot, le Chant est un mouvement général de toute la Region vocale, & la Parole est le seul mouvement particulier de la Glotte, & puisque ces deux mouvemens sont differens, l'agrément ou le desagrément qui résulte de l'un par rapport à l'Oreille, ne tire point à consequence pour l'autre.

M. Dodart ajoûte une raison particuliere pour ceux en qui la voix de la parole est agréable, & non pas celle du chant. Il conjecture que le chant est une ondulation, un balancement, un tremblement continuel, non pas ce tremblement continuel des cadences, qui se fait quelquefois dans l'étenduë d'un ton, mais un tremblement qui paroît égal, & uniforme, & ne change point le ton, du moins sensiblement, semblable en quelque sorte au vol des Oiseaux qui planent, dont les aîles ne laissent pas de faire incessamment des vibrations, mais si courtes & si promptes qu'elles en sont imperceptibles. Le tremblement des cadences se fait par des changemens très-prestes & très-délicats de l'ouverture de la Glotte, mais le tremblement qui regne dans tout le chant est, selon M. Dodart, celui du Larinx même. Le Larinx est le canal de la voix, mais un canal mobile dont les balancemens contribuënt à la voix de chant. Cela posé, on voit assés que si ses tremblemens qui ne doivent pas être sensibles, le sont, ils choqueront l'oreille, tandis que dans la même personne les simples mouvemens de la Glotte pourront faire un effet qui plaise.

DIVERSES OBSERVATIONS ANATOMIQUES.

I.

MONSIEUR Littre a fait voir le Pericarde d'un Homme de 30 à 35 ans, fortement adhérent au Cœur en toute son étenduë. Cet Homme avoit été tué d'un coup d'épée, & étoit mort un quart d'heure après le coup ; circonstance qui marque assés qu'aux approches de la mort le Pericarde n'avoit pas eu le loisir de se vuider de la liqueur que l'on prétend qu'il contient toûjours.

II.

M. Mery a fait les Observations suivantes sur la Matrice d'une femme morte 4 heures aprés être accouchée : 1°. Que le Corps de cette Matrice étoit musculeux. 2°, Qu'elle avoit 8 lignes d'épaisseur. 3°, Que sa surface interieure n'étoit point revêtuë de Membrane. 4°, Qu'elle n'avoit point de glandes. 5°, Que les embouchures des vaisseaux sanguins y étoient visiblement ouvertes. La troisiéme observation est fort remarquable.

III.

Un jour que l'on parloit de la difficulté de concevoir que les Esprits, qui gonfloient un Muscle pour produire un certain mouvement, en sortissent dans l'instant même que l'on vouloit faire un mouvement contraire, M. Varignon dît qu'il imaginoit qu'un Muscle ne continuoit un mouvement que parce que de nouveaux Esprits y couloient toûjours, & succedoient à ceux qui se dissipoient à chaque instant, que par là il surmontoit son Antagoniste, mais qu'aussi-tôt que l'on vouloit faire un mouvement contraire, il cessoit de couler de nouveaux Esprits dans ce Muscle, & qu'il en couloit dans l'Antagoniste, ce qui causoit le changement subit & instantanée de mouvement.

Pour le prouver, il rapporta qu'un Chat à qui on avoit ouvert le cou, & lié les nerfs de la 8[e] Paire, qui vont au Cœur & au Poumon, étoit mort dans l'instant sans aucun mouvement d'aucune partie de son corps, & étoit demeuré tout d'un coup aussi roide que s'il eut été mort depuis plusieurs jours. Le mouvement du cœur ayant été arrêté subitement & totalement, la filtration des Esprits dans le Cerveau, qui ne se peut faire que par l'impulsion continuelle du sang que le cœur y envoye, s'étoit arrêtée de la même maniere, & de là tout le reste s'ensuit selon la pensée de M. Varignon. On en peut conclure aussi que dans les autres corps morts, qui ne demeurent pas tout d'un coup aussi roides que celui du Chat, il doit rester encore même aprés ce qu'on appelle la mort, un petit mouvement insensible du Cœur, du Sang, & des Esprits.

IV.

M. Mery a fait voir un Oeuf de Poule cuit, dont le blanc renfermoit un autre petit Oeuf, revêtu de sa coque & de sa membrane interieure, & rempli de la matiere blanche, sans jaune. Comme ce petit œuf avoit été donné cuit à M. Mery, il n'a pû remarquer s'il avoit un germe.

V.

Une Femme assés pauvre, accoûtumée depuis longtemps à boire beaucoup d'eau de vie, & de vin du plus commun, & qui, quoiqu'elle n'eût que 45 ans, étoit devenuë par là fort foible & presque hebetée, s'enyvra si fort, qu'elle en mourut aprés 12 heures d'yvresse. Pendans ce temps, elle fut sans connoissance, & sans parole, le visage pâle, les extremités froides, la poitrine oppressée, des mouvemens convulsifs, tantôt dans une partie, tantôt dans une autre, mais legers, & de peu de durée. Elle eut aussi une petite fiévre, qui cessoit & recommençoit de temps en temps, sans garder aucune regle.

M. Littre l'ouvrit. Il trouva tout le sang noir, grossiet, & en partie caillé, la Rate, le Pancreas, le Foye,

les Reins, les Poumons, defféchés, ſquirreux, ou même pétrifiés en partie, une infinité de Glandes pétrifiées, & beaucoup plus groſſes que dans l'état naturel, les Jugulaires, les Salivaires, celles de la Rate, & des Vaiſſeaux Spleniques, celles du Meſentere & des Lombes, celles des parties exterieures de la Tête, & quantité d'autres.

Le genre extraordinaire de vie, que menoit cette Femme, a paru à M. Littre la cauſe de tous ces accidens, & des circonſtances de ſa mort. Le mauvais vin, dont elle prenoit exceſſivement, eſt fort chargé de Tartre, & d'un Tartre groſſier, qui par ſa quantité & ſa nature avoit produit trois mauvais effets. Il avoit fort épaiſſi le ſang, diminué la capacité des tuyaux en s'attachant à leur ſurface interieure, comme à celle d'un Tonneau, & empêché la tranſpiration & la nourriture en bouchant leurs pores. Delà s'enſuit neceſſairement le deſſechement des parties. Les Glandes groſſiſſoient par des liqueurs amaſſées qu'elles ne filtroient plus, & ſe pétrifioient par l'endurciſſement de ces liqueurs dont les plus ſubtiles parties s'échapoient. Les filtrations étant arrêtées pour la plus grande partie, & du reſte fort diminuées, l'affoibliſſement de toutes les fonctions tant ſpirituelles que corporelles n'eſt pas étonnant.

De cette même cauſe vinrent auſſi la plûpart des circonſtances de la mort, & il eſt aiſé de les reconnoître. Ce qui produiſit en differentes parties des mouvemens convulſifs, mais legers, & de peu de durée, c'eſt que comme le ſang circuloit lentement, il s'en détachoit par intervalles des parties aqueuſes, & avec elles des ſels, mais groſſiers & en petite quantité, qui picotoient des parties nerveuſes, tantôt dans un endroit, tantôt dans un autre. Lorſque ces mêmes ſels ſéparés du ſang avec la ſeroſité, ſe rencontroient, & qu'ils étoient de nature à exciter une fermentation, il ſurvenoit une petite fiévre.

M. Littre a remarqué qu'Hippocrate dit dans l'Aphoriſme 5e de la 5e Section, que *ſi un Homme yvre perd tout*

à

à coup la parole, il meurt en convulsion, à moins que la fiévre ne le prenne, ou qu'il ne recouvre la parole dans le temps que l'yvresse devroit cesser. Apparemment Hippocrate a entendu que le sujet fût sain d'ailleurs, ou que la fiévre fût forte & continuë, autrement l'Aphorisme ne s'appliqueroit pas à notre exemple.

VI.

L'ouverture de l'extrémité du Prépuce, qui doit être telle qu'elle puisse laisser le Gland découvert, étoit si extraordinairement petite dans un Enfant de 3 ans, qu'à peine y pouvoit-on introduire le bout d'un stilet extrêmement délié. Cette mauvaise disposition s'appelle *Phimosis*, c'est-à-dire, resserrement, pareil à celui d'un sac lié avec une corde. L'Enfant faisoit jour & nuit de violents efforts pour uriner, & n'urinoit que peu, rarement, & par petites goutes. Il avoit le bout de la verge extrémement gros, & la gangrene paroissoit prête à s'y mettre, quand M. Littre fut appellé. Il fit faire une incision au prépuce par le côté, & ensuite en fit retrancher la partie qui excedoit l'extrémité du gland. D'une grande cavité que ce prépuce formoit, il en sortit un peu d'urine, & un nombre presque incroyable de pierres, les plus petites grosses comme des têtes d'épingles, & les plus grosses comme des pois, unies, grisâtres, friables, & qui se réduisoient aisément en petites parties à peu près rondes. Il n'y a presque pas de doute qu'elles ne fussent formées des parties les plus grossieres de l'urine qui étoient retenuës, tandis que la petite ouverture du prépuce ne permettoit qu'aux plus subtiles de sortir, & ce qui le confirme encore, c'est qu'après l'operation l'Enfant ne rendit plus de pierres. La playe qu'on lui avoit faite fut traitée selon les regles ordinaires, & il fut parfaitement gueri en trois semaines. C'étoit-là une espece de Circoncision que la nature rendoit necessaire.

VII.

Un Homme qui avoit vêcu en parfaite santé jusqu'à l'âge de 80 ans, étant mort d'une chute au bout d'une demi-

heure, M. Litre l'ouvrit, & fit les obſervations ſuivantes.

1°. La Membrane de la Rate étoit preſque toute oſſifiée, quoique la Rate, qui étoit petite, fût d'une bonne conſtitution. Les Tuniques de l'Artere Splenique, & celles des autres Arteres du ventre & des extrémités inferieures, étoient pareillement oſſifiées en beaucoup d'endroits.

2 . Les Cartilages du Larinx, & les anneaux cartilagineux de la Trachée, & d'une partie de ſes Bronches, l'étoient tout-à-fait.

3°. Dans les Vaiſſeaux ſanguins des parties ſuperieures, il n'y avoit nulle oſſification, horſmis dans les Coronaires Cardiaques. Le Cœur étoit fort grand, & les deux Arteres qui en ſortent, étant applaties, avoient chacune 2 pouces 5 lignes de diamettre, le tout fort ſain.

4°. Le Pericarde contenoit dans ſa cavité environ une cueillerée d'une liqueur claire, & un peu blanche.

5°. La partie exterieure des deux Reins dans l'épaiſſeur d'une ligne & demie étoit compoſée de grains de figure ronde ou ovale, & d'une demi-ligne de diametre. Il y avoit à la ſuperficie exterieure du Rein droit une tumeur noirâtre, groſſe comme une noix, compoſée de grains de la même figure que les autres, mais deux ou trois fois plus gros, & remplis d'une liqueur urineuſe.

VIII.

Dans le corps d'une femme de 25 ans, morte 4 mois aprês être accouchée de ſon ſecond Enfant, M. Litre a vû le Pavillon de la Trompe droite de la Matrice attaché par toute ſa circonference à l'Ovaire du même côté, & embraſſant un Oeuf de 3 lignes de diametre, dont une partie étoit hors de l'Ovaire. Celle qui n'en étoit pas encore ſortie, étoit contenuë dans une eſpece de Calice, dont le fond étoit continu au corps de l'Ovaire. Ce Calice étoit parſemé en dehors de Vaiſſeaux ſanguins, & compoſé de deux ſubſtances differentes, dont l'interieure étoit glanduleuſe, & l'exterieure muſculeuſe. Ce que M. Littre

a vû en cette occaſion eſt la partie la plus ſecrette du miſtere de la génération de l'Homme, & celle où l'on a le plus de peine à ſurprendre la Nature dans ſon operation.

IX.

Un Homme, qui étoit hidropique, & avoit la jauniſſe, étant mort 3 jours aprés la ponction, M. Mery fit voir à l'Academie un morceau de ſon Foye, dans lequel les Glandes paroiſſent très-diſtinctes, & revêtuës de leurs membranes propres. Quoiqu'elles fuſſent beaucoup plus groſſes qu'à l'ordinaire, le Foye étoit plus petit qu'il ne l'eſt communément dans un âge parfait. La Veſicule du fiel étoit vuide, & ſes membranes plus blanches que jaunes.

X.

M. Littre diſſequant un Chien fut fort étonné de lui trouver l'Eſtomac dans la Poitrine, & placé au-deſſus du Diaphragme. Au lieu du trou par où l'Oeſophage traverſe le Diaphragme pour ſe rendre dans l'Eſtomac, il y avoit une grande fente, dont les bords éteient cicatriſés, & paroiſſoient l'être depuis long-temps, & au lieu de l'Oeſophage, c'étoit l'Inteſtin Duodenum qui paſſoit par ce trou. Comme il eſt toûjours attaché à l'orifice inferieur de l'Eſtomac, il alloit le trouver dans la cavité de la poitrine, ce qu'il ne pouvoit faire qu'en s'allongeant & en s'applatiſſant. M. Littre voulut voir ſi l'Eſtomac pourroit paſſer par la fente du Diaphragme, mais elle ſe trouva trop petite; & aprés une inciſion qu'il y fit, l'Eſtomac deſcendit à ſa place naturelle, & l'Oeſophage fut aſſés long pour ne s'y point oppoſer ce qui marque que l'Eſtomac avoit été d'abord dans ſa ſituation, & que quelque accident violent l'avoit fait paſſer par une déchirure ou fente du Diaphragme, qui enſuite s'étoit retrecie en ſe cicatriſant.

Mais quel avoit pû être cet accident? M. Littre en imagine deux, ou une convulſion extraordinaire de l'Oeſophage, qui en ſe contractant avoit tiré l'Eſtomac à lui, ou une extrême contraction du Diaphragme & des Muſcles

du ventre en même temps, car ces forces étant opposées, l'Estomac poussé en embas par le Diaphragme, & en enhaut par les Muscles du ventre, a dû aller en enhaut, même en déchirant le Diaphragme, dont la résistance est naturellement moindre que la force des muscles qui agissoient contre lui. On peut même supposer qu'alors cet Estomac étoit plein d'alimens solides, ce qui a dû fortifier son action contre le Diaphragme.

Quoiqu'il en soit, cet Estomac n'étant plus placé entre le Diaphragme & les Muscles du ventre, ces Muscles ne pouvoient plus, comme à l'ordinaire, concourir avec lui par leur contraction à broyer les aliments, & à les chasser dans les Intestins. Ils devoient donc séjourner trop longtemps dans l'Estomac, & par-là contracter quelque vice. D'ailleurs le Duodenum allongé & applati ne donnoit plus un passage assés libre aux aliments digerés. Enfin le Cœur & les Poûmons étoient fort incommodés dans leurs mouvemens par cet Estomac, qni s'étoit venu loger dans la poitrine. De tout cela ensemble il auroit été facile de conclure, quand on ne l'auroit pas sçû d'ailleurs, que l'Animal devoit avoir la respiration difficile, & des palpitations de cœur, que plus il avoit mangé, plus ces incommodités devoient être grandes, qu'il devoit avoir de frequentes envies de vomir sans effet, & être toûjours fort maigre.

XI.

Une Demoiselle qui étoit à une Dame de Chartres alloit à la campagne dans une Charette, qui versa si malheureusement pour elle, qu'une des ridelles lui entra dans la tête du côté droit, cassa en plusieurs piéces l'os appellé *Bregma*, déchira la Dure-mere, & la Pie-mere, & causa un épanchement de la substance propre du Cerveau. La Demoiselle relevée de dessous la Charette marcha 15 à 20 pas, aprés quoi elle tomba en foiblesse, & perdit connoissance pendant 4 heures. L'épanchement de la substance du Cerveau continua les 6 premiers jours, & il se fit un très-grand écoulement de serosités. Tout cela cessa le se-

ptiéme jour, & il parut un *fungus* ou champignon qui se formoit dans les déchirures des deux Membranes. Il fut traité selon les regles ordinaires. Pendant les 15 premiers jours, la Malade tomboit dans des assoupissemens profonds, & dans des rêveries, & elle eut un flux de ventre peu violent. La fiévre lui dura 50 jours, & enfin elle a été parfaitement guerie par les sieurs Piat & Cusmont Chirurgiens de Chartres. Il paroît par-là qu'il n'y a guere de blessures dont on doive desesperer.

XII.

M. l'Abbé de Louvois envoya à l'Academie la description & la figure d'un Enfans monstrueux né dans le Village des Masures, environ 3 lieuës de Charleville. C'est une fille parfaitement bien formée & bien proportionnée, qui en porte une autre beaucoup plus petit, sans tête, & du reste assés bien formée, jointe à elle poitrine contre poitrine, depuis la partie superieure du Sternum où les Clavicules sont articulées jusqu'au Cartillage Xiphoïde, de sorte que tout le reste est séparé, & que les deux pieds de la petite reposent sur le haut des cuisses de l'autre. La petite a ses conduits particuliers pour ses déjections aussi-bien que la grande, mais elle en rend beaucoup moins. Les deux n'avoient dans la Matrice de leur Mere qu'un seul Cordon ombilical, qui appartenoit à la grande, l'autre n'ayant point de nombril. Il y avoit 24 jours que ces deux Sœurs étoient nées, & elles vivoient encore lorsqu'on reçut cette Relation. Les deux bras, & les deux jambes de la petire étoient immobiles. La Mere n'avoit été frapée d'aucun objet ni d'aucune imagination extraordinaire. La jonction de deux Oeufs * ou Embrions est assés visible dans ce fait, & ce qui la prouve encore, c'est que la plus grande de ces deux Sœurs paroissoit avoir une oreille double, seul reste de la tête de la plus petite.

*V. l'Hist. de 1702. p. 28.

NOus renvoyons aux Memoires :

Les Remarques de M. Poupart sur les Moules. V. les M. p. 51.

V. les M. p. 235. La Description d'une Exostose monstrueuse, par M. Mery.

V. les M. p. 418. Celle deux Enfans monstrueux unis ensemble, par M. du Verney.

V. les M. p. 472. Et celle d'un Squelette contourné, par M. Mery,

CHIMIE

SUR UNE DISSOLUTION D'ARGENT.

V. les M. p. 102. SI on pouvoit réduire la Chimie, & en général la Phisique à des especes de formules universelles, qui continssent tous les cas possibles, comme on y réduit les plus sublimes Questions de la Geometrie moderne, on seroit en état de prévoir les changemens qui répondroient aux differentes suppositions qu'on voudroit faire, & souvent on verroit de très-legers changemens dans les suppositions produire de très-grandes variations dans les effets. Mais la Phisique est trop vaste, & trop peu connuë, du moins jusqu'à present, & l'experience seule nous enseigne quel est le pouvoir des circonstances pour varier les Phenomenes. M. Homberg en donne un exemple remarquable dans une Dissolution d'Argent faite par le Dissolvant de l'Or. Nous laissons à son Memoire toute l'histoire du fait, & de la découverte, & nous n'en exposerons ici que les principes.

L'Esprit de Sel marin est le dissolvant propre de l'Or, & l'Esprit de Nitre le dissolvant propre de l'Argent. L'Esprit de Sel mêlé avec l'Esprit de Nitre n'en dissout que mieux l'Or, c'est-là ce qui domine dans l'*Eau Regale*.

l'Esprit de Nitre mêlé avec l'Esprit de Sel ne dissout plus l'Argent. C'est l'Esprit de Nitre qui domine dans l'*Eau forte*.

Sur ces faits, M. Homberg a conçû avec assez de vraisemblance que les pores de l'Or, qui pese beaucoup plus que l'Argent, sont plus étroits, & les pointes de l'Esprit de Sel plus fines que celles de l'Esprit de Nitre; qu'elles le sont plus qu'il ne seroit absolument necessaire pour la petitesse des pores de l'Or; que l'Esprit de Sel uni avec l'Esprit de Nitre forme un corps de grosseur moïenne, encore capable d'entrer dans les pores de l'Or, d'y faire l'effet d'un Coin, & d'en écarter les parties solides; que l'Esprit de Sel étant uni avec l'Esprit de Nitre, son action est plus forte que s'il étoit seul, parce que selon les principes établis par M. Homberg dans ses Essais de Chimie *, l'Esprit de Nitre est accompagné & revêtu d'un souffre vegetal ou animal plus rarefié, plus volatil, plus actif que le souffre metallique attaché à l'Esprit de Sel; qu'enfin le composé de ces deux Esprits ne dissout point l'Argent, parce que le corps moïen qu'ils forment est encore trop délié pour les pores de ce metal, qu'il y est trop au large, & par consequent n'y fait pas une impression suffisante.

* V. les M. de 1702. p. 36. & suiv.

Ces principes étant admis, quels effets doit produire une Eau Regale composée d'Esprit de Sel, & d'Esprit de Nitre, mais en si petite quantité l'un & l'autre, qu'ils floteront séparément dans la liqueur, & ne se rencontreront pas assés souvent pour s'unir, du moins en un grand nombre de parties?

Cette Eau pourra être si foible qu'elle paroîtra ne point dissoudre l'Or, & qu'elle prendra seulement une teinture jaune, qui ne diminuëra point sensiblement le poids du metal. Elle ne dissoudra point non plus l'Argent, à cause de sa foiblesse, & en général, elle ne dissoudra ni l'un ni l'autre de ces metaux, parce que lequel des deux qui soit mis dans cette liqueur, il y aura toûjours l'un des deux Esprits acides, qui fera, pour ainsi dire, des efforts inutiles contre lui, & qui tiendra la place des parties de l'autre

Eſprit, qui auroient pû agir plus utilement. Mais ſi cette Eau Regale a diſſous l'Or autant qu'elle le peut diſſoudre, ſi elle en a tiré une teinture jaune, elle pourra enſuite diſſoudre l'Argent; car l'Eſprit de Sel, ſoit ſeul, ſoit uni avec l'Eſprit de Nitre, étant occupé à tenir diſſoutes ce peu de parties d'Or, il n'attaquera plus l'Argent, qui par conſequent recevant l'impreſſion d'une plus grande quantité de parties de l'Eſprit de Nitre ſeul, ſe laiſſera diſſoudre. Cette experience ne peut pas ſe renverſer, c'eſt à dire, que cette Eau Regale ne peut pas commencer par diſſoudre legerement l'Argent, & enſuite diſſoudre l'Or; la raiſon en eſt, que l'Eſprit de Nitre n'empêche pas l'Eſprit de Sel d'agir ſur l'Or, comme l'Eſprit de Sel empêche l'Eſprit de Nitre d'agir ſur l'Argent.

Il ſuit de tout cela que ſi l'Eſprit de Sel & l'Eſprit de Nitre que nous avons ſuppoſé qui flotoient ſéparément, viennent avec le tems à s'unir dans toutes leurs parties, la liqueur ne fera plus la fonction que l'Eau Regale, & ne diſſoudra plus que l'Or, au lieu qu'auparavant après avoir diſſous l'Or, elle diſſolvoit auſſi l'Argent.

On verra dans le Memoire de M. Homberg toute cette Experience, telle qu'elle lui a été preſentée par le hazard, & accompagnée du Merveilleux qui venoit de ce que les principes n'en étoient pas encore démêlés. Nous l'avons expoſée ici de la maniere qu'elle auroit pû être prévûë ſelon ces principes, mais on ne ſçait que trop que ce n'eſt pas ainſi que nos connoiſſances ont coûtume de proceder.

SUR LA NATURE DU FER.

LE Fer eſt de tous les Metaux celui qui a les plus grands uſages dans la pratique de la Medecine, & en même tems celui qui dans la Phiſique ſpeculative attire le plus la curioſité des Philoſophes, parce qu'il a ſa part aux Phenomenes de l'Aiman. M. Lemery le fils, & M.

M. Homberg l'ont étudié tous deux, l'un par la Chimie ordinaire, l'autre par sa nouvelle Chimie, dont le seul fourneau est le Miroir ardent du Palais Royal.

Il résulte des operations de M. Lemery le fils que le fer est une matiere huileuse intimement unie à une terre. V. les M. p. 119. Selon lui, il n'entre point de sel acide dans cette composition, non que l'on ne puisse en trouver dans le fer, mais comme ce metal est assés indigeste, &, pour ainsi dire, grossierement travaillé par la Nature, il peut avoir des parties étrangeres, & qui n'appartiennent pas à sa veritable substance. Ainsi des Acides pourront être reçûs dans ses pores, sans être en aucune maniere principes de ce Mixte; & loin d'en être principes, M. Lemery fait remarquer qu'ils en sont les Dissolvants, c'est-à-dire les Destructeurs & les Ennemis. L'Esprit de Sel, l'Esprit de Nitre, & les autres Acides dissolvent le fer, & lorsqu'il se roüille, il est dissous ou par les Acides de l'Air, ou par ceux qu'il contenoit dans ses pores, & que l'eau ou quelqu'autre liqueur a mis en action. S'il se verifie, dans la suite que les Acides soient exclus de la composition intime du fer, il faudra apporter une restriction à la formation du fer artificiel, dont on a parlé dans l'Hist. de 1704 *, & reconnoître que les Acides qui y sont entrés n'y étoient pas necessaires. *p. 39.

Le Vitriol est du fer intimement mêlé avec un Esprit acide, & l'on fait avec ce mêlange un Vitriol artïficiel tout semblable au naturel. M. Lemery le fils ayant poussé l'une & l'autre espece de Vitriol à un grand feu, il en tira l'Esprit acide, accompagné d'une odeur de souffre commun très-forte, & qui a duré plusieurs mois après la distillation. Le Virtiol calciné & devenu *Colcotar* ayant encore été mis à un feu de fonte très-violent, qui lui fit jetter une nouvelle odeur de souffre, il resta enfin dans le Creuset une poudre noire, rarefiée, & que l'Aiman attiroit aussi fortement que le fer ou que l'Acier.

On sçait que le souffre commun est composé non-seulement d'une matiere huileuse, mais encere d'un Esprit aci-

de, sans lequel la matiere huileuse ne seroit pas imflammable. Il y a donc toute apparence que dans les Vitriols il se forme un souffre commun par l'union de l'Esprit acide avec les parties huileuses du fer, & que ce souffre se rend sensible à l'odorat par l'action du feu. La matiere noire qui restoit après toute l'operation étoit encore du fer, puisqu'elle étoit attirée par l'Aiman, mais un fer ou entierement ou presque entierement dépouillé de sa partie huileuse. Aussi il n'étoit plus malleable, car c'est sa partie huileuse qui lui donne la facilité de s'étendre sous le marteau, mais il étoit devenu friable à peu prés comme une pierre, il n'étoit plus ou presque plus dissous par aucun acide, puisque les acides qui fermentent violemment avec les huiles n'avoient plus de prise sur lui, & par la même raison il ne se roüilloit plus.

Les mêmes operations qui ont été faites sur le Vitriol naturel & artificiel, l'ont été aussi sur de la roüille de fer, la plus parfaite que l'on ait pû trouver, & ont réüssi de même à peu prés. Comme le Vitriol a plus d'Acide que la roüille, & que les parties huileuses ne se détachent de ces Mixtes qu'à proportion de la quantité de l'Acide qui les enleve, il se détache plus de parties huileuses du Vitriol que de la roüille, & par consequent la matiere qui reste de la rouille aprés les operations est plus en état d'être encore dissoute imparfaitement par quelques Acides. Il paroît donc que le fer se décompose, & même assés facilement, eu égard à la difficulté de décomposer d'autres Metaux. C'est par-là qu'il devient utile dans la Medecine, & apparemment les bons effets que l'on en retire sont dûs à sa partie huileuse separée de la terre par les operations Chimiques qui se font dans le corps humain.

M. Lemery ayant donné aux usages medicinaux la partie huileuse du fer, il donne la partie terreuse aux phenomenes magnetiques; non pas que toute sorte de terre y doive être propre, il faut pour cela une disposition très-particuliere des pores, & peut-être est-ce la matiere huileuse qui les moule ainsi qu'il est necessaire. Delà

M. Lemery conjecture que l'Aiman pourroit avoir été originairement du fer, dont la chaleur de la terre auroit enlevé la partie huileuse. En effet, il n'en faudroit pas davantage pour faire toute la difference d'un Metal tel que le fer à une Pierre telle que l'Aiman, & l'on sçait combien le fer & l'Aiman se ressemblent d'ailleurs.

Pourquoi donc le fer dépoüillé de son huile, & mis dans l'état où M. Lemery l'a eu par ses experiences, n'attire-t-il pas ainsi que l'Aiman ? Ce fer est en poudre, & le meilleur Aiman réduit en poudre n'attire pas non plus. La cause en est aisée à imaginer ; il ne se forme pas de Tourbillon autour de chaque petit grain, ou il ne s'en forme pas qui soit assés fort. Il ne s'en forme pas non plus autour de tous les grains ensemble, qui n'ont entre eux aucune suite de pores reguliere. La poudre d'Aiman qui a perdu la vertu d'attirer, est toûjours attirée précisément comme la terre du fer.

Si du fer dépoüillé de sa partie huileuse n'étoit pas en poudre, & que d'ailleurs il fût assez long-tems exposé au courant de la matiere magnetique pour en amasser & en retenir un Tourbillon autour de soi, il deviendroit selon ce sistême un veritable Aiman. C'est aussi ce que M. Lemery prétend être arrivé à quelques morceaux roüillés d'une barre de fer qui étoit au Clocher de Chartres. Les acides de l'air, ou les acides étrangers logés dans les pores du metal en avoient dissous la partie huileuse de la superficie, la chaleur du Soleil avoit avec le tems enlevé & les dissolvants & ce qu'ils tenoient dissous, & la matiere magnetique qui circule autour du globe terrestre, avoit assés long-tems passé dans ce fer privé de son huile. Dans la pensée de M. Lemery le fils, le fer n'est pas changé en Aiman par la roüille, il est seulement disposé à ce changement, & il faut qu'ensuite il se déroüille, c'est à dire que l'huile dissoute par l'acide se détache du fer. Quoique M. de la Hire, ainsi que nous l'avons rapporté dans l'Hist. de 1705 * ait attribué le changement à la roüille, les deux opinions ne seront peut-être pas difficiles à concilier. * p. 7.

V. les M. p. 8. D'un autre côté, M. Homberg a examiné le fer par le Verre ardent. Nous laiſſons entierement à ſon Memoire le détail des Experiences, qui ne peut ni ne doit être abregé : à cauſe d'un trop grand nombre de petites circonſtances délicates, & toutes importantes. Les principales conſequences qui naiſſent des obſervations de M. Homberg, ſont :

1°. Que le fer a une certaine quantité de matiere huileuſe ſuperfluë, qui ſe ſepare de la partie veritablement metallique, & cela confirme ce que nous avons dit ci-deſſus, que ce Metal étoit mal digeré, & mal travaillé.

2°. Que cette matiere huileuſe ou le ſouffre du fer, ſe joignant au Charbon, ou à quelque matiere de cette nature, eſt inflammable. Peut-être eſt-ce là un effet de l'union de ce ſouffre avec les acides du Charbon.

3°. Que le ſouffre du Cuivre eſt inflammable comme celui du fer, mais non-pas le ſouffre de l'Or ou de l'Etain, quoique l'Or, le Cuivre & l'Etain ſoient trois Metaux fort ſulphureux. Il y a beaucoup d'apparence que ſans le Miroir ardent on ne parviendroit pas à reconnoître les differences ſi fines entre les principes intimes de la compoſition des Metaux.

SUR LA NATURE DU MIEL.

V. les M. p. 158. ON ne croit plus, comme les Anciens, que le Miel ſoit formé de la Roſée qui eſt tombée ſur les fleurs, & on ne le prend plus pour une production de l'air, & pour un preſent du Ciel. Les Abeilles ne le ramaſſent qu'après le lever du Soleil, & lorſqu'il n'y a plus de roſée, & il faut que ce qu'elles vont prendre ſur les fleurs ſoit ou une liqueur qui s'y eſt preparée, & qui en ſort par des vaiſſeaux particuliers, ainſi que la Manne ſort du Freſne de Calabre, ou plûtôt la pouſſiere fine & déliée des *Etamines* des fleurs ; car, ſelon les obſervations que M. du Verney

en a faites autrefois, on ne voit les Abeilles s'attacher qu'à ces Etamines, & non aux endroits d'où il peut sortir quelque liqueur.

M. Lemery a examiné la nature du Miel par les analises Chimiques. Il en a pris de differents païs, de Narbonne, de Champagne, & de Normandie; le Miel diminuë en bonté selon l'ordre où ces lieux viennent d'être nommés, mais les analises sont peu differentes.

Les trois quarts de la substance du Miel s'en vont en liqueur par la distillation. De cette liqueur, qui change selon les degrés du feu, & la durée de l'operation, il y en a plus d'un quart qui n'est qu'une eau insipide au goût, & cependant acide en elle-même, puisqu'elle rougit le Tournesol, presque tout le reste est une eau sensiblement acide qu'on appelle Esprit de Miel; il ne vient que fort peu d'Huile. Le quart de la substance du Miel qui demeure solide, est un charbon noir & leger, qui lorsqu'on le met tremper dans l'eau, y boüillonne comme de la Chaud. On en tire par la lixivation un peu de sel Alcali.

De tout ce qui sort du Miel, rien n'en conserve le goût, ni même un goût approchant, & il n'y a pas lieu d'en être surpris; la saveur, ainsi que toutes les autres proprietés des Mixtes, dépend d'une certaine liaison des principes. M. Lemery croit que *le doux* vient d'un mélange intime d'un Acide avec un souffre ou une huile qui le tempere & le corrige. Il prouve cette pensée par l'exemple du sucre de Saturne, ainsi nommé pour sa douceur. C'est du Plomb, metal insipide de lui-même, mais très-sulfureux, dissous par un Acide. Il n'est pas toûjours aisé à l'Art, ni de faire un melange assés intimes des deux matieres qui composent le doux, ni d'en rencontrer precisément la dose.

M. Lemery a voulu éprouver si l'Esprit de miel rectifié dissout l'Or & d'autres Metaux, comme l'ont écrit plusieurs Chimistes. Il a trouvé que cet Esprit tiroit de l'Or une teinture jaunâtre, & du Cuivre un peu d'odeur sans teinture, qu'il penetroit le fer, le Plomb & le Mercure, mais non pas l'Argent ni l'Etain.

SUR LE FER DES PLANTES.

V les M. p. 411.

Les operations de M. Lemery sur le Miel rapportées dans l'Article precedent, lui ont fourni une Reponse à la Question que M. Geoffroy proposa dans l'Hist. de 1705 *, *s'il peut y avoir des Cendres de Plantes sans fer?* Nulle matiere tirée des Plantes ne paroît devoir être plus exempte de fer, que le Miel, qui n'est qu'un Extrait fort délicat des fleurs, travaillé encore dans les Visceres du petit corps de l'Abeille; cependant M. Lemery après avoir pris toutes les précautions possibles contre le fer, qui auroit pû survenir par accident, & se mêler dans ses operations, a trouvé dans le charbon noir qui est resté des distillations du miel, de petits grains que l'Aiman attiroit.

* p. 64. & 65.

Il y a plus, M. Lemery le fils en a trouvé aussi dans le Castoreum, qui est une matiere animale.

Il faut donc, ou que quelqu'autre matiere que le fer puisse être attirée par l'Aiman, ou qu'il se forme du fer par la calcination qui fait les Cendres, ou qu'enfin il soit réellement contenu dans les Plantes, & même dans quelques parties d'Animaux. M. Lemery le fils tient pour le dernier parti.

Ces grains tirés des Plantes, & sur lesquels l'Aiman agit, se fondent au Miroir ardent precisément de la même maniere, & avec les mêmes circonstances que de la limaille de fer. Pourquoi donc ne seroient-ils pas de veritable fer?

On doit présumer qu'ils en sont, si rien n'empêche de le croire, & c'est en suivant ce raisonnement que M. Lemery le fils répond à toutes les difficultés qu'on pourroit opposer. Quelques étroits que soient les tuyaux des Plantes, il prouve que le fer se peut diviser en assés petites parties pour y passer aisément. Quelque pesant qu'il soit, il peut s'y élever, étant dissous dans une liqueur. Il est incontestable que des parties de terre s'y élevent.

Une recherche plus particuliere sur la facilité du fer à s'élever, a produit à M. Lemery le fils une experience curieuse. Sur une dissolution de limaille de fer par l'Esprit de Nitre, contenuë dans un Verre, il a versé de l'Huile de Tartre par défaillance; la liqueur s'est fort gonflée, quoiqu'avec une mediocre fermentation. & peu de temps aprés qu'elle a été reposée, il s'en est élevé des especes de branchages, attachés à la superficie du Verre, qui continuant toûjours à s'étendre & à croître l'ont enfin entierement couverte, & se sont même répandus ensuite sur la superficie exterieure. La figure de branchages est si parfaite, qu'on y apperçoit jusqu'à des especes de feuilles & de fleurs, & cette vegetation de fer peut aussi legitimement être appellée *Arbre de Mars* qu'une vegetation de Mercure, quoique differente, a été appellée Arbre de Diane. Si la liqueur qui en montant se répand hors du verre sans se mettre en branchages, y est reversée, elle recommence bien-tôt à monter, & se durcit en rameaux, soit en tout ou en partie; de sorte qu'il n'y a qu'à reverser dans le Verre ce qui est demeuré liquide, & à la fin le tout se consume à la formation de l'Arbre. Il y a quelque tegere varieté d'effet qui dépend de la dose de la dissolution du fer, & de l'Huile de Tartre.

L'extrême volatilité de cette liqueur ne peut être attribuée qu'au fer, puisque certainement l'Esprit de Nitre, & l'Huile de Tartre mêlés ensemble ne produiroient pas une semblable vegetation. Par-là, M. Lemery le fils n'a pas de peine à comprendre que du fer dissous dans la Terre par des Acides s'éleve jusqu'au haut des Plantes, & que peut-être il aide à l'élevation de la seve; il comprendroit même que la figure que le fer prend naturellement en s'élevant dans le Verre, peut contribuer à celle des Plantes où il est enfermé : & que c'est lui en partie qui leur fait jetter des branches; mais cette pensée est encore trop nouvelle, & même trop contraire à plusieurs apparences assés fortes, pour être proposée sans beaucoup de défiance. Il est bon qu'on en hazarde quelquefois de cette

espece, comme les Medecins hazardent des Remedes; mais il faut à leur exemple y apporter les précautions necessaires.

SUR L'ANALISE DE DEUX PLANTES MARINES.

V. les M. p. 507.

Voici un des premiers fruits de l'union de l'Academie des Sciences avec la Societé Royale de Montpellier établie en 1706. par le Roi. M. Matte, l'un des membres de cette Societé, ayant envoyé à M. Geoffroy, le détail de l'Analise qu'il avoit faite d'une especé de *Lithophyton*, ou Plante pierreuse née dans la Mer, M. Geoffroy fut surpris de ce qu'elle avoit donné autant de sel volatil urineux qu'auroit pû faire une matiere *animale*, quoiqu'il soit constant jusqu'ici par toutes les experiences des Chimistes, que les matieres vegetales, en donnent beaucoup moins. La curiosité de M. Geoffroy ayant été excitée par cette nouveauté, il fit l'Analise d'une Eponge de la moïenne espece, autre Plante marine, & il en tira autant de sel volatil que l'on en tire de la soye, celle de toutes les matieres animales qui en donne le plus. Les Chimistes sont persuadés que les Poissons en rendent ordinairement moins que les Animaux terrestres, mais en récompense voilà des Plantes de Mer, qui en ont plus que celles des la Terre.

OBSERVATION CHIMIQUE.

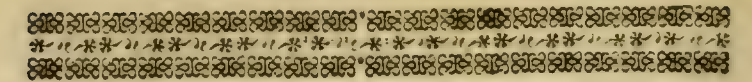
Monsieur Lemery ayant examiné par les épreuves Chimiques une Eau minerale qui est dans le Jardin de M. Billet au Fauxbourg S. Antoine, & qui commence

à

à avoir de la réputation, a trouvé qu'elle contenoit un ſel nitreux, mêlé avec une terre entierement argilleuſe, ou ſulphureuſe. Il ne croit pas cette terre entierement inutile pour la vertu de l'eau; car étant intimement unie avec le ſel, comme elle l'eſt, elle fait une eſpece de ſavon doux, qui rend l'eau plus capable de fondre & de diſſoudre les humeurs, que ſi elle ne contenoit que le ſel.

NOus renvoyons entierement aux Memoires la ſuite des Eſſais de Chimie de M. Homberg. V. les M. p. 260.

CEtte année M. Lemery publia ſon *Traité de l'Antimoine*, annoncé dans le premier Volume de nos Hiſtoires, & depuis dans tous les autres juſqu'à celui-ci. Comme l'Antimoine eſt un des principaux objets de la curioſité des Chimiſtes, &, ce qui eſt encore plus important, l'un des plus grands Remedes de la Medecine moderne, M. Lemery a jugé à propos de l'examiner à fond, & d'y épuiſer tout l'art de la Chimie. Les Diſſolutions, les Sublimations, les Diſtillations, & les Calcinations de ce Mineral, combiné avec toutes les matieres dont on a pû eſperer quelque effet, diviſent tout l'Ouvrage en quatre parties. M. Lemery n'a pas negligé même de rapporter les operations qui n'ont pas réüſſi, pour en épargner la peine à d'autres Chimiſtes, & prévenir des deſſeins inutiles, ou du moins, pour faire voir en quelles circonſtances elles ne réüſſiſſent pas. L'exactitude & la ſincerité, ſi rares juſqu'à preſent en Chimie, doivent relever le prix de cet Ouvrage.



BOTANIQUE.

MOnsieur Marchand continuant des Descriptions de Plantes qui doivent composer un ouvrage particulier, à lû celles de la *Persicaria maculosa*, *& non maculosa*, du *Hyoscyamus Syriacus*, du *Buphtalmum Dioscoridis*, & de l'*Iris Persica variegata præcox*.

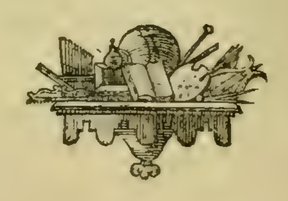
MOnsieur Tournefort a lû aussi les Descriptions de la *Vitis Idæa*, & de la *Thymelæa Pontica*, qui sont reservées pour la Relation de son voyage de Levant.

NOus renvoyons aux Memoires

V. les M. p. 83.
De nouveaux Genres de Plantes, que M. Tournefort joint à ceux qu'il a déja donnés l'année précédente.

V. les M. p. 87
La suite de la Description des Plantes d'Auvergne, commencée en 1705, par M. Chomel.

V. les M. p. 333.
Les Experiences que M. Marchand a faites sur la vertu de la Racine de la Grande Valeriane sauvage pour l'Epilepsie.



ALGEBRE.

SUR UNE METHODE GENERALE POUR LA RESOLUTION DES EQUATIONS.

IL est aisé de s'appercevoir que l'Algebre est encore assés imparfaite. Nous avons déja dit dans l'Hist. de 1705* qu'il n'y a de formule absolument générale que pour les Equations du second degré, que la formule de celles du troisiéme tombe souvent dans le cas irreductible, & par consequent, quoique générale en apparence, cesse de l'être, que le quatriéme degré, qu'il faut abaisser au troisiéme, en a les inconveniens, & qu'enfin hors du quatriéme il n'y a plus de formule. Mais on peut encore faire d'autres reflexions sur les défectuosités de l'Algebre.

V. les M p. 296.
* p. 82. & 83.

Dans une Equation du second degré, dés que les nombres qui y entrent avec la lettre inconnuë sont un peu grands, la formule engage à un long & ennuyeux calcul.

C'est encore beaucoup pis dans le troisiéme degré. Il faut former des quarrés & des cubes, tirer ensuite plusieurs racines quarrées & cubiques, &c. Il y a telle Equation, & du nombre de celles qu'on peut fort naturellement rencontrer dans des recherches geometriques, qui demanderoit des journées entieres de calcul.

Dans ce même degré, l'application de la formule générale à des cas particuliers ne donnent souvent pour valeurs de l'inconnuë que des grandeurs irrationelles, quoique ces mêmes valeurs soient effectivement rationelles. La raison en est que des grandeurs irrationelles combi-

nées ensemble de differentes manieres peuvent être égales à quelque grandeur rationelle, & par consequent la même grandeur peut paroître sous deux formes, ou sous sa forme rationelle, qui est la plus naturelle, & la seule que l'esprit puisse saisir nettement, ou sous la forme irrationelle, qui la rend très-difficile à reconnoître, & presque intelligible, jusqu'à ce qu'elle soit reconnuë. Or telle est la formule du troisiéme degré qu'elle donne le plus souvent une valeur rationelle sous une forme irrationelle, & après que la résolution de l'Equation n'a produit que cette valeur rationelle ainsi déguisée, c'est un nouveau travail que de la démêler de dessous les envelopes qui la couvroient.

Il y a encore plus. La même raison qui fait qu'une grandeur rationelle peut paroître sous une forme irrationelle, fait aussi qu'une grandeur *réelle* peut paroître sous une forme *imaginaire*, c'est à dire, être exprimée par certaines combinaisons de grandeurs imaginaires. Or toute grandeur imaginaire renfermant essentiellement une contradiction, elle est absolument intelligible à l'esprit, ce que ne sont pas les grandeurs irrationelles, dont on a du moins une idée confuse & obscure; toute grandeur de cette espece est purement chimerique, & même quand le réel est combiné & mêlé avec l'imaginaire, de quelque maniere qu'il le soit, il en est, pour ainsi dire, soüillé à tel point qu'il devient pareillement imaginaire. La formule du troisiéme degré donne souvent sous une forme imaginaire une grandeur qui ne laisse pas d'être veritablement réelle, & alors c'est le cas qu'on appelle *irreductible*, parceque le calcul est entierement arrêté, & que l'on n'a jusqu'ici ni aucune autre formule, ni aucun moyen de démêler le réel que cette formule couvre d'une apparence imaginaire. On peut observer ici en passant que Tartalea, Auteur Italien du seiziéme Siécle, & l'un des premiers qui ait travaillé à l'Algebre, a inventé la formule du troisiéme degré, & que le nœud qui l'arrêta dans le cas irreductible n'a point encore été dénoüé depuis lui.

On sçait assés qu'en fait de Methodes il y a un certain fil ou une certaine veine à prendre, qu'il faut avoir l'adresse ou le bonheur de la rencontrer, & qu'autrement une matiere qui auroit pû être facile est toute herissée de difficultés ou d'inconvenients. Sur ce fondement, on peut soupçonner que les principes de la résolution de Equations n'ont pas été trop heureusement trouvés, & qu'il y en a d'autres plus naturels. Quoiqu'il en soit, M. de Lagni en propose de nouveaux, dont il avoit déja donné quelque idée*. Nous en rapporterons ici ce qu'ils contiennent de plus facile & de plus necessaire pour l'intelligence du tout.

*V. l'Hist. p. 82. & suiv.

Une Equation du second degré étant proposée, ou une Equation du troisiéme dont le second terme est évanoüi, ce qui est toûjours aisé, elle a trois termes, l'un qui est le quarré ou le cube de l'inconnuë, l'autre le produit de cette même inconnuë par un nombre donné (on appelle ce nombre *le Coëfficient*) enfin le troisiéme qui est l'homogene de comparaison. Si dans le second degré de quarré de l'inconnuë, plus 2 fois son produit, par exemple, est égal à un grand nombre ou homogene de comparaison, comme 100, il est aisé de voir d'un premier coup d'œil que le quarré de l'inconnuë ne doit guere differer de 100, puisque pour égaler 100 il ne lui faut qu'un aussi petit secours que le produit de cette même inconnuë par 2. Si donc on neglige ce produit qui est le second terme, & qu'on égale simplement le quarré de l'inconnuë à 100, on trouve l'inconnuë égale à 10, nombre, à la verité, un peu trop grand, ce qu'on voit en remettant 10 au lieu de l'inconnuë dans l'Equation, mais aussi 9 seroit trop petit, & delà on conclut necessairement que l'inconnuë est un nombre irrationel entre 9 & 10, mais plus près de 9 que de 10, parce qu'en supposant 9 pour l'inconnuë on approche plus de l'Equation donnée qu'en supposant 10. Dans cet exemple, après qu'on a égalé immediatement le quarré de l'inconnuë à 100, il vaut mieux ne conclure l'inconnuë qu'égale à 9, & non-pas à 10, car par ce moyen on tient com-

pte de ce qu'on a negligé le ſecond terme.

Il paroît donc que quand l'homogene eſt le terme *dominant*, ainſi que l'appelle M. de Lagni, c'eſt à dire, lorſque c'eſt un grand nombre par rapport au coëficient, on peut negliger le ſecond terme, ſauf à y avoir égard d'ailleurs, & par là tout l'embarras de l'Equation eſt ôté, puiſque l'inconnuë n'y monte plus à differens degrés.

Ce ſera la même choſe en un ſens contraire ſi le coëfficient eſt le terme dominant par rapport à l'homogene. Il faudra negliger le quarré de l'inconnuë, qui ſera neceſſairement fort petit. Ainſi ſi le quarré de l'inconnuë plus le produit de cette même inconnuë par 144 eſt égal à 12, on voit que le quarré de l'inconnuë étant negligé, elle ſeroit égale à $\frac{12}{144}$, que $\frac{1}{12}$ eſt une trop grande valeur, parcequ'enfin le quarré negligé, quoique fort petit, eſt quelque choſe, que $\frac{1}{13}$ ſeroit auſſi une trop petite valeur, & par conſequent que celle qu'on cherche eſt une fraction irrationelle entre $\frac{1}{12}$ & $\frac{1}{13}$; car, comme nous l'avons dit dans l'Hiſt. de 1705 *, quand la haute puiſſance de l'Equation n'a point de coëfficient, ou de nombre qui la multiplie, ſi la racine eſt une fraction, ce ne peut être qu'une fraction irrationelle.

* 56 & 86

Tout cela s'applique de ſoi-même aux Equations du troiſiéme degré.

Pour juger lequel eſt le terme dominant, ou du coëfficient, ou de l'homogene, il ne ſuffit pas de voir lequel eſt le plus grand en lui-même, il faut voir lequel eſt le plus grand en ſon eſpece. Dans une équation du ſecond degré, où par conſequent tous les termes ſont des plans, l'homogene eſt un plan numerique, & le coëfficient n'eſt qu'un nombre lineaire, qui multipliant l'inconnuë fait un plan. Il faut donc, ſi l'homogene domine, qu'il ſoit plus grand comme nombre plan, que le coëfficient ne l'eſt comme nombre lineaire. Un nombre plan doit naturellement être conçû comme coupé en tranches de deux en deux chiffres, un nombre ſolide de trois en trois, au lieu qu'un nombre lineaire a autant de tranches que de chif-

fres ; & par conſequent l'homogene ne peut dominer qu'il n'ait non ſeulement plus de chiffres, mais plus de tranches que le coëfficient, & par la même raiſon le coëfficient pourroit dominer, quoiqu'il eût moins de chiffres que l'homogene. Ce ſera la même choſe dans le troiſiéme degré, l'homogene étant coupé de trois en trois.

S'il arrive que ni le coëfficient ni l'homogene ne dominent l'un ſur l'autre, on a les regles ordinaires. Cependant M. de Lagni ne laiſſe pas de rappeller encore ce cas-là à ſa methode.

Lorſqu'une des racines ou valeurs de l'Equation eſt trouvée, M. de Lagni donne une regle pour regler l'autre.

Nous ne le ſuivrons pas dans l'application qu'il fait de ſes principes au cas irreductible, qui a été juſqu'ici l'écueil de l'Algebre. On verra toute cette matiere tournée d'un autre côté que celui par où elle étoit enviſagée, & ſans doute l'eſperance de dompter le cas irreductible, inutilement attaqué depuis ſi long tems, ne pouvoit être permiſe, à moins que l'on ne prît une maniere toute nouvelle de l'attaquer.

GEOMETRIE.

SUR LES GRANDEURS.

QU'ON NOMME PLUS QU'INFINIES.

LOrſqu'une Grandeur eſt exprimée par une fraction, dont je ſuppoſe pour plus de facilité que le Numerateur ſoit conſtant ; ſi le Dénominateur a deux termes V. les M. p. 13.

dont le second soit variable, & en même tems retranché du premier, il peut arriver trois cas differens. Ou ce second terme du Dénominateur sera plus petit que le premier, comme il doit l'être naturellement, puisqu'il en est retranché, ou lui sera égal, ou il sera plus grand. Dans le premier cas, le Dénominateur sera positif & fini, & la Grandeur exprimée par la fraction sera pareillement finie; dans le second cas, le Dénominateur sera Zero, ou plûtôt infiniment petit; & comme un Diviseur infiniment petit d'une Grandeur finie quelconque doit donner un Quotient infiniment grand, la Grandeur exprimée par la fraction sera infiniment grande, puisqu'elle est le Quotient de la fraction, ou, ce qui est le même, de la division proposée. Dans le troisiéme cas, le Dénominateur est negatif & fini; mais si on conçoit les Grandeurs negatives comme moindres que Zero, ce Denominateur ou Diviseur plus petit que Zero, doit donner un Quotient plus grand que celui qu'a donné le Diviseur égal à Zero, & par consequent la Grandeur exprimée par la fraction sera *plus qu'infinie*. La variation de son Denominateur l'aura donc fait passer successivement par ces trois états ou *ordres* differents, fini, infini, plus qu'infini.

Je les appelle ordres differents pour mieux déterminer l'idée qu'il en faut prendre. Car ce qu'on nomme ici plus qu'infini, ce n'est pas une grandeur infinie plus grande qu'une autre infinie; les grandeurs infinies peuvent être plus grandes ou plus petites les unes que les autres, selon tous les rapports possibles des nombres, & cela sans sortir de l'ordre de l'infini, de même que les grandeurs finies ne sortent pas de l'ordre du fini pour varier entr'elles selon tous ces rapports. Mais ce qu'on entend par des grandeurs plus qu'infinies, ce sont des grandeurs qui étant sorties de l'ordre de l'infini doivent s'élever à un ordre superieur, comme font les grandeurs finies lorsqu'elles passent à l'ordre infini.

La nature de l'Hyperbole ordinaire considerée par rapport à ses Asimptotes, consiste en ce que le produit d'une Ordonnée

Ordonnée quelconque & de ſon Abſciſſe, eſt toûjours égal au quarré d'une grandeur conſtante. L'eſſence de cette équation, & ce qui la caracteriſe particulierement, eſt d'avoir d'un côté un produit de deux grandeurs indeterminées & variables, & de l'autre une puiſſance de la grandeur conſtante ſeule, & ſi l'on imagine que le quarré de l'une des deux grandeurs variables multiplié par l'autre ſoit égal au cube de la grandeur conſtante, on aura une équation du même genre, & par conſequent une Hiperbole, mais une Hiperbole d'un degré plus élevé que l'Hiperbole commune. Il eſt viſible qu'on peut pouſſer cette idée ſi loin qu'on voudra, & avoir une infinité d'Hiperboles de differens degrés.

On ſait que l'eſpace compris entre l'Hyperbole ordinaire & ſes Aſimptotes, quoiqu'il aille toûjours en décroiſſant, s'étend à l'infini, & de plus eſt infini, c'eſt à dire plus grand que tout eſpace fini & déterminable, car ces deux choſes ſont differentes, & un eſpace toûjours décroiſſant qui s'étendroit à l'infini, pourroit n'être que fini, ou ce qui eſt le même, égal à un eſpace fini. C'eſt ainſi que la ſomme de tous les termes de la progreſſion harmonique décroiſſante à l'infini, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, &c. eſt infinie, & que la ſomme de toute progreſſion geometrique infinie décroiſſante, telle que $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, &c. n'eſt que finie.

M. Wallis conſiderant l'Hiperbole ordinaire entre ſes Aſimptotes, & d'autres Hiperboles d'un degré plus élevé poſées entre les mêmes Aſimptotes, qui leur peuvent être communes, paroît avoir conçû trois eſpeces d'Hiperboles, dont l'une avoit ſon eſpace aſimptotique fini, la ſeconde infini, la troiſiéme plus qu'infini, ou s'il n'en a conçû que deux eſpeces, il a crû que, hors l'Hiperbole ordinaire, elles avoient toutes une partie de leur eſpace aſimptotique finie, & l'autre plus qu'infinie.

Mais M. Varignon, tout accoûtumé qu'il eſt aux merveilles de l'infini, refuſe celle-là. Il examine les Hiperboles de M. Wallis, & en tire les concluſions ſuivantes.

Une Hiperbole cubique, ſi l'on veut, ayant le même

ſommet & les mêmes Aſimptotes que l'Hiperbole ordinaire, s'approche toûjours plus qu'elle d'une de ces Aſimptotes, & s'éloigne davantage de l'autre. Du côté de l'Aſimptote dont elle s'approche davantage, ſon eſpace aſimptotique n'eſt pas infini comme celui de l'Hiperbole ordinaire, mais fini quoiqu'infiniment étendu; du côté de l'autre Aſimptote, ſon eſpace aſimptotique eſt infini, auſſi-bien que celui de l'Hiperbole ordinaire, & il eſt plus grand. En général toutes les Hiperboles, excepté l'Hiperbole ordinaire, ont leur eſpace aſimptotique fini d'un côté, & infini de l'autre, & M. Wallis ayant trouvé pour la partie infinie de cet eſpace une expreſſion poſitive, pour l'autre une expreſſion negative, a crû que cette ſeconde expreſſion donnoit une quantité plus qu'infinie, au lieu qu'elle ne repreſentoit preciſément que la partie finie de l'eſpace, priſe du côté oppoſé à la partie infinie.

C'eſt-là tout l'effet du ſigne *moins* dans les grandeurs negatives. Il renverſe leur poſition, & la rend contraire à celle des grandeurs poſitives. Du reſte les unes & les autres ſont également finies. Il faudroit pour le plus qu'infini de M. Wallis que les grandeurs negatives fuſſent au-deſſous de Zero, & moindres que rien, mais c'eſt-là une idée abſolument incomprehenſible. Il eſt fort naturel au contraire de concevoir qu'aprés qu'un dénominateur infiniment petit a rendu infinie une fraction telle que nous l'avons ſuppoſée d'abord, un dénominateur negatif la fait redevenir finie, mais contraire à ce qu'elle étoit auparavant, c'eſt-à-dire que ſi, par exemple, elle exprime une ligne ou un eſpace, cette ligne ou cet eſpace ont une poſition contraire à celles qu'ils avoient.

C'eſt ainſi qu'il faut entendre ce que M. Carré a fait voir pag. 20 dans ſon Livre du Calcul Integral, que l'Hiſt. de 1700* annonça. Il y démontre que tous les eſpaces aſimptotiques ſont ou finis, ou infinis, ou plus qu'infinis. Or nous ſçavons preſentement que le plus qu'infini n'eſt que fini, & même M. Carré en ſe ſervant du terme de plus qu'infini eut ſoin d'avertir qu'il n'employoit cette

* p. 100. & ſuiv.

expreſſion que parcequ'elle étoit devenuë commune, & promit qu'il y auroit quelque jour ſur cette matiere un éclairciſſement, qui eſt celui que M. Varignon vient de donner.

SUR LA METHODE

DES INFINIMENT PETITS

Pour les Maxima *&* Minima.

LE Livre de l'Analiſe des Infiniment petits a été fait d'une maniere ſi ſçavante & ſi ſublime qu'on y peut ſouvent deſirer des éclairciſſements, mais auſſi c'eſt tout ce qu'on y peut deſirer, & les Réponſes qu'on a faites aux differentes Objections propoſées contre les Methodes de ce Livre, n'ont jamais été que des éclairciſſemens, qui en ont confirmé les Principes. V. les M. p. 24,

Il eſt viſible que la Tangente quelconque d'une Courbe eſt l'hipotenuſe d'un triangle rectangle dont les deux autres côtés ſont la Soûtangente, & l'Appliquée menée à la Courbe par le point où la Tangente la touche. On ſuppoſe cette Appliquée perpendiculaire à l'axe. Tout ce qu'on cherche en cherchant une Tangente, ne peut être que ſa grandeur, & l'angle qu'elle fait ſur l'axe de la Courbe, & l'un & l'autre dépend du rapport qu'ont entr'eux les deux autres côtés du triangle dont elle eſt l'hipotenuſe. Si l'Appliquée & la Soûtangente ſont égales, la Tangente eſt la racine du double du quarré de l'une des deux, & elle fait avec l'axe un angle de 45 degrés. Plus la Soûtangente eſt grande par rapport à l'Appliquée, plus la Tangente eſt longue, & plus elle s'incline à l'axe, deſorte qu'à la fin elle lui devient infiniment inclinée, ou, ce qui eſt la même choſe, parallele, & en même temps infinie, lorſque la Soûtangente eſt infinie par rapport à l'Appliquée. Au contraire, ſi la Soûtangente eſt nulle par rap-

port à l'Appliquée, la Tangente n'est qu'égale à l'Appliquée, & elle est infiniment peu inclinée à l'axe, ou, ce qui est le même, perpendiculaire. Si l'on avoit donc pour tous les points d'une Courbe quelconque le rapport de la Soûtangente & de l'Appliquée, on auroit toutes les Tangentes des Courbes en général.

Par la Geometrie des Infiniment petits, on trouve que l'infiniment petit de l'Appliquée quelconque d'une Courbe est à l'infiniment petit de l'Abscisse qui lui répond, comme l'Appliquée est à la Soutangente; voilà donc ce rapport que l'on cherchoit, découvert par les principes qui sont particuliers à cette Géometrie, il n'y a plus qu'à tirer de l'Equation d'une Courbe quelconque ces deux infiniment petits, & à considerer comment ils sont entre eux. Quand ils sont égaux, la Tangente est inclinée de 45 degrés à l'axe, & l'on trouve, par exemple dans l'Hiperbole équilatere qu'ils ne peuvent jamais être égaux, que quand cette Courbe s'est étenduë à l'infini, d'où il suit que la Tangente qu'elle a, à cette extrémité infiniment éloignée du sommet, ou, ce qui est la même chose, son Asimptote est inclinée à l'axe de 45 degrés. Afin qu'une Tangente soit parallele ou perpendiculaire à l'axe, ou, ce qui est le même, parallele à l'un des deux axes *conjugués*, il faut que l'un des deux infiniment petits soit nul par rapport à l'autre, ce qui est une suite de ce que nous avons dit sur l'Appliquée & la Soûtangente.

Toutes les fois que la Tangente est parallele à l'un des deux axes conjugués, l'Appliquée qui lui répond est ou la plus grande ou la plus petite des Appliquées qui la précédent & qui la suivent, du moins dans une certaine étenduë de la Courbe. C'est ce qu'on appelle en Geometrie des *Maxima* & *Minima*. Pour déterminer les points où il s'en trouve dans quelque Courbe que ce soit, M. de l'Hôpital a avancé que dans ces points-là l'un des deux infiniment petits devenoit nul par rapport à l'autre, ou, ce qui est la même chose, que leur rapport étoit nul ou infini.

Ce rapport est toûjours exprimé par une fraction, dont par consequent ou le numerateur ou le dénominateur devenu nul détermine les plus grandes ou les plus petites Appliquées. C'est-là la regle de M. de l'Hôpital, il l'a donnée pour générale, & ne l'a appliquée qu'à un petit nombre d'exemples assés simples. D'autres exemples ausquels on l'a appliquée depuis ont fait naître des difficultés que le Livre de M. de l'Hôpital n'a pas indiquées expressement, & M. Guisnée a entrepris de les lever toutes ensemble. Par-là non-seulement il conserve à la Regle son universalité, mais il la met dans un plus grand jour, & la rend plus incontestable. Voici le précis de ses reflexions.

1°. On ne sçait si l'Appliquée que la Regle détermine est *un plus grand*, ou *un plus petit*. Cela ne se peut connoître qu'en decrivant la Courbe, ou en examinant la valeur d'une Appliquée prise arbitrairement avant ou aprés celle qu'on a trouvée.

2°. Si le numerateur de la fraction qui exprime le rapport des deux infiniment petits, étant supposé nul, ou égalé à Zero, la nouvelle équation qui en résulte a plusieurs racines réelles, il y aura autant de points de la Courbe qui donneront des plus grands, ou des plus petits, ce qui est évidemment possible, car une Courbe peut s'écarter de son axe jusqu'à un certain point, ensuite s'en rapprocher, aprés cela recommencer à s'en écarter, &c.

3°. Ce sera la même chose si le dénominateur étant égalé à Zero, l'équation a plusieurs racines réelles.

4°. M. de l'Hôpital n'a cherché dans tous les exemples qu'il apporte que des grands ou plus petits finis, & ce sont en effet les seuls dont il soit question ordinairement; Mais si l'on veut compter pour plus grands ou plus petits ceux qui seront infiniment petits, ou infiniment grands, la Regles les comprend aussi. Dans la Parabole, par exemple, le rapport de l'infiniment petit de l'Ordonnée à l'infiniment petit de l'Abscisse est le même que celui du Parametre au double de l'Ordonnée, d'où il suit que l'un

des infiniment petits ne peut être nul par rapport à l'autre, si le Parametre n'est nul par rapport au double de l'Ordonnée, ou si le double de l'Ordonnée n'est nul par rapport en Parametre. Or le Parametre qui est toûjours une ligne finie & constante ne peut être nul par rapport au double de l'Ordonnée, si l'Ordonnée n'est devenuë infiniment grande, ce qui ne peut arriver à moins que la Parabole qui s'écarte toûjours de son axe ne s'en soit écartée à l'infini, & par consequent ne se soit étenduë à l'infini. De même le double de l'Ordonnée ne peut être nul par rapport au Parametre, à moins que l'Ordonnée ne soit nulle, ce qui n'arrive qu'au point où la Parabole rencontre son axe ; c'est-à-dire enfin que cette Courbe a une Appliquée infiniment petite à son sommet, & une autre infiniment grande à son extrémité infiniment éloignée du sommet, mais qu'elle n'a nulle Appliquée finie plus grande ou plus petite que celles qui la précédent & la suivent. Comme l'infiniment petit de l'Ordonnée devenu nul par rapport à celui de l'Abscisse donne une Tangente parallele, & que celui de l'Abscisse devenu nul par rapport à l'autre donne une Tangente perpendiculaire, il s'ensuit qu'au sommet de la Parabole où son Ordonnée est infiniment petite, la Tangente est perpendiculaire, & qu'à l'extrêmité de cette Courbe où l'Ordonnée seroit infiniment grande, la Tangente seroit parallele.

5°. Si le numerateur & le dénominateur sont tels qu'ils puissent l'un & l'autre devenir nuls, & que les deux équations qui en résulteront déterminent differents points de la Courbe, elle aura dans tous ces points, en quelque nombre qu'ils soient, des plus grands ou des plus petits, les uns qui repondront à des Tangentes paralleles, & ce seront ceux que le numerateur aura donnés, les autres qui répondront à des Tangentes perpendiculaires, & ce seront ceux qu'aura donnés le dénominateur.

6°. Mais si le numerateur & le dénominateur étant égalés à Zero, les deux équations déterminent le même point de la Courbe, M. Guisnée fait voir qu'alors la Courbe a

deux *rameaux* qui se coupent en ce point-là, & que chacun y est oblique à l'axe commun. Cette obliquité suit necessairement du Sistêmes des Infiniment petits. Car toutes les fois que les deux infiniment petits de l'Ordonnée & de l'Abscisse ont un rapport fini l'un à l'autre, ils déterminent dans la Courbe au point qui leur répond une position oblique à l'égard de l'axe. Or deux grandeurs ont toûjours entr'elles un rapport fini tant qu'elles sont toutes deux du même genre, c'est à dire, ou infinies, ou finies, ou infiniment petites du premier genre, ou infiniment petites du second, &c. Donc les deux infiniment petits dont il s'agit qui étoient du premier genre étant devenus tous deux infiniment petits du second en même tems, ou à l'égard du même point de la Courbe, ont encore entr'eux un rapport fini, & par consequent déterminent une portion oblique de la Courbe sur l'axe en ce point-là. Donc ce cas ne doit point être compris dans la Regle des plus grands ou plus petits, & en effet l'Ordonnée qui répond à l'intersection des deux rameaux, appartenant en même tems à tous les deux, n'est un plus grand ou un plus petit ni pour l'un ni pour l'autre ; mais ce même cas doit être compris, & il l'est aussi, dans la Regle des Tangentes, qui doit donner toutes les positions de la Courbe à l'égard de l'axe en quelque point que ce soit. C'est-là le cas qui a pû faire le plus de difficulté sur les deux Regles en même tems, jusqu'à ce que l'on ait vû avec autant d'évidence qu'on le voit aujourd'hui, à laquelle des deux il se rapporte, & combien il entre naturellement, & necessairement dans le Sistême général.

Voilà quels sont les principaux éclaircissements que M. Guisnée donne sur la Regle des plus grands & plus petits, & il semble que tous les cas ayant été prévûs par la méthode des combinaisons, il ne puisse plus survenir aucune difficulté nouvelle ; car on ne peut pas compter pour des difficultés qui appartiendroient à la Geometrie de l'Infini, des embarras de calcul qui naîtroient de l'Algebre ordinaire, qu'il y faut necessairement appliquer.

SUR LE RAPPORT DES FORCES CENTRALES A LA PESANTEUR DES CORPS.

V. les M. p. 178.
* p. 84. & suiv.
** p. 80.
*** p. 73.
**** p. 22.

Les Histoires de 1700*, 1701**, 1703***, 1705***, ont exposé toute la Theorie de M. Varignon sur les Forces centrales, non seulement selon differentes vûes & differens tours Geometriques, mais encore selon toutes les hipotheses Phisiques, qui peuvent être employées à expliquer la Nature, ou même imaginées à plaisir. Mais cette Theorie si vaste ne roule que sur differentes forces centrales comparées entre elles, ou, ce qui revient au même, sur les rapports d'une même force contrale agissant inégalement en differens instants, & c'est à cet égard que le sujet est *épuisé*, ainsi que nous l'avons dit dans l'Hist. de 1703. & repeté dans celle de 1705. Il reste à sçavoir quelles sont absolument & en elles-mêmes ces forces dont on connoît les rapports, il reste à les pouvoir évaluer en livres, & pour cela, il faut les comparer à la pesanteur des Corps, que l'on suppose toûjours connuë de cette maniere. Aprés cette comparaison faite, le sujet est épuisé à tous égards.

Tout mouvement en ligne Courbe, par exemple, le mouvement elliptique d'une Planete autour du Soleil, peut être conçû comme composé de deux mouvemens plus simples, ou, ce qui revient au même, produit par deux causes. L'une imprime à la Planete un mouvement selon une ligne droite indéfinie, qui traverseroit le Tourbillon, comme une corde traverse un Cercle, & par consequent s'éloigneroit toûjours du Soleil depuis un certain point; l'autre cause qu'on peut imaginer comme inhérente au Soleil retire la Planete vers ce centre ou foyée, & agit par une ligne droite qui fait avec la premiere un angle quelconque. Il n'importe que cette seconde cause

soit

ſoit dans le Soleil même, ou que ce ſoit la matiere du Tourbillon qui repouſſe la Planette vers cet Aſtre, l'effet ne change point, & quoique la premiere idée ſoit la moins conforme à la Phiſique, nous la préfererons, parce que l'imagination la ſaiſit mieux.

La premiere des deux cauſes, d'où naît la compoſition, eſt la tendance naturelle & générale de tous les Corps à ſe mouvoir en ligne droite, dès qu'ils ſe meuvent; la ſeconde eſt la force centrale qui tire les Planetes vers le Soleil. Par conſequent la Planete à chaque inſtant infiniment petit de ſon cours tend en vertu de la premiere cauſe à décrire une certaine ligne droite infiniment petite, mais elle eſt en même tems tirée vers le Soleil par la force centrale qui agit ſelon une autre ligne droite, & n'agit dans cet inſtant que d'une quantité infiniment petite, & par conſequent le mouvement inſtantanée de la Planete eſt une Diagonale entre ces deux lignes droites infiniment petites. Et comme les deux cauſes qui font le mouvement compoſé agiſſent perpetuellement, & que la Planete qui en vertu de la premiere cauſe tend à continuer en ligne droite le mouvement du premier inſtant, en eſt détournée dans le ſecond par la force centrale, il s'enſuit que les deux Diagonales infiniment petites de ces deux inſtants, & par la même raiſon celles de tous les autres, ne ſont point poſées bout à bout en ligne droite, & par conſéquent forment une Courbe.

C'eſt la force centrale qui à chaque inſtant détourne le Corps de la ligne droite qu'il tendoit à décrire, & c'eſt uniquement à elle qu'il faut rapporter la deſcription de la Courbe; elle eſt donc d'autant plus grande & plus puiſſante que le Corps eſt plus difficile à détourner de la ligne droite, & qu'elle l'en détourne davantage, & cela à chaque inſtant qu'elle agit. Il eſt impoſſible d'imaginer d'autres principes d'où dépende la grandeur de la force centrale. Examinons-les tous deux.

1°. Un Corps eſt plus ou moins difficile à détourner de la ligne droite, ſoit par lui-même, ſoit par la direction

de ſon mouvement. Plus la quantité de mouvement d'un corps eſt grande, plus il eſt difficile de lui imprimer un mouvement different, cela eſt clair. Or la quantité de mouvement d'un corps eſt le produit de ſa maſſe ou peſanteur par ſa vîteſſe, & par conſequent plus un corps eſt peſant & ſe meut vîte, plus il eſt difficile à détourner de la ligne droite, & cela, *par lui-même.* Mais il faut encore conſiderer, que moins la direction de la force qui le détourne eſt contraire à la direction par laquelle il tend à ſe mouvoir en ligne droite, moins elle a de pouvoir pour l'en détourner, & pour lui faire décrire un arc de Courbe, ou, ce qui eſt la même choſe, moins elle agit avantageuſement, & par conſequent il faut qu'elle ſoit en elle-même d'autant plus grande. Car que l'on imagine la force centrale agiſſant par la même ligne droite que le corps tend à décrire, il eſt clair qu'elle n'a alors nul pouvoir pour lui faire décrire une Courbe, & que tout ſon effet eſt ou de hâter le mouvement du corps, ſi elle tire dans le même ſens dont il ſe meut, ou, ſi c'eſt le contraire, de le retarder, & même de l'arrêter. Ce n'eſt donc que quand ſa direction eſt entre ces deux termes opposés qu'elle peut détourner le Corps de ſa ligne droite, & moins ſa direction eſt éloignée de l'un ou de l'autre de ces termes, moins elle agit avantageuſement pour faire décrire la Courbe. Delà il ſuit auſſi que cette direction n'étant jamais plus éloignée des deux termes enſembles, que quand elle eſt perpendiculaire à la ligne droite par laquelle le corps tend naturellement à ſe mouvoir, c'eſt alors que la force centrale a le plus d'avantage.

3°. La Courbe que le Corps décrit étant ſuppoſée, il eſt manifeſte que la force centrale eſt d'autant plus grande, que le corps doit être plus détourné de la ligne droite pour être ramené ſur la circonference de cette Courbe, au point que l'on conſidere alors.

En raſſemblant tous les principes ſelon leſquels la force centrale augmente ou diminuë à chaque inſtant, on trouve la peſanteur du corps, ſa vîteſſe, la direction de la force

centrale comparée à la ligne droite par laquelle le corps tend à se mouvoir, la grandeur de l'écart que cette force fait faire au corps pour le remetre sur la Courbe. Il doit donc y avoir une Equation algebrique de la Force centrale, & de ces 4 principes dont elle dépend, & comme la pesanteur en est un, on aura par là le rapport de la force centrale à la pesanteur.

Mais pour avoir cette Equation, il faut que les idées metaphisiques que nous venons d'exposer soient exprimées geometriquement, & algebriquement. Il est bon qu'une Metaphisique génerale précede le calcul qui le dirige, & l'éclaire, mais ensuite c'est le calcul qui donne la précision & les détails.

La pesanteur ne s'exprime que par elle-même. C'est une force qu'on suppose connuë, & toûjours constante.

La vitesse d'un corps à un point quelconque de la Courbe qu'il décrit, s'exprime par la grandeur d'une ligne verticale d'où il auroit dû tomber, pour acquerir selon le Sistême ordinaire de l'acceleration une vitesse égale à celle qu'il a au point que l'on considere.

La ligne droite par laquelle le corps tend à continuer de se mouvoir à chaque instant, est la Tangente du point de la Courbe où il se trouve alors, & cette Tangente, selon la Geometrie des Infiniment petits, est l'arc infiniment petit de la Courbe décrit dans cet instant. Du centre où se rapporte la force centrale, & d'où nous supposons qu'elle agit, on tire aux deux extrémités de cet arc deux lignes droites ou *rayons*, ensuite un arc circulaire infiniment petit décrit de ce même centre détermine la difference infiniment petite de ces deux rayons & par là se forme un triangle rectangle dont l'hipotenuse est le petit arc de la Courbe, & les deux autres côtés, l'arc circulaire, & la difference des deux rayons. Cette difference est la direction par laquelle la force centrale agit alors, & l'arc de la Courbe est la direction selon laquelle le corps tend à continuer de se mouvoir en ligne droite dans l'instant suivant. Donc les deux directions sont d'autant

moins contraires que ces deux lignes infiniment petites qui les repreſentent ſont moins éloignées de concourir & de ſe confondre enſemble, & il eſt aiſé de voir qu'elles le ſont d'autant moins que l'arc de la Courbe eſt plus grand par rapport à l'arc circulaire qui détermine la difference des rayons, de ſorte que ſi cet arc circulaire devient nul, les deux directions ne ſont plus que la même. Donc le rapport de la direction de la force centrale à celle ſelon laquelle le corps tend à continüer de ſe mouvoir en ligne droite, s'exprime par le rapport du petit arc de la Courbe à cet arc circulaire.

Enfin l'écart que la force centrale fait faire au corps pour le remettre ou le tenir ſur la circonference de la Courbe, eſt d'autrant plus grand que la Courbe en ce point là eſt plus courbe. Or, comme nous l'avons expliqué dans l'Hiſtoire de 1704 *, une Courbe eſt d'autant plus courbe à un point quelconque que le rayon de ſa Dévelopée eſt alors plus petit, & par conſéquent plus le rayon de la Dévelopée eſt petit au point de la Courbe que l'on conſidere, plus la force centrale doit être grande à ce point-là.

* p. 78.

Il eſt manifeſte que de ces 4 principes, les deux premiers, qui ſont la peſanteur & la viteſſe, ſont incapables de devenir infiniment grands, ou infiniment petits, mais que les deux derniers le peuvent devenir, & les cas qui en réſultent meritent d'être examinés de plus près.

Puiſque la force centrale agit d'autant moins avantageuſement, pour faire décrire la Courbe, & par conſéquent a beſoin d'être d'autant plus grande, que ſa direction eſt moins éloignée de ſe confondre avec celle par laquelle le corps tend à continuer de ſe mouvoir en ligne droite, il s'enſuit que ſi ces deux directions ſont infiniment peu éloignées de ſe confondre, ou, ce qui eſt le même, ſe confondent, la force centrale a beſoin d'être infiniment grande par rapport à la peſanteur. Or les deux directions, telles que nous les avons expliquées cy-deſſus, ſe confondent, quand celle de la force centrale eſt une Tangente

de la Courbe, car le petit arc de la Courbe qui est la direction par laquelle le corps tend à continüer de se mouvoir en ligne droite, est alors aussi la direction de la force centrale. Donc la force centrale doit être infiniment grande pour agir. Et en effet, puisque l'on conçoit que sa fonction perpetuelle est de détourner le corps de la ligne droite, & de lui faire décrire la Courbe supposée, il faudroit qu'elle eût cette vertu à un degré infini, pour la pouvoir encore exercer lorsqu'elle ne combat plus du tout par sa direction celle du corps, & qu'au contraire elle le met elle-même sur la même ligne droite. Mais comme il est impossible qu'une force centrale soit réellement infinie, non plus que la pesanteur, ce cas-là est pareillement impossible. Aussi quelle que soit la Courbe que décrivent les Planetes, on voit que la force centrale qui les tire, qui doit être dans le Soleil, n'agit jamais par une Tangente de cette Courbe, puisque ni à un Cercle, ni à une Ellipse, ni à aucune autre Courbe de cette nature on ne peut tirer une Tangente d'un point pris au dedans de leur circonference. Que si par une espece de jeu geometrique, on imagine, comme a fait M. Varignon, que la force centrale réside dans un point pris au dehors de quelqu'une de ces Courbes, il s'ensuivra necessairement que quand le Corps sera arrivé à un point où la direction de la force centrale soit Tangente, cette force, parce qu'elle ne peut être infinie, ne pourra continuer davantage à faire mouvoir le corps sur la Courbe.

Ce principe qui donne lieu d'imaginer, du moins geometriquement, la force centrale comme infiniment grande par rapport à la pesanteur, ne donne pas lieu de l'imaginer dans le cas opposé comme infiniment petite dans le même sens, c'est-à-dire comme appliquée si avantageusement, que quoi qu'infiniment petite, elle pût encore agir. Les deux directions qui peuvent être infiniment peu contraires, ne peuvent pas être infiniment contraires, car quant à l'effet de la description de la Courbe, elles ne peuvent jamais l'être davantage que lorsqu'elles sont perpendiculaires

l'une à l'autre, ce qui n'est que fini, & a une mesure finie.

La Geometrie s'accorde ici, comme par tout ailleurs, avec la pure Theorie metaphisique. Les deux drrections sont représentées par le petit arc de la Courbe, & par le petit arc circulaire qui détermine la difference des deux rayons. Dans le cas où la force centrale devroit être infiniment grande, on voit le petit arc circulaire qui est nul par rapport au petit arc de la Courbe, ce qui, comme on sait, donne un infiniment grand. Mais jamais le petit arc de la Courbe ne peut devenir nul par rapport au petit arc circulaire; car quand le petit arc de la Courbe est le plus petit qu'il puisse être, il est égal au petit arc circulaire, & cela arrive perpetuellement dans le Cercle, d'où il suit qu'une force centrale qui en occupe le centre agit toûjours perpendiculairement, & avec tout l'avantage possible.

Il reste à examiner par rapport à l'infini le quatriéme principe. On en doit conclure que si la Courbe devient infiniment peu courbe, c'est-à-dire, qu'en deux ou plusieurs points consecutifs, elle ne soit qu'une ligne droite, la force centrale est infiniment petite, ou agit infiniment peu. En effet, puisque la Courbe n'est qu'une ligne droite dans cette étenduë supposée, la force centrale n'a pas besoin d'agir sur le corps pour la lui faire décrire, car il la décriroit de lui même par sa seule tendance naturelle à se mouvoir en ligne droite.

On pourroit peut-être penser ici que par la même raison la force centrale seroit infiniment petite, lorsque sa direction s'accorde avec la direction ou tendance naturelle du corps, mais il y a une trés-grande difference entre les deux cas. La description de la Courbe, en tant que Courbe, est l'effet de la force centrale. Quand cette force agit sur le corps de maniere à ne lui plus faire décrire une Courbe, il faudroit pour lui en faire décrire une malgré cela qu'elle eût une puissance, & une efficace infinie. Mais quand la Courbe étant toûjours décrite a une certaine partie qui n'est qu'une ligne droite, il n'est point be-

ſoin de force centrale pour la deſcription de cette partie.

Si la Courbe eſt infiniment courbe, la force centrale qui écarte donc infiniment le corps d'une ligne droite, eſt infiniment grande.

On ſait que quand une Courbe eſt infiniment peu courbe en quelques points, le rayon de ſa Dévelopée eſt infiniment grand, & qu'il eſt infiniment petit, quand elle eſt infiniment courbe, & il ſe trouve par le calcul que quand ce rayon eſt infiniment grand, ou infiniment petit, la force centrale devient infiniment petite ou infiniment grande ſelon les deux cas que nous venons de marquer. Mais comme il ne peut y avoir réellement dans la nature aucune force centrale infiniment grande ou infiniment petite, ne fuſt-ce que pendant quelques inſtants, il ne peut y avoir aucune Courbe décrite en vertu d'une force centrale, & qui ait le rayon de ſa Developée égal en quelqu'un de ſes points à Zero ou à l'Infini.

Pour mieux comprendre comment l'action de la force centrale varie dépendamment de la courbure de la Courbe, il faut obſerver encore plus préciſément en quoi conſiſte cette action, & cela répandra un nouveau jour ſur cette matiere.

L'action de la force centrale ne conſiſte qu'en ce qu'à chaque inſtant infiniment petit elle remet ſur la Courbe un corps, qui tendoit à continuer de ſe mouvoir en ligne droite ſelon la direction de l'arc infiniment petit de la Courbe qu'il avoit décrit pendant l'inſtant précédent, ou, ce qui eſt la même choſe, ſelon la Tengente de la Courbe à ce point. Si on prend donc une partie infiniment petite de cette Tangente qui réponde à l'inſtant ſuppoſé, & que de ſon extrêmité on tire ſur la Courbe une petite droite ſelon la direction de la force centrale, cette petite ligne ſera le chemin que la force centrale fait faire au corps, & tout l'effet de ſon action. Or il eſt aiſé de démontrer que cette petite ligne eſt un infiniment petit du ſecond *genre*, au lieu que la partie correſpondante de la Tangente en eſt un du premier, & par conſequent tout

l'espace parcouru en vertu de la force centrale dans un instant infiniment petit, n'est qu'un infiniment petit du second genre.

* p. 90. Nous l'avions déja prouvé dans l'Histoire de 1700. * mais nous en allons donner ici un exemple sensible.

La Pesanteur, par laquelle tombe en l'air un corps abandonné à lui-même, & qui n'a nulle autre cause de mouvement, est une force centrale, qui ne fait point décrire une Courbe, parce qu'elle n'est compliquée avec aucune autre cause. Toute la vitesse que le corps a acquise au bout d'un temps fini quelconque, lui vient uniquement de la pesanteur, & puisqu'au bout d'un tems fini cette vitesse est finie, il ne pourroit dans un tems infiniment petit recevoir de la même cause qu'une vitesse infiniment petite. Or la vitesse n'étant que le rapport de l'espace au tems, elle ne peut être infiniment petite si l'espace n'est infiniment petit par rapport au tems; donc le tems étant supposé un infiniment petit du premier genre, il faut pour une vitesse infiniment petite que l'espace parcouru soit un infiniment petit du second, donc dans un tems infiniment petit l'espace parcouru en vertu de la pesanteur, ou de toute autre force centrale est un infiniment petit du second genre.

Si l'on veut pousser cette idée plus loin, quoique sans necessité par rapport au sujet present, on verra qu'il s'en ensuit que dans un tems fini la vitesse causée par la pesanteur est infiniment plus grande qu'elle n'étoit, que par consequent il faut rendre l'espace parcouru infiniment plus grand, c'est-à-dire qu'il doit être un infiniment petit du premier genre, & qu'enfin la vitesse d'un tems fini s'exprime par le rapport d'un espace infiniment petit du premier genre, à un tems infiniment petit du même genre, ce qui effectivement donne une grandeur finie.

Puisque l'espace parcouru dans un tems infiniment petit en vertu d'une force centrale finie est un infiniment petit du second genre, il est évident que la force centrale

trale devroit être infinie, quand cet eſpace parcouru dans le même tems deviendroit par la nature de la Courbe que le corps décriroit un infiniment petit du premier genre. Or il eſt demontré qu'il le devient, ſoit quand la direction de la force centrale concourt avec la direction naturelle du corps, ſoit quand le rayon de la Dévelopée eſt égal à Zero. Pareillement, ce même eſpace devient nul, ou, ce qui eſt la même choſe, un infiniment petit du troiſiéme genre, quand le rayon de la Dévelopée eſt infini. Auſſi la force centrale eſt-elle alors nulle.

Il ne faut pas croire que quand ces ſuppoſitions d'infini ne peuvent avoir lieu dans des applications réelles, ce ſoient pour cela des chimeres Geometriques. Elles ſervent toujours à faire voir les bornes dans leſquelles le réel eſt compris, & juſqu'où il ne peut monter ou deſcendre.

De ce que nous avons dit de l'action de la force centrale, & de la tendance naturelle du corps à ſe mouvoir en ligne droite, il s'enſuit que chaque petit arc de la Courbe décrit par le corps dans un temps infiniment petit, eſt une ligne reſultante de la compoſition de deux mouvements, l'un par lequel le corps tend à continuër de ſe mouvoir en ligne droite ſelon la direction du petit arc précedent qu'il vient de décrire, l'autre par lequel la force centrale le rappelle ſur la Courbe en lui faiſant décrire un eſpace infiniment petit du ſecond genre. Or toute ligne reſultante de la compoſition de deux mouvements eſt droite, ſi ces deux mouvemens ſont *uniformes*, & courbe, ſi l'un des deux ne l'eſt pas, mais *acceleré* ou *retardé*. C'eſt par cette raiſon qu'un corps peſant pouſſé horiſontalement en l'air décrit toujours une Courbe, qui reſulte de ſon mouvement horiſontal uniforme, & de ſon mouvement vertical & acceleré, imprimé par la peſanteur. Un mouvement eſt neceſſairement acceleré, quand il eſt produit par une même cauſe toujours appliquée au corps ſur lequel elle agit, parce qu'à chaque inſtant elle augmente toujours l'effet de l'inſtant precedent.

C'est ainsi que toute force centrale est supposée agir, & par conséquent la petite ligne resultante du mouvement uniforme qu'auroit le corps libre, & de l'action de la force centrale, est courbe, quoi qu'infiniment petite. Cette petite ligne est un arc infiniment petit de la Courbe qui se décrit, voilà donc une Courbe dont toutes les parties infiniment petites sont elles-mêmes Courbes.

Ce cas est remarquable dans la Geometrie des Infiniment petits, où l'on regarde ordinairement toutes les Courbes comme des Poligones infinis dont tous les côtés sont des lignes droites infiniment petites. Il est vrai que dans la Theorie des Dévelopées on avoit déja consideré les Courbes comme composées d'arcs circulaires infiniment petits; mais ici la composition des mouvements peut fort naturellement être telle, que les petites lignes courbes qui en resulteront ne seront point des arcs circulaires, & enfin voilà une nouvelle necessité de regarder quelquefois les Courbes comme formées d'élements courbes.

V. l'Hist. de 1701. p. 80.

Cependant si l'on veut les considerer, même dans ce cas là, comme formées d'élements droits, M. Varignon en donne un moyen fort facile. Galilée a démontré que si un corps qui est tombé d'une certaine hauteur, se meut ensuite uniformément avec toute la vitesse acquise par sa chute, il parcourrera en un temps égal le double de l'espace qu'il avoit parcourru. Par-là, on change aisément en espaces parcourrus d'un mouvement uniforme tous ceux qui avoient été parcourus d'un mouvement acceleré, & si on prend le double du petit espace qui appartient à la force centrale, & que par son extrêmité on tire une Tangente à la Courbe, la Diagonale du parallelogramme formé par ces deux lignes sera une ligne droite, & en même temps un arc infiniment petit de la Courbe. De cette seconde supposition naissent toutes les mêmes consequences que de la premiere.

Toute cette Theorie posée, il en résulte cette proposition générale.

Que comme le produit d'un petit arc quelconque de la Courbe, & du double de la hauteur d'où le corps auroit dû tomber pour acquerir la viteſſe avec laquelle il décrit cet arc, eſt au produit du rayon de la Developée correſpondant, & de l'arc circulaire qui détermine la difference des deux rayons infiniment proches par leſquels agit la force centrale, ainſi cette force eſt à la peſanteur du corps.

Il ne faut plus qu'appliquer cette formule à telle Courbe qu'on voudra. Si par exemple, on l'applique au Cercle, & qu'on ſuppoſe la force cenrrale dans le centre, on trouvera que parce qu'un petit arc quelconque de cette Courbe eſt le même que l'arc circulaire de la propoſition générale, la force centrale eſt à la peſanteur, comme la hauteur déterminatrice de la viteſſe du corps, eſt à la moitié du rayon de la Dévelopée, qui eſt le même que le rayon du Cercle, & c'eſt-là la propoſition fondamentale de feu M. le Marquis de l'Hôpital pour les forces centrales conſiderées dans le Cercle.

Si un corps décrivoit une Spirale Logarithmique, au centre de laquelle concouruſſent tous les rayons de la force centrale, cette force ſeroit à la peſanteur, comme la hauteur déterminatrice de la viteſſe du corps à un point quelconque ſeroit à la moitié du rayon correſpondant. * V. l'Hiſt. de 1700. p. 81.

Dans la Parabole, ſuppoſé que ſon foyer ſoit le centre où ſe rapporte la force centrale, cette force eſt à la peſanteur comme la hauteur déterminatrice de la viteſſe eſt au rayon correſpondant.

Il faut remarquer que l'on peut faire ici deux ſuppoſitions differentes, l'une par laquelle les Ordonnées naturelles de la Courbe, c'eſt-à-dire celles que l'on y conſidere ordinairement, ou qui entrent dans ſon Equation, ſeront les mêmes que les rayons de la force centrale, l'autre, par laquelle ce ſeront differentes lignes. Les exemples du Cercle & de la Spirale Logarithmique ſont dans le premier cas, celui de la Parabole dans le ſecond, mais

tous les deux sont également compris dans la formule générale ; seulement le second demande un peu plus de Geometrie & de calcul.

Si on veut que les rayons de la force centrale au lieu de concourir tous dans un même point à une certaine distance de la Courbe, ne concourent qu'à une distance infinie, c'est-à-dire soient paralleles, le changement qui naît de cette supposition dans les Courbes que l'on considere se presente d'abord. Le Parallelisme n'est qu'un cas particulier du concours des Lignes.

On pourroit même supposer, comme a fait M. Varignon dans l'Histoire de 1703* que plusieurs forces centrales agiroient ensemble sur un même corps, & que du mélange de leurs differentes actions resulteroit une certaine Courbe. M. Varignon étend sans peine sa régle générale à cette hypothese. Il donne aussi le moyen de comparer les forces centrales, & les pesanteurs de differens Corps mûs sur une même, ou sur differentes Courbes, ou d'un mêm Corps mû sur des Courbes differentes.

* p. 73 & suiv.

Enfin pour ne laisser rien échaper à sa Methode, il fait voir comment on en peut tirer, outre le rapport de la force centrale à la pesanteur, celui de cette force à elle même en differens points de la Courbe, ou, ce qui est la même chose, celui de l'inegalité de son action, qu'il avoit donné en 1700 indépendamment de la pesanteur.

SUR LES ISOPERIMETRES.

V. les M. p. 235.
* p. 146. & 147.

VOici le Problême qui causa entre deux illustres Freres cette espece de procès, dont on a parlé dans l'Histoire de 1705*. M. Bernoulli, maintenant Professeur en Mathematique à Basle, envoya à l'Academie au mois de Janvier 1701, un Paquet cacheté, intitulé, *Methodes pour la Solution du Problême des Isoperimetres*, & recommanda en même temps qu'il ne fût ouvert qu'après que feu

M. Bernoulli ſon frere auroit publié ſon Analiſe de ce même Problême. Comme il y eut des difficultés ſur cette publication, & qu'enſuite M. Bernoulli l'aîné eſt mort, le paquet du Cadet, n'a été ouvert par l'Academie que le 17 Avril 1706, & on y a trouvé la Solution que l'on imprime preſentement. Il y étoit marqué qu'elle avoit été communiquée à M. Leibnits dès le mois de Juin 1698.

Tout le monde ſçait qu'une circonference circulaire renferme le plus grand eſpace *iſoperimetre* poſſible, c'eſt-à-dire le plus grand eſpace qui puiſſe être renfermé dans une circonference de la même longueur.

Cette Propoſition peut encore être exprimée de cette maniere; La ſomme des Ordonnées d'un demi Cercle remplit un plus grand eſpace que ne feroient les Ordonnées de toute autre Courbe égale en longueur à la demi circonference circulaire, & terminée aux deux extremités du même diametre.

Mais ſi l'on demandoit, Quelle eſt la Courbe dont les Ordonnées, non pas ſimples, comme celles du Cercle, mais élevées à une puiſſance quelconque déterminée, par exemple, au Quarré, rempliroient un plus grand eſpace que ne feroient les Ordonnées de toute autre Courbe iſoperimetre, & décrite ſur le même axe, qui feroient élevées à la même puiſſance, on voit que le Problême deviendroit beaucoup plus general, & en même temps quiconque le voudra taſter ſentira combien il ſera devenu difficile. On entend aſſés que ces Ordonnées élevées à une puiſſance quelconque ſeront repreſentées par des lignes droites qui auront entre elles les rapports de cette puiſſance. Si par exemple, la puiſſance que l'on a déterminée eſt le Quarré, il faut trouver une Courbe dont les Appliquées qui étoient, ſi l'on veut, comme 1, 3, 6, 10, &c. étant devenuës entre elles comme 1, 9, 36, 100, &c, rempliſſent un plus grand eſpace que les Appliquées de toute autre Courbe iſoperimetre qui auroient été par exemple, comme 1, 5, 12, 22, &c. & feroient devenuës comme 1, 25, 144, 484, &c. Il eſt évident que les Or-

données d'une Courbe élevées à quelque puiſſance forment une nouvelle Courbe.

C'eſt là le Problême que feu M. Bernoulli propoſa en 1697. M. Bernoulli ſon frere qui étoit particulierement défié, non ſeulement le réſolut, mais le réſolut après l'avoir rendu encore plus general, & par conſequent plus difficile. Il changea les puiſſances des Appliquées en ce qu'il appelle *fonctions*. Les fonctions d'une Appliquée comprennent, outre toutes les puiſſances, ſoit parfaites, ſoit imparfaites, où l'on peut l'élever, toutes les multiplications ou diviſions que l'on en peut faire par des grandeurs conſtantes, ou par les Abciſſes élevées auſſi à telle puiſſance qu'on voudra ; de ſorte, par exemple, que le produit d'une Appliquée élevée au cube & d'une grandeur conſtante, diviſé par le quarré de l'Abſciſſe, eſt une fonction de l'Appliquée. Les puiſſances ne ſont qu'une eſpece dont fonction eſt le genre.

Puiſque dans la Geometrie des Infiniment petits les puiſſances ſe *differentient*, les fonctions ſe differentient auſſi en general. M. Bernoulli trouve par un tour de Geometrie fort délicat & fort ingenieux, qu'afin qu'une Courbe ſoit telle que les fonctions de ſes Appliquées rempliſſent un plus grand eſpace que les fonctions pareilles des Appliquées de toute autre Courbe iſoperimetre, il faut que dans tous ſes points le Sinus de ſa courbure ait une raiſon conſtante à la fonction differentiée de l'Appliquée qui lui répond, mais differentiée avec une certaine modification que M. Bernoulli enſeigne. On ſçait que le Sinus de la courbure d'une Courbe dans un point quelconque eſt le Sinus de l'angle aigu infiniment petit, complément de l'obtus que font entre eux en ce point là deux côtés contigus du Poligone infini.

M. Bernoulli donne donc en general, & pour toutes les fonctions imaginables d'Appliquées l'Equation de la Courbe que l'on cherchera. Si l'on veut que la fonction des Appliquées ne ſoit que leur premiere puiſſance, c'eſt à dire les Appliquées mêmes, l'Equation generale ainſi

ſpecifiée donne auſſitôt le Cercle, dont effectivement les Appliquées forment le plus grand eſpace poſſible.

Pour élever encore le Problême à une plus grande univerſalité, M. Bernouilli ſuppoſe qu'au lieu des fonctions des Appliquées il s'agiſſe des fonctions des Arcs, & qu'on cherche une Courbe dont les Arcs ſoient tels que des lignes droites qui repreſenteroient une certaine fonction déterminée de ces Arcs rempliroient un plus grand eſpace que d'autres lignes droites qui repreſenteroient la même fonction des arcs de toute autre Courbe iſoperimetre. La methode de M. Bernoulli va même encore plus loin, & elle permet que l'on combine comme on voudra les fonctions des Appliquées avec celles des Arcs, ſoit par addition, ſoit par ſouſtraction, &c. Il ſemble même qu'elle doit permettre, quoiqu'il ne le marque pas, que l'on donne une certaine fonction aux Appliquées, & une autre fonction differente aux Arcs. Quoiqu'il en ſoit, M. Bernoulli dans ſes differentes ſuppoſitions trouve toûjours que le Sinus de la courbure de la Courbe cherchée doit être en raiſon conſtante avec une certaine quantité, qui eſt differente ſelon les hipotheſes.

Indépendamment d'une auſſi fine Geometrie que celle qu'employe M. Bernoulli, on peut prendre quelque idée de ſa Theorie, & s'en faire une ébauche ſuperficielle & générale, qui ne laiſſera peut-être pas de plaire à l'Eſprit. Une ligne étant donnée pour baſe d'un triangle, & de plus un fil d'une certaine longueur qui étant attaché aux deux extrêmitez de cette baſe doive faire les deux autres côtés du triangle, il eſt viſible que le triangle ne pourra jamais avoir une plus grande aire, ou comprendre un plus grand eſpace, que quand le milieu du fil formera l'angle du ſommet, ou, ce qui eſt la même choſe, quand les deux moitiés égales du fil formeront les deux côtés du triangle; & par conſequent feront deux angles égaux ſur la baſe. Comme cela ne dépend en aucune maniere du rapport que la longueur du fil peut avoir à celle de la baſe, cette proprieté ſubſiſtera encore, lors

même que la longueur du fil ne ſurpaſſera celle de la baſe que d'une quantité infiniment petite, c'eſt-à-dire, lorſque l'angle du ſommet ſera de 180. degrés, moins les deux angles de la baſe qui ſeront infiniment petits, & il faudra afin que le triangle comprenne le plus grand eſpace poſſible dans cette ſuppoſition, que les deux angles infiniment petits de la baſe ſoient égaux. Donc une Courbe quelconque étant diviſée en arcs égaux infiniment petits, & chaque arc étant conçû avec ſa ſoutendante, ou baſe ſur les extrêmités de laquelle il fait deux angles, il faut, afin que ces petits eſpaces triangulaires ſoient les plus grands qu'il ſe puiſſe, que les deux angles de chaque arc ſur ſa baſe ſoient égaux, &, puiſque tous les arcs ont été pris égaux, que tous ces angles ſur toutes ces baſes infinies en nombre ſoient égaux entre eux. Or de cette égalité s'enſuivra neceſſairement celle de tous les angles que feront entre eux les côtés du Poligone infini, ou, ce qui revient au même, celles des angles de la courbure, & voilà pourquoi une courbure uniforme & toûjours égale eſt liée avec la proprieté de comprendre le plus grand eſpace poſſible. Il eſt manifeſte que le Cercle étant conçû comme un Poligone d'une infinité de côtés égaux, ils font tous entre eux les mêmes angles. Toute autre Courbe diviſée de la même façon, aura ſes côtés infiniment petits tellement poſés entre eux qu'ils feront des angles differens, & ſi l'on veut remonter juſqu'à la premiere ſource, on trouvera que chaque petit arc égal étant conçû avec une baſe, il ne fera pas ſur chaque extrêmité un angle égal.

De ce que, comme nous venons de le dire, l'uniformité de courbure eſt liée avec la proprieté de comprendre le plus grand eſpace poſſible, on voit en général que quand ce ne ſont plus, ainſi que dans le Cercle, de ſimples Appliquées qui doivent former ce plus grand eſpace, mais des puiſſances ou fonctions d'Appliquées, l'uniformité de courbure requiſe ne doit plus conſiſter dans une parfaite égalité, telle que celle du Cercle, mais dans quelque

quelque rapport conſtant de la courbure aux nouvelles grandeurs dont on fait dépendre le plus grand eſpace. Ainſi la recherche de M. Bernoulli ſe reduit à rendre générale la propriété du Cercle, & à marquer les modifications qu'elle doit recevoir dans des cas plus compliqués. Une démonſtration geometrique en eſt plus parfaite & plus agréable à l'Eſprit, quand elle va ſaiſir le veritable principe de la queſtion, & s'attache, pour ainſi dire, à un tronc, & non pas à quelque branche.

Comme M. Bernoulli a bien ſenti que ſa Methode étoit fort déliée, il la confirme par un autre Problême qui ſe réduit aux mêmes termes, & doit donner la même ſolution. C'eſt celui de la courbure que doit prendre un Linge attaché par ſes deux extrêmités, & chargé d'une liqueur quelconque. Il aura toûjours la même longueur, & ſera iſoperimetre, quelque courbure qu'il prenne. D'ailleurs cette courbure doit être telle que toutes les *gravitations* des parties de la liqueur priſes emſemble faſſent la plus grande ſomme qu'il ſe puiſſe. Ce que M. Bernoulli appelle gravitation de chaque colonne de liqueur, c'eſt ſon action compoſée & de ſon poids, & de ſa diſtance au point fixe, & de ſon plus ou moins d'obliquité à la Courbe. On peut ſuppoſer la liqueur compoſée de differents lits ou couches dont la peſanteur ſpecifique ſera inégale ſelon tels rapports qu'on voudra, & par là on donnera aux gravitations des colonnes le même rapport qu'auroient des Appliquées de Courbes élevées à une certaine fonction. Voilà donc une Courbe qui doit donner une plus grande ſomme que toute autre Courbe iſoperimetre, & qui eſt précisément dans les mêmes termes que celle du premier Problême. M. Bernoulli qui avoit trouvé il y a long-temps la Courbe du linge chargé de liqueur, fait voir fort clairement que ſon Equation retombe dans celle qu'il donne ici pour les Courbes iſoperimetres en général. Nous avons obſervé dans l'Hiſt. de 1705.* que cette Courbe du Linge eſt encore la même que l'Elaſtique de feu M. Bernoulli.

* p 144.

Il eſt aiſé de juger par toutes ces recherches juſqu'à quelle ſubtilité & à quelle fineſſe la Geometrie a été portée depuis un temps, & quelle eſt la Methode à laquelle on doit de ſi grands progrés.

SUR LES ROULETTES

EN GENERAL.

V. les M. p. 340.

VErs le milieu du Siécle paſſé, les Geometres ſe mirent à examiner à l'envi les uns des autres la Courbe que décriroit un point quelconque de la circonference d'un Cercle, qui comme une Roüe de carroſſe avanceroit ſur un plan en ligne droite, & dans le même temps tourneroit ſur lui-même. Cette Courbe fut appellée *Roulette* ou *Cycloïde*. Le Cercle eſt appellé *Generateur*, & la ligne droite ſur laquelle il ſe meut *Baſe* de la Roulette. Il eſt viſible que puiſque par la géneration de la Roulette ou Cycloïde le Cercle générateur applique ſucceſſivement tous ſes points ſur la baſe, elle eſt égale à ſa circonference, ou, ce qui revient au même, que dans le mouvement composé du droit & du circulaire par lequel ſe forme la Cycloïde, le droit & le circulaire ſont égaux.

Comme l'Eſprit qui regne dans la Geometrie moderne va toûjours à rendre les Theories plus générales, on a conſideré que le Cercle generateur au lieu de ſe mouvoir ſur une ligne droite pouvoit ſe mouvoir ſur la circonference d'un autre Cercle, ſoit égal, ſoit inégal, & en ce cas on appelle *Epicycloïde* la Courbe que décrit un point quelconque de ſa circonference. M. de la Hire a imprimé en 1694. un Traité des Epicycloïdes par rapport aux Mechaniques.

Mais pourquoi s'aſſujettir à ne prendre le point *décrivant* que ſur la circonference d'un Cercle? on peut le prendre par tout où l'on voudra ſur le plan du Cercle gé-

nérateur, ſoit au dedans, ſoit au dehors de ſa circonference. Si on le prend au dedans, & que la baſe ſoit une ligne droite, la Roulette ſera *allongée*, c'eſt-à-dire, que dans ſa formation le mouvement droit l'emportera ſur le circulaire; ſi on le prend au dehors, elle ſera *accourcie*, parce que le mouvement circulaire l'emportera ſur le droit. Et pour s'en convaincre, il n'y a qu'à conſiderer que l'on ne peut prendre le point décrivant *plus au dedans* du Cercle générateur qu'en prenant ſon centre pour ce point, ni *plus au dehors*, qu'en le prenant infiniment loin du Cercle générateur. Or dans le premier cas, il eſt viſible que la Roulette n'eſt qu'une ligne droite, & dans le ſecond, ce n'eſt qu'un Cercle concentrique au générateur, ou plutoſt ayant pour centre le générateur lui-même, qui ne doit plus paſſer que pour un point. Donc le point décrivant étant pris au centre du Cercle générateur, le mouvement qui forme la Roullette n'eſt que droit; depuis le centre juſqu'à la circonference, il l'emporte toujours ſur le circulaire, & ſon avantage va toujours en diminuant; à la circonference, il eſt égal au circulaire, au-delà de la circonference, le circulaire l'emporte, & ſon avantage diminuë toujours depuis ce terme.

Pourquoi encore ne faire rouler que des Cercles ſur des Cercles ou ſur des lignes droites? il n'y a point de Courbe qui priſe pour génératrice, ne puiſſe rouler, c'eſt à dire, appliquer ſucceſſivement tous ſes points ſur une autre Courbe immobile priſe pour baſe, & un point décrivant quelconque déterminé ſur la circonference ou ſur le plan de la génératrice formera par ſon mouvement une nouvelle Courbe, qui ſera une Roulette, car c'eſt le nom général qu'on donne à toutes les Courbes formées de cette maniere.

Il y a plus. Sous l'idée générale de lignes Courbes, on peut comprendre les lignes droites, en ſuppoſant qu'elles ſoient des circonferences de Cercles dont le rayon eſt infini, & cette hypotheſe qui eſt peut-être une des plus dures, & des plus difficiles à digerer de toutes celles qui

ſe tirent de l'Infini, eſt cependant neceſſaire en pluſieurs occaſions, admiſe par tous les grands Geometres, & parfaitement exempte d'erreur. On peut donc imaginer une Courbe quelconque qui roule ſur la circonference d'un Cercle infini, c'eſt-a-dire ſur une ligne droite, ou reciproquement la circonference d'un Cercle infini qui roule ſur une Courbe quelconque. Dans ce dernier cas, il eſt évident qu'une ligne droite ne peut rouler autrement ſur une Courbe, qu'en s'y appliquant de maniere qu'elle en ſoit toujours la Tangente en quelqu'un de ſes points. La baſe Courbe eſt alors la même choſe que ce qu'on appelle une *Dévelopée* *, & la Roulette formée par un point décrivant quelconque pris ſur la ligne droite génératrice, eſt la Courbe née du dévelopement de la baſe. Ainſi la Theorie des Dévelopées fait partie de celle des Roulettes élevée à ſa plus grande generalité.

* V. l'Hiſt. de 1701. p. 81.

C'eſt dans cette generalité infinie que M. de la Hire entreprend d'examiner les Roulettes. Pour cela, il prend l'hipotheſe des Infiniment petits. Il ſuppoſe un point décrivant pris dans le plan de la ligne generatrice. Un côté Infiniment petit de la generatrice conſiderée comme un Poligone infini s'applique à un autre côté infiniment petit de la baſe, c'eſt-à-dire, que la génératrice & la baſe ſe touchent, & alors le point décrivant a neceſſairement une certaine poſition, & comme il appartient toujours à la Roulette, voilà le premier inſtant de ſa formation. Enſuite les deux côtés infiniment petits tant de la generatrice que de la baſe, qui ſuivent immediatement les deux premiers, viennent par le mouvement que l'on ſuppoſe dans la generatrice à s'appliquer l'un ſur l'autre, c'eſt à dire que la generatrice vient à toucher la baſe en un autre point, ce qui détermine le mouvement du point décrivant, ſelon qu'il eſt poſé ſur la generatrice, & par conſequent c'eſt-là le ſecond inſtant de la generation de la Roulette, qui continuë à ſe former par de ſemblables mouvements. Nous ne pouvons entrer ici dans le détail geometrique, il conſiſte en la conſideration de certains Trian-

gles qui se meuvent avec la generatrice, & suivent tous les pas infiniment petits qu'elle fait sur la base. Ils ont necessairement des angles infiniment petits, & ne peuvent être connus que par les regles particulieres à cette hipothese. Cette voye conduit M. de la Hire à une méthode générale & très simple pour les Tangentes de toutes les Roulettes possibles. Que d'un point où la generatrice touche la base on tire au point décrivant une ligne droite, & sur cette ligne une perpendiculaire par le point décrivant, cette perpendiculaire est Tangente de la Roulette en ce point. En effet, on peut concevoir un point quelconque où la generatrice touche la base comme centre d'un cercle, dont le rayon est la ligne tirée de ce point au point décrivant, & alors l'arc circulaire infiniment petit que décrit ce rayon par son mouvement d'un instant est un arc de la Roulette. Or la Tangente d'un arc de cercle est perpendiculaire au rayon qui s'y termine.

Pour sçavoir si la Roulette est concave ou convexe vers un point quelconque déterminé où la generatrice touche la base, M. de la Hire a besoin de tracer un Cercle qu'il détermine ainsi. La generatrice & la base sont connües, & par consequent ou connoît le rayon de la Dévelopée de chacune d'elles. Comme la somme de ces deux rayons est à celui de la génératrice, ainsi celui de la base est à une quatriéme ligne, qu'il faut prendre pour diametre du cercle dont il s'agit. Si le point décrivant de la Roulette se trouve au dedans de ce cercle, elle est convexe vers le point déterminé de la base, concave, si ce même point décrivant est hors le cercle, & ni convexe ni concave, s'il est sur la circonference, c'est-à-dire qu'elle a alors un point d'*inflexion*, où de concave qu'elle étoit vers un certain côté elle devient convexe vers ce même côté, ou reciproquement, & n'est ni concave ni convexe dans ce passage, mais ligne droite.

Le cercle déterminateur de la concavité & de la convexité de la Roulette, ou simplement *déterminateur*, change

toûjours, puiſqu'il dépend des Rayons des Dévelopées de la generatrice & de la baſe, & que le rayon de la Dévelopée d'une Courbe varie toûjours pour chacun de ſes points, ſi ce n'eſt dans le Cercle, où il eſt conſtant, & le rayon même du Cercle. Mais le point d'attouchement de la generatrice & de la baſe, ou, ce qui eſt la même choſe, la poſition de la generatrice ſur la baſe étant la même, quel que ſoit le point décrivant pris ſur le plan de la generatrice, on eſt ſûr que s'il ſe trouve alors ſur la circonference du Cercle déterminateur, la Roulette a une inflexion en ce même point. Ainſi la circonference de ce cercle comprend tous les points d'inflexion de toutes les differentes Roulettes poſſibles décrites par differents points du plan de la generatrice, pourvû qu'elles ayent des points d'inflexion, & ſi elles n'en ont point, jamais leurs points décrivants ne ſe trouveront ſur cette circonference; il faut toûjours entendre que tout cela n'eſt que pour une poſition déterminée de la même generatrice ſur la même baſe, les points décrivants étant differens.

Par l'analogie qui donne le Cercle déterminateur, on voit que ſi la baſe eſt une ligne droite, dont par conſequent le rayon de la Dévelopée eſt infini, le rayon de la Dévelopée de la génératrice, quelle qu'elle ſoit, eſt égal au diametre du cercle déterminateur. Donc ſi on ſuppoſe encore que la generatrice ſoit un cercle, le rayon du cercle generateur ſera le diametre du déterminateur; & cela dans toutes les poſitions du cercle generateur ſur la baſe, puiſqu'il a toûjours le même rayon. Si l'on ajoûte donc pour derniere ſuppoſition que le point décrivant ſoit le centre du cercle generateur, le point décrivant ſe trouvera toûjours ſur la circonference du déterminateur, & par conſequent la Roulette aura une inflexion perpetuelle; mais qu'eſt-ce qu'une inflexion perpetuelle? car il paroît d'abord difficile de s'en faire une idée, puiſque l'inflexion n'eſt que le paſſage de la concavité d'une Courbe à la convexité, ou reciproquement. Voici ce que

c'eſt. Selon le Siſtême des Infiniment petits, une Courbe qui de concave devient convexe, ou reciproquement, a dans ce paſſage deux de ſes côtés infiniment petits poſés bout à bout en ligne droite, & par conſéquent avoir une inflexion perpetuelle, c'eſt avoir tous ſes côtés infiniment petits poſés bout à bout en ligne doite; ou, ce qui eſt la même choſe, n'être qu'une ligne droite; d'où il ſuit que dans le cas propoſé la Roulette en ſeroit une, & non plus une Courbe. Et en effet, il eſt évident ſans aucune geometrie que ſi un cercle roule ſur une ligne droite, ſon centre trace une ligne droite parallele à la baſe. L'art ne ſeroit pas neceſſaire pour ne découvrir que des cas ſi ſimples, mais il l'eſt pour les renfermer dans une même Regle avec les plus compliqués, & quand on voit qu'étant dévelopée elle produit ces cas ſimples & connus, c'eſt un ſurcroît d'aſſurance qu'elle produira auſſi les autres.

L'inflexion perpetuelle n'eſt pas bornée au cas que nous venons de voir, & il n'eſt pas neceſſaire que le rayon de la Dévelopée de la generatrice ſoit toûjours conſtant. Car puiſque par la Regle de M. de la Hire, la baſe de la Roulette étant droite, le rayon de la Developée de la generatrice eſt égal au diametre du cercle déterminateur, il s'enſuit que quoique le rayon de la Dévelopée de la generatrice varie à chaque inſtant, l'inflexion ne laiſſera pas d'être perpetuelle, ſi le point décrivant ſuit toûjours la circonference du cercle variable dont ce rayon ſera le diametre. Or c'eſt ce qui arrive, lorſqu'une Spirale Logarithmique roule ſur une ligne droite, & que le centre de cette Spirale eſt le point décrivant. Cette Courbe eſt telle que le rayon de ſa Dévelopée à un point quelconque étant pris pour diametre d'un Cercle, ſon Ordonnée correſpondante, c'eſt-à-dire la ligne tirée du centre au point correſpondant de la courbe, eſt toûjours une corde de ce cercle. Donc à quelque point que ce ſoit de la Spirale Logarithmique, ſon centre ſe trouve toûjours ſur la circonference du cercle dont le rayon de ſa Dévelo-

pée en ce point là est le diametre. Donc ce centre étant le point décrivant, la Roulette formée par le mouvement de la Spirale Logarithmique sur une base droite, aura une inflexion perpetuelle, ou ne sera qu'une ligne droite. Cette ligne droite ou Roulette ne sera pas parallele à la base, mais inclinée, ce qui suit de la variation perpetuelle du Rayon de la Developée. On peut remarquer ici que cette Roulette est un des côtés d'un Triangle qui a autant de bases paralleles que la Spirale Logarithmique a d'Ordonnées concourantes à son centre. Or parce que la nature de la Spirale Logarithmique est que toutes ses Ordonnées fassent toûjours le même angle avec la circonference de cette Courbe, on peut imaginer que c'est un Triangle qui avoit une infinité de bases paralleles que l'on a renduës toutes concourantes en un seul point, sans changer les angles toûjours égaux qu'elles faisoient par leur autre extrémité sur un même côté, qui par là devient la circonference de la Spirale Logarithmique. Par consequent la Roulette formée, comme nous l'avons dit, par cette Spirale, étant un côté de Triangle, tel que nous l'avons representé, elle est ce même côté de triangle, qui a pû se changer en Spirale Logarithmique. En un mot, c'est la Spirale Logarithmique déroulée.

Une Roulette ne sera encore qu'une ligne droite, quand un cercle générateur sera toujours égal au déterminateur, & que le point décrivant sera pris sur la circonference du générateur ; cela est évident. Mais le cas où le cercle générateur peut être égal au déterminateur ne saute pas d'abord aux yeux, car il faut pour cela, suivant la regle de M. de la Hire, que le rayon du générateur soit la moitié du diametre du déterminateur, & que par conséquent le rayon du cercle générateur plus le rayon de la Dévelopée de la Base quelconque que l'on prendra, ne soit que la moitié de ce même rayon de la Dévelopée de la base. Or c'est ce qui ne se peut absolument dans l'hipothese que nous avons suivie jusqu'ici & qui est la plus naturelle. Nous avons supposé que la convexité de la

génératrice

generatice rouloit toûjours sur la convexité de la base, & qu'alors dans le calcul algebrique les deux rayons de leur Dévelopées avoient chacun le signe *plus*, auquel cas il est totalement impossible que la somme des deux soit égale à la moitié de l'un des deux. Mais si on suppose que la convexité de la géneratrice roule sur la concavité de la base, alors par les regles de l'Algebre le rayon de la Dévelopée de la base est affecté du signe *moins*, parce que d'un certain côté déterminé où il étoit il passe au côté opposé, & la somme des deux rayons dont l'un est affecté de moins, peut être moindre qu'un seul des deux. Si l'on prend donc pour base un cercle dont le rayon soit double de celui du cercle génerateur, & que le génerateur roule dans la concavité de celui qui sert de base, on trouvera que la somme des deux rayons ne sera que la moitié de celui de la base, & que la Roulette sera une ligne droite.

Dans ce même cas, M. de la Hire fait voir que si le point décrivant étoit au centre du cercle génerateur & déterminateur, la Roulette seroit un Cercle, & que s'il est pris par tout ailleurs, au dedans ou au dehors du génerateur, la Roulette sera une Ellipse, ce qui convient à la nature de cette courbe que l'on sçait être une espece moyenne entre la ligne droite & la circulaire, & qui peut dégenerer en l'une ou en l'autre.

M. de la Hire détermine avec plus de facilité les points de *rebroussement* des Roulettes, lorsqu'elles en ont, que ceux d'inflexion. Lorsque la plus grande ou la plus petite ligne menée du point décrivant sur la circonference de la géneratrice est perpendiculaire à la Base, le point correspondant de la Roulette est un point de rebroussement. En effet, il est aisé d'imaginer que si on fait rouler une Parabole, par exemple, sur une ligne droite, que le mouvement commence par quelque point de la circonference de cette Courbe éloigné du sommet, & que le point décrivant soit le foyer; il arrivera, quand la Parabole touchera la base par son sommet, que la Roulette qui jusques-là aura toûjours descendu par rapport à la base,

ſera alors deſcendue au point le plus bas, & ne pourra enſuite que remonter, ce qui fait un rebrouſſement. Or quand la Parabole touche la baſe par ſon ſommet, il eſt évident que la plus petite ligne qu'on puiſſe mener du foyer à la circonference de la Parabole, eſt alors perpendiculaire à la baſe. La même Regle ſubſiſtera, ſi l'on conçoit que le point décrivant devienne infiniment proche de la circonference de la generatrice, c'eſt-à-dire, ſoit pris ſur cette circonference. Alors il faudra qu'il ſoit ſur la baſe, afin que la Roulette ayant deſcendu remonte, ou reciproquement, ou en un mot, rebrouſſe, ce qui eſt aſſés clair par ſoi-même.

De-là M. de la Hire paſſe à la rectification & à la quadrature des Roulettes. Les longueurs des Courbes ſont toûjours des ſommes infinies d'arcs infiniment petits, & les ſuperficies ſont des ſommes infinies d'eſpaces infiniment petits. Quand ces arcs ou ſes eſpaces ſuivent des progreſſions dont la nature peut-être connue, & que d'ailleurs on peut avoir les ſommes de ces progreſſions, on a les longueurs, ou les ſuperficies cherchées. Tout ſe reduit là, mais il y a bien des voyes differentes pour y arriver. Celles que prend M. de la Hire ſont des plus ſimples. Il quarre & rectifie d'abord les Epicycloïdes, parce qu'elles comprennent les Cycloïdes, lorſque le rayon de leur baſe eſt ſuppoſé infini, & que par conſequent la baſe eſt une ligne droite. Il trouve que l'eſpace de l'Epicycloïdes en géneral, eſt à celui du Cercle génerateur, comme trois fois le rayon de la baſe plus deux fois le rayon du Cercle génerateur eſt au rayon de la baſe, d'où il ſuit évidemment que l'eſpace de la Cycloïde eſt triple de celui du Cercle, génerateur ; car quand l'Epicycloïde devient Cycloïde le rayon du Cercle génerateur qui eſt fini diſparoît dans cette Analogie. De même la circonference de l'Epicycloïde en géneral eſt à quatre fois le diametre du Cercle génerateur, comme le rayon de la baſe plus celui du Cercle génerateur eſt au rayon de la baſe, d'où il ſuit que la circonference de la Cycloïde eſt égale à quatre fois le dia-

metre du Cercle generateur. M. de la Hire passe ensuite aux Roulettes allongées ou accourcies, enfin à la Roulette dont la base est un Cercle, & la generatrice une ligne droite, où l'on prend un point quelconque pour décrivant, c'est-à-dire, à la Courbe qui naît du dévolement du Cercle. Elle peut devenir par un leger changement la Spirale d'Archimede.

Il est aisé de conclure de toute cette Theorie, qu'il n'y a point de Courbe qui ne puisse être considerée comme une Roulette, car il n'y en a aucune qui ne puisse avoir été formée par le mouvement d'un certain point décrivant pris sur le plan d'une certaine generatrice qui aura roulé sur une certaine bose. Delà naissent ces Problêmes, *Une Courbe prise pour Roulette étant donnée avec sa base, trouver la generatrice*, ou, *Une Courbe étant donnée avec sa generatrice, trouver la base*, ou, *La Base & la generatrice avec le point décrivant étant données, trouver la Roulette.* M. de la Hire apporte quelques solutions qui naissent de sa Theorie generale, & qui peuvent servir d'exemples pour d'autres cas que ceux qu'il propose.

SUR UNE PROPOSITION

DE GEOMETRIE ELEMENTAIRE.

IL y a dans la Géometrie Elementaire des Propositions que l'on retrouve presque par tout, & à chaque moment, & qui sont si souvent employées, qu'il semble que toutes les autres soient devenuës inutiles. Telle est la fameuse Quarante-septiéme du premier Livre d'Euclide, si digne de l'Hecatombe que l'on dit qu'elle coûta à son Inventeur. Telle est aussi celle de la similitude des Triangles. Il arrive le plus souvent que les plus sublimes recherches n'empruntent de toute la Géometrie Elementaire que ces deux Propositions. V. les M. p. 329.

M. de Lagni croit qu'il y en a encore quelques-unes

ou inconnuës ou negligées, qui pourroient tenir à peu prés le même rang. On peut prendre pour exemple celle qu'il démontre ici, que dans un Parallelogramme quelconque la somme des quarrés des deux Diagonales est égale à la somme des quarrés des quatre côtés.

Il évident d'abord que la quarante-septiéme du premier Livre d'Euclide n'est qu'un cas particulier de cette proposition, car si le Parallelogramme est rectangle, il s'ensuit que les deux Diagonales sont égales, & par consequent le quarré d'une Diagonale, ou, ce qui est la même chose, le quarré de l'Hypotenuse d'un angle droit, est égal aux quarrés des deux côtés. Mais si le Parallelogramme n'est pas rectangle, & si par consequent les deux Diagonales ne sont pas égales, ce qui est le cas le plus géneral, la proposition devient d'un usage fort étendu.

Elle peut servir, par exemple, dans toute la Theorie des Mouvements composés, d'où dépendent toutes les recherches de Mechanique, & plus géneralement presque toutes celles qui ont quelques mouvements pour objet.

Dans un Parallelogramme qui n'est pas rectangle, la grande Diagonale est la soutendante d'un angle obtus, & la petite est la soutendante d'un angle aigu, complement de cet obtus. La grande est d'autant plus grande, & la petite d'autant plus petite que l'angle obtus est plus grand, de sorte que si cet angle obtus en croissant toûjours devient infiniment grand par rapport à l'aigu, ou, ce qui est la même chose, si les deux côtés *conjoints* ou inégaux du Parallelogramme sont posés bout à bout en ligne droite, la grande Diagonale est la somme même de ces deux côtés, & la petite est nulle. Si on connoît deux côtés conjoints du Parallelogramme & l'angle qu'ils font entre eux, il est aisé de trouver en nombres la soutendante de cet angle, c'est à dire, une des Diagonales du Parallelogramme, aprés quoi la proposition de M. de Lagni donne l'autre Diagonale, ce qu'on peut voir trés-facilement. Or, cette seconde Diagonale qu'on trouve ainsi est la ligne que

décriroit un corps poussé en même tems par deux forces qui auroient entre elles le même rapport que les deux côtés conjoints, & agiroient selon ces deux directions, & ce corps décriroit cette diagonale dans le même tems qu'il auroit décrit l'un ou l'autre des deux côtés conjoints, s'il n'avoit été poussé que par la force correspondante. C'est-là un des plus grands usages de la Proposition, car le rapport de deux forces, & l'angle qu'elles font entre elles étant donnés, il est souvent necessaire de déterminer en nombres la ligne que décriroit dans un certain tems un corps poussé par ces deux forces ensemble.

Ce n'est pas que deux Methodes ordinaires & connues, l'une Trigonometrique, l'autre Géometrique & Analitique ne pussent resoudre ce Problême; mais M. de Lagni fait voir que la premiere demande 21 operation, la seconde 15, & que la sienne n'en demande que 7. Elle a même encore cet avantage qu'elle épargne des divisions & des extractions de racines, qui presque toûjours produisent des fractions, qu'on ne peut negliger sans erreur, ou employer dans le calcul sans le rendre beaucoup plus long & plus penible.

Si les deux côtés conjoints d'un Parallelogramme sont donnés de grandeur seulement, il est visible qu'ils peuvent faire entre eux une infinité d'angles differens, & puisque le rapport des deux Diagonales entre elles, dépend de l'angle de ces deux côtés, on en peut former une infinité de Parallelogrammes dont les deux Diagonales auront entre elles un rapport different. C'est là un Problême qui a une infinité de solutions, & même, à le considerer encore de plus prés, une infinité d'infinités de solutions. Car que les deux côtés donnés de grandeur fassent d'abord un angle de 180, c'est à dire, soient posés bout à bout en ligne droite, ils peuvent faire ensuite des angles toûjours décroissants selon la progression soudouple infinie, ou selon la progression soutriple pareillement infinie; en un mot, selon une infinité de progressions differentes, dont chacune est infinie, M. de Lagni

donne cette infinité d'infinités de solutions en deux formules generales, dont l'une est pour deux côtés égaux, & l'autre pour deux côtés inégaux, & il remarque en même tems que ces sortes de Problêmes ne sont pleinement resolus que de cette maniere, car ni plusieurs solutions, quel qu'en fût le nombre, ni une infinité, ni même plusieurs infinités ne comprendroient tout. Ce n'est pas cependant que toutes ces solutions soient toûjours differentes entre elles; quelques-unes de celles qui sont entrées dans un certain ordre, peuvent se retrouver dans un autre; ainsi lorsque des angles décroîtront toûjours depuis celui de 180 selon une certaine progression, quelques-uns de ceux qui étoient compris dans la progression soudouple 16, 8, 4, 2, 1, &c. se retrouveront dans la progression souquadruple, 16, 4, 1, &c. mais on reconnoît assés aisément en quels endroits ces répetitions doivent arriver, & comme elles ne sont qu'en nombre fini dans chaque ordre, elles y laissent l'infini en son entier.

Ce Problême des Diagonales du Parallelogramme a du rapport avec celui du Triangle rectangle en nombres, qui a tant exercé les Arithmeticiens, & les Algebristes. Ils ont cherché des regles pour déterminer tous les nombres qui pris trois à trois eussent la proprieté du Triangle rectangle, c'est-à-dire, qui fussent tels que le quarré de l'un fût égal aux quarrés des deux autres, & ils ont infiniment étendu & enrichi cette Theorie. Ici, il est question de trouver une somme de deux quarrés doubles de deux autres quarrés données, & ce peut être une assez ample matiere à de nouvelles recherches. On peut observer en passant que comme les nombres 3, 4, 5, sont les plus simples qui ayent la proprieté du Triangle rectangle, ainsi 5 & 10 pris pour côtés, & 9 & 13 pour Diagonales sont les plus simples qui fournissent un exemple de la Proposition de M. de Lagni.

Il en fait aussi une application à un sujet plus détourné que les mouvemens composés, & auquel on peut croire qu'il s'interesse davantage. Nous avons dit dans l'Histoire

de 1703 *, que M. de Lagni trouve que les Logarithmes, tels qu'ils ſont juſqu'à preſent, ſont défectueux & arbitraires, & qu'il prétend leur en ſubſtituer d'autres plus parfaits & naturels, tirés de ſon Arithmetique Binaire. D'un autre côté, il faut ſçavoir que l'Hiperbole priſe entre ſes Aſimptotes a cette proprieté, que ſi on prend une Aſimptote pour diametre, qu'on la diviſe en parties égales, & que par toutes ces diviſions qui formeront autant d'Abſciſſes toûjours croiſſantes également, on tire des Ordonnées à la Courbe, paralleles à l'autre Aſimptote, les Abſciſſes repreſenteront la ſuite infinie des Nombres naturels, & les eſpaces Aſimptotiques ou Hiperboliques correſpondans, repreſenteront la ſuite des Logarithmes de ces Nombres. Pour prendre quelque idée de cette verité, il n'y a qu'à conſiderer que le rapport Arithmetique eſt toûjours le même dans la ſuite des Nombres naturels, puiſqu'ils croiſſent toûjours d'une unité, & que leur rapport géometrique décroit toûjours, de ſorte qu'entre deux nombres voiſins il eſt toûjours d'autant plus petit, qu'ils ſont plus avancés dans la ſuite, ou, ce qui eſt la même choſe, plus grands. Ainſi le rapport géometrique de 99 & de 100 eſt plus petit que celui de 9 & de 10, ou, ce qui revient au même, 99 & 100 approchent davantage de l'égalité, non pas arithmetiquement, mais géometriquement, parce que 1 qui eſt la difference de part & d'autre eſt moins conſiderable par rappor à 100, que par rapport à 10. Si la ſuite naturelle pouvoit avoir une fin, on conçoit que 1 difference des deux derniers nombres ſeroit infiniment petit par rapport à eux, & par conſequent les laiſſeroit égaux. Les Logarithmes ſont des nombres qui par leur rapport Arithmetique repreſentent le rapport géometrique des nombres naturels, & par conſequent le rapport Arithmetique des Logarithmes décroît toûjours, quoique les Logarithmes croiſſent toûjours, ainſi que les nombres naturels correſpondans, ou, ce qui eſt la même choſe, les Logarithmes croiſſent toûjours, mais de moins en moins. Or, telle eſt auſſi la ma-

* p. 61. 62. & 64.

ture de l'espace compris entre une Asimptote & l'Hiperbole, qu'il croît à l'infini, mais toûjours de moins en moins, parce que l'Hiperbole s'approche toûjours davantage de l'Asimptote, & il croît de moins en moins selon la même proportion que les Logarithmes.

Cette proprieté se trouve dans toutes les differentes Hiperboles, car on sçait que par un même point du Cone pris pour sommet, il se peut former une infinité d'Hiperboles differentes, aussi-bien que d'Ellipses, au lieu qu'il ne se pourroit former qu'une Parabole ou qu'un Cercle. Les Asimptotes de ces differentes Hiperboles font toutes entre elles un angle different, & leurs espaces Asimptotiques, quoique tous infinis, sont inégaux, parce que deux Hiperboles differentes, dont chacune s'approche toûjours de plus en plus de ses Asimptotes, ne laissent pas de s'en approcher inégalement. Delà vient qu'une Asimptote de chacune de ces deux Hiperboles ayant été divisée en parties égale entre elles, & égales aux divisions de l'autre, les espaces Asimptotiques correspondants seront inégaux, & par consequent à la même suite des nombres naturels, il peut repondre differentes suites de Logarithmes ; & en effet, puisque la maniere de construire les Tables des Logarithmes est de prendre 0 ou 00 ou enfin tant de Zero qu'on voudra pour Logarithme de 1 ; 100 ou 1000 &c. pour Logarithme de 10 ; 200 ou 2000 &c. pour Logarithme de 100, & toûjours ainsi en prenant les nombres naturels selon la progression de 1 à 10, aprés quoi les Logarithmes de tous les nombre interposés entre 1 & 10, entre 10 & 100 &c. sont déterminés par ces premiers Logarithmes des nombres 1, 10, 100 &c, il est clair que si au lieu de la progression de 1 à 10, on eût pris, par exemple, celle 1 à 8, & qu'on eût donné aux nombres 1, 8, 64 &c. les mêmes Logarithmes qu'on a donnés dans l'autre hipothese aux nombres 1, 10, 100 &c. les Logarithmes des nombres interposés 2, 3, 4, &c. auroient été dans la seconde hipothese differents de ceux de la premiere, & par consequent la même suite des

nombres

nombres naturels peut recevoir differentes ſuites de Logarithmes, ou, ce qui revient au même, une infinité d'Hiperboles differentes peuvent repreſenter par leurs eſpaces aſimptotiques les Logarithmes des nombres naturels.

Pour déterminer la ſuite des Logarithmes, il faut donc faire un choix arbitraire de quelque Hiperbole, mais il eſt certain que ce choix ſera d'autant meilleur, qu'il ſera moins arbitraire, & plus fondé en raiſon. Or la plus ſimple de toutes les Hiperboles eſt l'*équilatere*; c'eſt-à-dire, celle dont les Aſimptotes font entre elles une angle droit, car quand deux lignes peuvent faire entre elles differens angles, le droit eſt en quelque ſorte le plus naturel de tous, & c'eſt inconteſtablement celui qui produit dans les figures les proprietez les plus ſimples. Delà M. de Lagny conclut que pour regler les Logarithmes, il auroit fallu choiſir l'Hiperbole équilatere, & on auroit trouvé ceux que ſon Arithmetique Binaire lui donne.

Au lieu de ſuivre cette Arithmetique Binaire, ou, ce qui eſt la même choſe, de couper toûjours la ſuite des nombres de deux en deux, on l'a coupée de dix en dix, & on s'eſt aſſujetti à cet uſage dans la détermination des Logarithmes. Ceux que l'on a établis, répondent donc à une autre Hiperbole que l'équilatere, & M. de Lagni a cherché quelle eſt cette Hiperbole, c'eſt-à-dire, que l'angle font ſes Aſimptotes. Comme toute Hiperbole peut être décrite par le moyen d'un Parallelogramme pris ſur ſes deux Aſimptotes, & dont l'angle des Aſimptotes eſt un des Angles, M. de Lagni trouve par ſa Propoſition quelles ſont les Diagonales du Parallelogramme qui a formé l'Hiperbole à laquelle répondent les Logarithmes communs, & par ces Diagonales il détermine que l'angle des Aſimptotes de cette Hiperbole de 25° 44′ 25″ à peu près. La grandeur de cet angle irreguliere & biſarre, pour ainſi dire, fait aſſés voir qu'il n'auroit pas dû être préferé à l'angle droit, & que les Logarithmes dont l'Hiperbole équilatere ſeroit le modele, meriteroient le titre de *naturels*, à l'excluſion de tous les autres, qui ne pourroient

être traités que d'arbitraires. Cela justifie ce que M. de Lagny a déja avancé plusieurs fois sur les Logarithmes communs, & ce n'est peut-être pas un des moindres fruits de la Proposition des Diagonales des Parallelogrammes, que de lui avoir aidé à mettre sa pensée & sa prétention dans tout son jour.

SUR LES RAYONS

DES DEVELOPE'ES DES COURBES

Conçües comme formées d'Elemens Courbes.

V. les M. p. 490. NOus avons dit ci-dessus* que quand les Courbes se formoient par des Mouvemens composés, & que l'un des deux étoit acceleré ou retardé, on ne pouvoit se dispenser de regarder les Arcs infiniment petits ou Elemens de la Courbe, comme courbes eux-mêmes. Jusqu'ici on les a pris pour droits dans le Sistême des infiniment petits, & dans tous les calculs qui en dépendent, & comme cette diversité d'hipothese pourroit faire quelque embarras, M. Varignon donne dans la recherche des Rayons des Dévelopées un exemple de la maniere dont il faut operer sur les Elemens courbes.

* p. 65. & 6.

Il est bien vrai, & nous l'avons dit dans l'Hist. de 1701. * en traitant cette matiere, & ci-dessus à l'endroit déja cité, que les Géometres avoient avancé qu'une Courbe formée par le dévelopement d'une autre, pouvoit être conçûë comme composée d'une infinité de petits arcs circulaires tous décrits de differens centres, & sur differens rayons. Mais cette idée n'a été proposée que pour mieux faire entendre la génération des Courbes par le dévelopement, & elle n'a jamais servi de principe aux calculs géometriques que l'on a faits pour trouver les rayons des Dévelopées. Elle le devient maintenant pour la premiere fois entre les mains de M. Varignon.

* p. 81.

Quand on imagineroit une composition de mouvemens qui produiroit un Element courbe d'une autre courbure que la circulaire, parabolique, par exemple, ou hiperbolique, on seroit toûjours en droit de le regarder comme circulaire, parce qu'étant infiniment petit il n'auroit nulle proprieté particuliere ni de la Parabole ni de l'Hiperbole, & que tout son caractere géometrique consisteroit en ce que le rayon de la Dévelopée lui seroit perpendiculaire, ce qui est une proprieté du Cercle. M Varignon prend donc tous les Elemens courbes pour les circulaires.

Quelque Element supposé courbe que l'on prenne dans une Courbe quelconque, il sera donc toûjours commun & à cette Courbe, & à un Cercle qui auroit pour rayon celui de la Dévelopée, ou, ce qui est la même chose, le Cercle touchera la Courbe en cet Element-là. Mais comme le rayon de la Dévelopée varie incessamment, & infiniment peu à chaque instant, un autre Cercle décrit sur un rayon infiniment proche du premier, & plus grand ou plus petit d'une difference infiniment petite, aura aussi l'arc circulaire immediatement suivant commun avec la Courbe, ou la touchera en cet Element. Et parce que deux Cercles décrits de deux centres infiniment proches, & sur deux rayons infiniment peu differens, ne sont que le même Cercle fini; le même Cercle décrit sur un rayon quelconque de la Dévelopée, aura deux de ses arcs infiniment petits communs avec la Courbe, ou, ce qui revient au même, exactement appliqués sur deux arcs de la Courbe; & si l'on veut pousser encore cette idée plus loin, les deux arcs circulaires à cause de la difference infiniment petite de leurs rayons, seront appliqués sur ceux de la Courbe, l'un en dedans, l'autre en dehors, desorte que le même Cercle ayant été *interieur* à l'égard de la Courbe, & l'ayant touchée en un point, lui deviendra exterieur dans le point immediatement suivant, & par consequent la coupera en la touchant encore. Avoir un arc infiniment petit, ou un seul point commun avec une Cour-

be, c'eſt la *toucher*, mais avoir deux arcs ou deux points communs l'un auprès de l'autre, c'eſt la *baiſer*, ſelon le langage des nouveaux Géometres, qui par la préciſion que donnent les infiniment petits ont diſtingué le *baiſement* du ſimple attouchement. Delà vient qu'un Cercle décrit ſur un rayon quelconque de la Developée d'une Courbe eſt appellé Cercle *baiſant* ou *Oſculateur*, & le rayon de la Developée rayon *Oſculateur*.

M. Varignon trouve en pluſieurs manieres differentes le rayon ſur lequel eſt décrit l'arc circulaire quelconque d'une Courbe quelconque. Il trouve même pour ce rayon pluſieurs formules, mais parfaitement équivalentes, & qui ſeulement dans les applications particulieres peuvent avoir quelque avantage l'une ſur l'autre pour la commodité du calcul.

Ces formules conſiſtent dans des rapports de trois infiniment petits, de l'arc circulaire de la Courbe, de la difference de l'Abſciſſe, & de la difference de l'Appliquée correſpondante, ou même dans les rapports de leurs infiniment petits. Il n'y a point de Courbe dont la nature ne puiſſe être exprimée par la loi qui regle la variation de ces rapports, mais pour ſçavoir quelle eſt la variation de deux de ces infiniment petits, il faut neceſſairement ſuppoſer que le troiſiéme ne varie point, & demeure *conſtant*; ainſi pour ſçavoir ſelon quelle loi croiſſent ou décroiſſent les arcs d'une Courbes, & les differences des Appliquées, il faut ſuppoſer que la difference des Abſciſſes correſpondantes, eſt toûjours la même, c'eſt-à-dire, que les Appliquées dont on recherche la variation ſont ſéparées par des intervalles infiniment petits égaux, & qu'à ces intervalles répondent les arcs de la Courbe. Cette ſuppoſition eſt la plus naturelle & la plus commune. Mais les deux autres qu'on pourroit faire ſeroient tout auſſi recevables, car enfin toutes ces diviſions ſont entierement arbitraires. C'a été ſelon cette hipoteſe commune que feu M. le Marquis de l'Hopital dans l'Analiſe des infiniment petits a donné la formule generale des Rayons Oſcula-

teurs, auſſi n'eſt-elle génerale que quand on prendra dans les Courbes la difference des Abſciſſes pour conſtante, hors delà, elle ne ſeroit plus d'aucun uſage. Celles de M. Varignon ont cela de ſingulier & de nouveau qu'elles ne ſuppoſent rien de conſtant ; il eſt vrai que dans l'uſage il faudra venir à prendre pour conſtant l'un des trois infiniment petits, mais ce ſera celui que l'on voudra, & l'on verra auſſi-tôt le changement que la ſuppoſition qu'on aura choiſie produira dans les formules, qui en deviendront plus ſimples & plus commodes. Il n'eſt pas même neceſſaire de traiter de conſtant l'un des trois infiniment petits préciſément, il ſuffit de traiter ainſi quelqu'un des produits qu'ils font, ſoit entre eux, ſoit avec quelque grandeur finie, & par-là l'univerſalité de la formule eſt encore plus grande.

Pour trouver les rayons Oſculateurs, en conſiderant les Elemens des Courbes comme courbes, il faut plus de Géometrie & de calcul, que ſi l'on avoit conſideré ces Elemens comme droits, mais les formules viennent préciſément les mêmes, & en effet, cela doit être ainſi ; puiſque tout le caractere de ces Elemens par rapport aux rayons Oſculateurs eſt la perpendicularité, qui convient également à une ligne droite ou courbe, ou plûtôt ne convient à une courbe que dans un eſpace infiniment petit où elle eſt droite.

M. Varignon donne auſſi les rayons Oſculateurs, en prenant les Elemens pour droits. Ces nouvelles formules ne renferment rien de conſtant non plus que les autres, & laiſſent une libre entrée à toutes les ſuppoſitions. Il réſout encore ce Problême par la voye de la *Synthese*, mais en prenant ſucceſſivement pour conſtant l'un des trois infiniment petits. On ſçait combien la Syntheſe eſt inferieure à l'Analiſe. Celle-ci eſt la ſource, & l'autre n'eſt que le ruiſſeau. On peut ſe contenter du ruiſſeau, mais ce n'eſt que lorſqu'on ne peut pas penetrer juſqu'à la ſource.

MOnsieur Carré a donné en trois manieres differentes la Quadrature d'une Courbe appellée *Folium* ou *Feüille*, à cause de son contour.

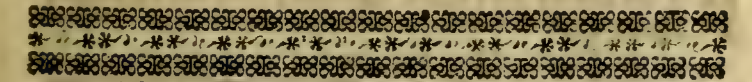
V. les M. p. 284 MOnsieur Rolle a donne une Methode pour trouver les foyers des Lignes Géometriques, par rapport à la Dioptrique.

QUelque tems aprés que M. de la Hire eût fait part à l'Academie de sa Theorie des Roulettes, M. Nicole, Géometre déja fameux, malgré sa grande jeunesse, fit voir aussi une Methode nouvelle qu'il a trouvée pour ces Lignes. Il résulte de tout ce que nous avons dit ci-dessus*, qu'on ne peut considerer dans cette Theorie que trois Courbes, la Géneratrice, la Base, la Roulette; M. Nicole a des Equations infiniment génerales, par lesquelles deux de ces Courbes étant données, il détermine aussitôt la troisiéme, & cela, soit que le point décrivant se prenne sur la circonference de la Géneratrice, ou au dedans, ou au dehors. L'Infini bien manié, principe ordinaire, & apparemment unique de l'universalité, a produit ces Equations, qui remplissent sur cette matiere la plus vaste curiosité de l'Esprit. Une consequence remarquable, & qui s'est présentée naturellement à M. Nicole, lorsqu'il a été sur cette voye, c'est que toute Roulette, formée par une Courbe Géometrique roulant sur elle-même, est Geometrique aussi, en quelque endroit que soit pris le point décrivant; ainsi voilà le nombre des Courbes Géometriques augmenté à l'infini, puisqu'il n'y en a aucune qui n'en puisse produire une infinité.

* p. 71. & suiv.

La Methode que M. Nicole exposa à l'Academie n'est qu'un échantillon d'un grand Ouvrage qu'il doit bien-tôt publier sur les Roulettes. Il y expliquera d'une maniere

nouvelle leurs proprietés déja connuës, & en découvrira qui ne le sont pas encore; il donnera les dimensions de leurs Surfaces & de leurs Solides, déterminera leurs centres de Pesanteur & d'Oscillation, & l'on s'attend à trouver dans tout le Livre une grande connoissance, non-seulement du calcul Differentiel, mais aussi de l'integral, qui est de toute la Géometrie moderne la partie qui a encore le plus de besoin d'être cultivée.



ASTRONOMIE.

SUR LES MOUVEMENTS DE JUPITER ET DE MARS.

L'Astronomie demande un travail continuel; jamais rien n'y est fixé de maniere qu'il n'y ait plus aucun lieu à la revision. Il faut toûjours observer, soit pour s'assurer davantage des hipotheses qu'on a étabies, soit pour y faire les changemens necessaires. On pourroit dire que l'Astronomie est toûjours en mouvement aussi bien que les Astres. V. les M. p. 61. & 66.

Ces sortes de revisions ne doivent être entreprises, que quand on a devant soi un grand amas d'observations, faites pendant une assés longue suite d'années. Le nombre n'en sçauroit être trop grand, tant parce qu'en géneral chaque détermination qu'on peut faire sur une Planete en est plus exacte, que parcequ'il faut pour chaque détermination differente des observations faites en differens points du cours de la Planete, du moins pour une plus grande commodité de calcul, & pour plus de sûreté. Ainsi quand on veut déterminer ou l'Aphelie & le Perihelie, ou les Nœuds, les observations les plus avantageuses sont

celles qui se trouvent aux environs de ces points, ce qui est naturel, & il n'y auroit rien à desirer si en même tems la Planete, supposé qu'elle soit superieure, avoit été opposée au Soleil, ou, ce qui revient au même, Perigée, c'est-à-dire, placée dans son moindre éloignement de la Terre, car alors à cause de cette proximité son mouvement auroit été beaucoup plus sensible, & il doit l'être le plus qu'il se puisse pour donner lieu de déterminer plus précisement des points invisibles, tels que le Nœud ou l'Aphelie. Par les mêmes raisons, s'il s'agit de déterminer l'inclinaison de l'Orbe d'une Planete sur l'Ecliptique, il n'y a point d'observations plus favorables que celles qui se trouvent aux environs de la plus grande latitude de la Planete, & de son opposition au Soleil. Il est clair que c'est dans le tems de cette opposition qu'il faut prendre une Planete superieure, pour observer ses Taches, & par-là reconnoître quelle est la durée de sa révolution sur son axe, & l'inclinaison de cet axe sur le plan de son Orbe, selon la methode que nous avons expliquée pour le Soleil dans l'Hist. de 1701 *. S'il est question de déterminer par la seconde inégalité d'une Planete, c'est-à dire, par la difference optique du mouvement de cette Planete vûë du Soleil ou vûë de la Terre, quelle est sa distance au Soleil comparée à celle de la Terre, les observations qui conviennent le mieux, sont celles de cette Planete prise en quadrature avec le Soleil. Car quand elle est ou en opposition ou en conjonction avec le Soleil, son mouvement par rapport à la Terre est d'un jour à l'autre le moins inégal qu'il se puisse, & par consequent moins different à cet égard de ce qu'il seroit étant vû du Soleil, ou, ce qui revient au même, la seconde inégalité de la Planete est moins sensible. Elle l'est donc autant qu'elle le puisse être entre l'opposition & la conjonction, c'est-à-dire, dans les quadratures. Nous avons supposé ici que l'on connût ce que c'est que toutes ces differentes déterminations, expliquées dans l'Hist. de 1704 *.

* p. 101. & suiv.

* p 65. & suiv.

Ce qu'on a vû dans cette même Histoire que fit M. Maraldi

Maraldi sur Saturne, il l'a fait ensuite sur Jupiter & sur Mars. Ayant entre les mains un grand nombre d'observations exactes, dont les plus anciennes appartenoient à M. Cassini seul, & les plus nouvelles à Mrs Cassini & à lui, & se voyant en état de trouver toûjours dans ce grand nombre celles que demanderoient les differens besoins, il a examiné par rapport à Jupiter & à Mars les Tables astronomiques que Kepler a données. Les legers changemens que M. Maraldi juge qu'il y faut faire sur certains points, sont fort glorieux à ce grand Astronome. Ce détail ne nous regarde pas, non plus que celui de plusieurs déterminations nouvelles que M. Maraldi tire de ses observations. Nous nous arrêterons seulement à la parallaxe de Mars, parce qu'elle est importante pour le sistême géneral de l'Astronomie.

Par la fameuse Regle de Kepler, que de nouveaux Astres ont confirmée, ainsi qu'il a été dit dans l'Hist. de 1705 *, on a les rapports des distances de toutes les Planetes principales au Soleil; on sçait, par exemple, que Jupiter en est plus de 5 fois plus éloigné que la Terre, Saturne un peu moins de 10 fois; mais pour changer ces rapports en grandeurs absoluës, il faudroit avoir en lieuës la distance de quelqu'une des Planetes au Soleil ou à la Terre. On a voulu parvenir à cette connoissance par l'angle de la parallaxe que quelque Planete principale peut faire à l'égard de la Terre.

* p. 118 & suiv.

Une Planete étant supposée à l'horison, on imagine deux lignes tirées à son centre, dont l'une part du centre de la Terre, l'autre d'un point quelconqe de sa surface où est un Observateur. Il se forme donc un Triangle rectangle, dont un des angles aigus est au centre de la Planete, & a pour base le demi-diametre de la Terre que l'on connoît. Cet angle est la parallaxe, ou la difference optique qui est entre une Planete vûë du centre de la Terre, ou de sa surface. Si cet angle est connu, tout le triangle l'est par les regles de la Trigonometrie, & par consequent celui de ses côtés qui est la distance du centre de la

Terre à la Planete. Il est bon de remarquer ici que cet angle n'est jamais plus grand qu'à l'Horison, & que delà il va toûjours en diminuant jusqu'au Zenith, où il s'anéantit entierement. Aussi la plus grande parallaxe est toûjours l'horisontale, mais il n'est pas necessaire de l'avoir immediatement, on la conclut sans peine de celle qu'on aura trouvée dans quelque autre point du Ciel. Il faut remarquer aussi que la ligne tirée de la surface de la Terre à la Planete, & qui est celle de notre rayon visuel, rapporte toûjours la Planete à un point du Ciel plus bas, que celle qui est tirée du centre de la Terre, c'est-à-dire, que la parallaxe fait toûjours baisser l'Astre.

Afin qu'une Planete puisse avoir une parallaxe, il est necessaire que dans ce Triangle que nous venons d'imaginer, le demi-diametre de la Terre ait quelque rapport sensible aux deux autres côtés qui sont la distance de la Planete au centre de la Terre, ou à sa surface. Si ce rapport est trop petit, il est nul à notre égard, & la parallaxe cesse absolument. C'est ce qui arrive aux Planetes de Saturne & de Jupiter, dont les distances sont infinies, par rapport au demi-diametre de la Terre qui n'est que de 1500 lieuës. Mais on a pas desesperé de la parallaxe de Mars, qui est plus proche de nous, pourvû cependant qu'on le prît dans le tems où il en est le plus proche, & où sa distance qui peut être de 13 ne fût que de 2.

Outre les distances absoluës des Planetes au Soleil, & entre elles, que l'on auroit par la parallaxe de Mars, on auroit aussi la parallaxe du Soleil que l'on ne peut avoir par observation à cause du grand éloignement de cet Astre, & qui est cependant necessaire pour la précision d'une infinité de calculs. Car les parallaxes étant proportionelles aux distances, la parallaxe de Mars donneroit celle du Soleil, puisque l'on sçait quel est le rapport des distances de Mars & du Soleil à la Terre.

Toutes ces connoissances que l'on peut tirer de la parallaxe de Mars, & qui ne peuvent guere venir par d'autres voïes, la rendent donc fort précieuse aux Astronomes,

Aussi lorsqu'en 1672 M. Richer fut envoyé par l'Academie en l'Isle de Cayenne, sur les côtes de l'Amerique, pour y faire des observations, il fut chargé de s'attacher particulierement à la parallaxe de Mars, qui devoit être alors dans son perigée. Etant arrivé à Cayenne, il comparoit Mars à une Etoile fixe la plus proche, & mesuroit exactement leur distance. Pendant ce même tems, & souvent aux mêmes jours, M. Cassini mesuroit à l'Observatoire la distance de Mars & de la même fixe. Quand M. Richer fut de retour en 1673, on compara les observations. Si Paris & Cayenne qui a environ 5 degrés de latitude Septentrionale, avoient eu la même longitude, & que Mars vû dans le même moment de l'un & de l'autre lieu, n'eût pas paru à la même distance de la fixe, il est certain que la difference eût dû être entierement rapportée au grand éloignement des deux lieux des observations, & par consequent on auroit eu une parallaxe *partiale* de Mars; je dis partiale, car elle eût été moindre que si Cayenne eût été sous l'Equateur & Paris sous le Pole, ce qui auroit donné sa parallaxe *totale*, ou horisontale. Mais on avoit égard à la difference de longitude entre Paris & Cayenne, qui étoit de 3 heures 39′, & à la quantité dont Mars pendant ce tems-là devoit s'approcher ou s'éloigner de la fixe par son mouvement particulier, & cette réduction faite toute la difference de distance entre la fixe & Mars vû de Paris ou de Cayenne appartenoit certainement à la parallaxe partiale de Mars. Par cette voïe on la trouva de 15″, la totale ou horisontale de 25″, celle du Soleil de 9″$\frac{1}{2}$, la distance de Mars perigée à la Terre de 11 ou 12 millions de lieuës, celle du Soleil de 33 millions, son globe un million de fois plus gros que la Terre, &c. Il paroît étonnant d'abord que 15 secondes de parallaxe découvertes dans Mars, qui sont une grandeur presque imperceptible aux yeux & aux instrumens, donnent toutes ces grandeurs énormes, & presque immenses; cependant rien n'est plus facile que de le voir, & les Mathematiciens ne daignent presque pas s'y arrêter.

Comme il est rare que l'on ait de bonnes observations faites en des lieux fort eloignés, telles que celles de M. Richer, on ne laisse pas de chercher & de déterminer sans ce secours la parallaxe de Mars, toûjours lorsqu'il est perigée. On prend quelque nuits de suite à son passage au Meridien, c'est-à-dire, alors à minuit ou à peu prés, sa difference d'ascension droite avec une étoile fixe la plus proche, & comme l'étoile n'a point de mouvement en ascension droite, on voit précisément quel est celui de Mars par la variation de sa distance à cette étoile. Alors Mars n'a point de parallaxe*, puisqu'il est au Meridien, & toute la distance entre la fixe & lui est, pour ainsi dire, réelle.** On prend ensuite cette même distance à quelque autre heure la plus éloignée de minuit qu'il se puisse, & si, comme il arrive effectivement, on la trouve differente de ce qu'elle doit être par le seul mouvement propre de Mars, qu'on suppose trés-exactement établi, cette difference appartient à la parallaxe que Mars fait alors, & qui en le baissant vers l'Horison l'approche ou l'éloigne de l'étoile, selon qu'elle est posée à son égard. M. Cassini, inventeur de cette methode, la pratiquoit en 1672. pendant que M. Richer étoit à Cayenne, & trouvoit la parallaxe de Mars indépendamment de la comparaison qu'il devoit faire ensuite de ses observations avec celles de M. Richer. La même détermination faite par deux differentes voïes, en devoit être plus sûre.

* En ascension droite, car il en a encore une en hauteur.

** En prenant seulement cette distance en ascension droite.

Cette derniere methode demande une saison où les nuits soient longues, parce que plus l'heure qui doit donner la parallaxe de Mars sera éloignée de minuit, plus la parallaxe sera sensible, & elle ne peut jamais l'être tant, qu'elle ne soit encore bien delicate. Par cette même raison, il ne suffit pas tout-à-fait que Mars soit dans son perigée, il est bon qu'il soit encore dans son perihelie ou aux environs, car il est visible que la Terre étant entre le Soleil & lui, il sera encore plus proche de la Terre, s'il est dans la partie la plus basse de son Orbe par rapport au Soleil.

Depuis l'année 1672, toutes ces circonstances, presque absolument necessaires, à cause de la grande subtilité de cette détermination, ne se retrouverent qu'aux mois de Septembre & d'Octobre 1704. Aussi M. Maraldi ne manqua-t'il pas cette occasion. Il détermina la parallaxe horisontale de Mars de 24″, plus petite d'une seconde que celle qui avoit été déterminée par M. Cassini en 1672. Cette legere difference passeroit pour un accord surprenant dans de semblables recherches; mais il y a plus, cette difference n'en est pas une, Mars étoit un peu plus éloigné de son perihelie, & par consequent de la Terre en 1704 qu'en 1672. Voilà donc les 25″ de la parallaxe de Mars confirmées, toute cette multitude de consequence qui s'en ensuivent.

M. Maraldi observa aussi dans le même tems les Taches de Mars, & verifia par là sa révolution autour de son axe en 24 heures 40′, découverte par M. Cassini. Elle est difficile à déterminer, parce que les Taches de Mars changent beaucoup, non-seulement d'un perigée à l'autre, qui sont les seuls tems où l'on puisse les observer, mais même d'un mois à l'autre. Elles ont cela de commun avec les Taches de Jupiter, dont nous avons parlé dans l'Hist. de 1699 *, & la reflexion que nous fîmes alors en devient plus étenduë. Il faut que les grandes parties de la surface de notre Globe terrestre, differentes entre elles, comme les Mers & les Continents, soient bien en repos les unes à l'égard des autres, & bien exemptes de changement, en comparaison de celles qui leur répondent dans les Globes de Jupiter & de Mars.

* p. 78.

SUR LES REFRACTIONS.

V. les M. p. 78.

MOnsieur Cassini, & le P. Laval Jesuite, l'un de ses Correspondants sur l'Astronomie, & Professeur d'Hidrographie à Marseille, ont traité dans leur com-

merce sçavant diverses matieres, dont la principale ou la plus instructive est la refraction astronomique.

Ce fut principalement à l'occasion de la mesure de la Terre, commencée par l'Academie en 1669, que l'on s'apperçût des differentes refractions d'un objet vû sur la terre. Elles sont d'autant plus grandes, qu'il est plus élevé, ou plus éloigné, plus grandes le matin qu'à midi, & qu'aux heures correspondantes après midi, differentes en differens jours, le tout sans aucune proportion bien connuë. Tout cela peut s'expliquer par differentes couches de vapeurs repanduës dans l'air, les inferieures plus grossieres que les superieures, plus mêlées ensemble & moins differentes, lorsque le Soleil a eu le tems d'agir sur elles. La quantité, la consistence & le mélange de ces vapeurs dépendent d'une trop grande combinaison de causes particulieres, pour nous permettre aucune détermination précise.

Il seroit de consequence dans l'Astronomie de connoître au juste les refractions des Astres à l'horison, ou, ce qui revient au même, la variation que les refractions causent à l'apparence de l'horison sensible, qu'elles élevent plus ou moins. L'Observatoire du P. Laval à Marseille est commode pour cette recherche, parcequ'il est en vûë de la Mer, & a par consequent un horison sensible qu'on peut appeller *veritable* en comparaison des horisons terrestres, qui sont presque toûjours trop hauts, ou trop bas.

Le P. Laval a observé que l'horison de son Observatoire terminé à la Mer, n'est jamais plus bas que de 15 minutes, ni moins que de 13 $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire, que l'arc de la circonference de la Terre, compris depuis l'Observatoire jusqu'à l'horison, varie entre ces grandeurs, d'où M. Cassini conclut, par le moïen du Rayon de la Terre connu assés exactement, que l'étenduë de l'horison est de 7 petites lieuës, & que l'Observatoire est élevé sur la surface de la Mer de 175 pieds.

C'est une chose remarquable, que quand la Mer a été grosse, ou que le Nord-Oüest, ou le Sud-Est ont été frais,

& que l'air a été rempli à l'horiſon d'une brume déliée, le P. Laval a trouvé ordinairement ſon horiſon plus bas, c'eſt-à-dire, que la refraction a été moindre, puiſqu'elle l'a moins élevé. Cependant ces circonſtances auroient pû faire croire que l'air plus chargé de vapeurs auroit dû la rendre plus forte.

Il ſembleroit de même que la refraction d'un Aſtre vû au travers d'un nuage devroit être plus grande. Elle ne l'eſt pourtant pas, & c'eſt ce que M. Caſſini & le P. Laval ont obſervé pluſieurs fois. Delà M. Caſſini conjecture qu'il pourroit y avoir dans l'air une *matiere refractive* differente de l'air.

D'un autre côté cependant les refractions paroiſſent avoir un certain rapport à la conſtitution de l'air. Le P. Laval trouve au Solſtice d'Hiver la diſtance du Soleil à l'Equateur ou l'obliquité de l'Ecliptique moindre qu'il ne la trouve au Solſtice d'Eſté, ce qui apparemment vient d'une refraction plus grande en Hiver qu'en Eſté. Toûjours il eſt certain, comme nous l'avons dit dans l'Hiſt. de 1700 *, que vers l'Equateur les refractions horiſontales ſont moindres que celles de notre climat d'environ un tiers, & que vers les 65 ou 66 degrés de latitude elles ſont preſque doubles des nôtres.

* p. 109. & ſuiv.

Entre les Tropiques, le Barometre en géneral s'éleve moins que dans les païs Septentrionaux, ce qui marque ſûrement que l'air de la Zone Torride eſt plus leger, & ce plus de legereté s'accorde bien avec de moindres refractions. Mais d'ailleurs le Barometre ne s'éleve pas plus à Stokolm qu'à Paris, du moins ſelon les obſervations d'un certain nombre d'années, quoique les refractions de Stokolm ayent toûjours été plus grandes. Voilà bien des contrarietés apparentes, qui éloignent beaucoup l'établiſſement d'un ſiſtême; il ſuffit maintenant de ramaſſer tous les ſujets d'incertitude, & peut-être quand ils ſeront en aſſés grand nombre, produiront-ils quelque certitude, ou quelque vrai-ſemblance.

SUR L'APPARITION D'UNE COMETE.

V. les M. p. 91 & 58
* p. 65.

LE Ciel confirme ce que nous avons dit dans l'Hist. de 1702*, que les Cometes qui étoient assés rares deviennent communes, depuis qu'il y a des Observateurs en plus grand nombre, & plus appliqués. Il a paru une Comete en 1698, deux en 1702, une en cette année, c'est-à-dire, 4 Cometes en 8 ans, mais il est vrai qu'elles n'ont paru qu'aux yeux des Astronomes, qui voudroient encore en voir plus souvent, & qu'elles n'ont pas servi à épouvanter les peuples.

Celle de cette année fut découverte par Mrs Cassini & Maraldi, la nuit du 18 au 19 Mars, proche de la Couronne Septentrionale. Elle étoit de la grandeur d'une petite Etoile nebuleuse, plus claire vers le milieu que vers les bords, & mal terminée. On la reconnut pour Comete à son mouvement propre, qui fut bien-tôt apperçû.

Par les observations des trois premieres nuits, où l'on pût la voir, on détermina que sa route étoit sur un grand Cercle qui coupoit l'Ecliptique vers le milieu de la Vierge & des Poissons, & qui dans son plus grand éloignement de l'Equateur, en étoit à 55 degrés, que le mouvement de la Comete sur ce Cercle étoit alors de 4 degrés par jour, contre l'ordre des signes, & qu'elle s'approchoit toûjours de l'Ecliptique, allant du Nord-Est au Sud-Oüest. On détermina même par la diminution sensible de son mouvement, qu'elle avoit dû être vers son perigée au tems de la premiere observation.

Cette détermination du perigée est tout-à-fait importante. Quand elle est une fois faite, M. Cassini suppose que la Comete au lieu de decrire un arc de Cercle ou de quelque autre Courbe, décrit la Tangente d'un Cercle concentrique à la Terre, qui a pour rayon la distance de la

la Terre à la Comete dans ſon Perigée. Cette Tangente l'eſt dans le point du Perigée. Quoique ce ſoit une ligne droite, elle peut dans une grande étenduë être priſe pour l'arc même de l'Orbe de la Comete, à cauſe de l'énorme grandeur dont cet Orbe doit être. De plus, M. Caſſini ſuppoſe le mouvement de la Comete égal, & en effet il l'eſt du moins par rapport à nous, tant à cauſe de la grande diſtance, que de la petite partie de l'Orbe qui nous eſt viſible. Il prend enſuite par obſervation le nombre de degrés celeſtes que la Comete a parcourus en un jour depuis ſon Perigée, par exemple 4 degrés, il les poſe ſur ſa Tangente à compter depuis le Perigée, & par l'extrêmité de cette étenduë de 4 degrés, il tire au centre de la Terre une ligne qui eſt l'hipotenuſe de l'angle droit formé par le rayon du Cercle & par la Tangente. Les 4 degrés ſont la meſure, & dans la ſuppoſition preſente, la baſe de l'angle du centre. Voilà donc un triangle rectangle dont les trois angles ſont connus, & par conſequent le rapport de ſes côtés. Dans l'exemple preſent, ſi le rayon du Cercle eſt de cent parties, les 4 degrés valent 7 de ces parties, d'où M. Caſſini tira cette conſequence, que le chemin de la Comete en un jour étoit les $\frac{7}{100}$ de ſa plus petite diſtance à la Terre. Enfin la Tangente étant diviſée en parties qui ſoient toutes égale à ces $\frac{7}{100}$, on a le chemin de la Comete pour chaque jour, & on peut le predire, de ſorte que ſi on a été pluſieurs jours de ſuite ſans la pouvoir obſerver à cauſe du mauvais tems, on ſçait dès que le tems permet l'obſervatoire, à quel endroit du Ciel il faut pointer la Lunete pour retrouver l'Aſtre. Il eſt viſible que cette diviſion de la Tangente en parties égales donne la diminution du mouvement apparent de la Comete, à meſure qu'elle s'éloigne de ſon Perigée, car ces parties égales ſont vûës ſous des angles toûjours plus petits, dont la diminution eſt aiſée à connoître, & c'eſt par-là que M. Caſſini prédit les lieux de la Comete dans le Ciel.

Comme la ſuppoſition de la Tangente décrite par la Comete eſt fauſſe, on ne trouve plus l'Aſtre ſur cette li-

gne droite, quand son cours nous est visible dans une étenduë considerable. Ainsi la Comete de cette année qui disparut le 16 Avril commençoit à s'écarter de la Tangente. Elle n'étoit plus même dans le plan d'un grand Cercle, c'est-a-dire, d'un Cercle dont le plan eût passé par le centre de la Terre.

A la fin de son cours, son mouvement n'étoit pas d'un degré par jour. Sa grandeur diminuoit en même tems.

Il parût en 1580. une Comete qui eût la même vitesse, & qui tint à peu près la même route. On en pourroit tirer une consequence favorable à l'Hipothese des Retours.

La Theorie que nous avons rapportée, & par laquelle M. Cassini calcula le mouvement de cette Comete répondit aussi juste aux observations que les meilleurs Tables de la Lune. On pourroit être étonné que le cours de la Lune, qui est si proche de nous, & toûjours exposée à nos yeux, ne nous fût pas plus connu que celui de ces Astres étrangers, si éloignés de nous, & le plus souvent cachés, mais la proximité même de la Lune & sa présence continuelle font la difficulté de connoître son cours.

SUR LA PLANETE

DE MERCURE.

V. les M. p. 95.

MErcure, qui à notre égard ne s'éloigne jamais plus du Soleil que de 28 degrés, en est ordinairement si proche, qu'il est perdu & abîmé dans sa lumiere, & invisible à la vûë simple. Quand il se dégage des rayons du Soleil le plus qu'il est possible, il est encore le plus souvent dans les Crepuscules, & comme il est beaucoup plus petit que la Terre, on ne le decouvre pas sans peine, supposé même que le tems soit alors favorable.

Depuis l'usage des Lunetes, on l'a vû plus commodément, mais rarement encore, & presque toûjours le matin ou le soir. Or les observations faites en ces tems-là sont

les moins sûres, & les moins propres à fonder des Tables du mouvement d'une Planete, à cause de l'inégalité des refractions horisontales, qui changent irreguliérement le lieu apparent de l'Astre, & cet inconvenient est d'autant plus grand, que l'Astre est plus rarement apperçû, parce-qu'on a moins d'observations qui se rectifient les unes les autres. Par cette raison, il faut voir Mercure proche du Meridien, s'il est possible.

L'avantage qu'on tire des Lunetes à l'égard de Mercure n'est pas qu'elles le grossissent, au contraire elles le font voir plus petit qu'à la vûë simple, ce qui a été expliqué en géneral dans l'Hist. de 1699 *, mais elles donnent lieu de le voir malgré une clarté qui l'effaceroit, ainsi que nous avons dit dans l'Hist. de 1700 *. M. de la Hire a cependant cherché long-tems Mercure dans le Meridien sans l'y pouvoir découvrir, peut-être faute d'avoir d'assés bonnes Tables de son mouvement, car pour trouver dans un si grand jour un aussi petit objet, il faut sçavoir assés précisément l'endroit où l'on doit le trouver, & y pointer la Lunete.

* p. 79.
p. 116. & 127.

Le mouvement du Soleil étant de tous les mouvemens celestes le plus exactement connu, on a tâché de voir Mercure le plus près du Soleil qu'il fût possible, afin de connoître plus sûrement par le lieu du Soleil dans le Ciel celui de Mercure. On a fait des observations de cette Planete sous la Zone Torride, où les Crepuscules plus courts que ceux de nos Climats la laissent voir plus près du Soleil. Mais malheureusement ces observations n'ont pas été assés sûres.

Les plus avantageuses de toutes ont été celles de Mercure vû sur le disque même du Soleil, car quelquefois dans sa conjonction *inferieure* il passe devant cet Astre, & en éclipse une très-petite partie, visible seulement à la Lunete. La premiere observation de cette espece qui ait jamais été faite fut celle de Gassendi en 1632, après quoi on en a fait encore cinq dans le Siécle passé.

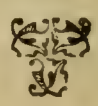
M. de la Hire ayant devant lui ces observations, &

celles qu'il avoit faites lui-même de Mercure le matin & le soir, en dresse de si bonnes Tables qu'enfin avec leur secours il trouva Mercure dans le Meridien pour la premiere fois le 22 Octobre 1699. Après cela il ne lui fût plus fort difficile de le revoir dans la même situation.

Il publia en 1702 ses Tables pour toutes les Planetes, & maintenant M. de la Hire le fils leur compare plusieurs observations de Mercure dans le Meridien. il l'y a vû le 28 Juillet 1705. à 11h 31′ du matin, & par consequent éloigné seulement du Soleil de 7 degrés à peu près. En même tems il compare aux Tables de M. de la Hire ce que donnent les Tables de Kepler, estimées de tous les Astronomes avec tant de justice. Il est naturel que celles de M. de la Hire l'emportent, fondées comme elles sont sur des observations en plus grand nombre, & sur les observations singulieres de Mercure vû dans le Soleil, que Kepler n'avoit pas ; aussi voit-on le plus souvent qu'elles s'éloignent beaucoup moins du Ciel, & elles s'en éloignent si peu que ce sera une espece de merveille pour ceux qui connoissent Mercure.

Il ne faut pas oublier ici que quelquefois Ms de la Hire n'ont pû découvrir Mercure au Meridien, quoiqu'alors il fût plus éloigné du Soleil, & par consequent plus facile à découvrir, que dans d'autres tems où ils l'avoient vû, & cela, sans pouvoir soupçonner qu'il y eût de la faute des Tables. Peut-être Mercure, aussi-bien que le cinquiéme Satellite de Saturne, qui devient invisible en certains tems*, a-t'il une partie considerable de son globe plus obscure que le reste, c'est-à-dire, moins propre à reflêchir vers nous la lumiere du Soleil.

* V. l'Hist. de 1705. p. 121.



SUR LES APPARENCES

DU CORPS DE LA LUNE.

DEpuis les Telescopes, la Lune est un objet tout nouveau pour nous. Voici quelles en sont les principales apparences. V. les M. p. 107.

1°. Elle a une infinité de montagnes plus hautes que les nôtres, à proportion de son globe, près de 60 fois plus petit que celui de la Terre. On voit l'ombre de ces montagnes, & on la voit changer selon les differens aspects du Soleil.

2°. Elle a des cavités ou lacunes, pareilles à celles que laisseroient nos Mers sur la surface de la Terre, si elles étoient anéanties, mais moins continuës, moins grandes, en beaucoup plus grand nombre, & plus profondes. Ce sont comme une infinité de grandes fosses. Par consequent la surface de la Lune n'est pas, ainsi que celle de la Terre, à peu près égale & de niveau, aux montagnes près, elle a de plus ces especes de fosses, qui y sont creusées en mille & mille endroits.

3°. Il y a d'autres endroits qui sans être des cavités paroissent obscurs, & ce sont ceux-là que l'on pourroit prendre pour des Mers. Mais M. de la Hire remarque qu'à les examiner de plus près ils ont aussi des cavités, ce qui ne peut guere convenir à un liquide. Il n'y aura donc point de Mers sur la Lune, & ces endroits obscurs seront seulement de grands Païs dont la terre sera naturellement plus noire.

4°. Ordinairement de grandes montagnes bordent les cavités.

5°. Des quadratures à l'opposition, les apparences de la surface de la Lune changent à tel point qu'à peine sont-elles reconnoissables. Un grand nombre de montagnes & de cavités qui se distinguoient aisément, ne se distinguent

plus du tout, ce qui vient, selon M. de la Hire, de ce que ces montagnes étant éclairées de côté dans les quadratures, leurs éminences devenoient sensibles à nos yeux, au lieu qu'elles ne le sont plus, quand elles sont éclairées en face, de la même maniere à peu près, que la saillie des figures d'un bas-relief placé à une distance mediocre est plus aisée à voir quand le jour y donne de côté. De plus, quantité d'endroits qui dans les quadratures ne sont que de petites cavités noires, à peine sensibles, deviennent dans l'opposition très-lumineux & très-brillants, & il y en a tel qui l'est tant qu'on a cru qu'il devoit jetter des flammes comme le Mont-Etna. M. de la Hire explique assés naturellement ce Phenomene, en supposant que la figure interieure de ces cavités est à peu-près sperique, & leur superficie blanche & fort raboteuse. Ces especes de grands Miroirs concaves ne peuvent nous renvoyer la lumiere du Soleil que quand ils en sont vûs à plan, & ils la renvoyent de tous côtés, parceque leur surface est raboteuse, & très-vivement, parcequ'elle est blanche. En joignant ensemble le changement qui arrive à l'apparence de ces cavités, & la difference de beaucoup de cavités & de Montagnes qui s'efface en même tems, il est aisé de voir combien la Lune doit-être differente d'elle-même du tems à l'autre.

Pour s'assurer de ces idées, M. de la Hire fit autrefois une representation en relief d'une petite partie de la Lune, telle qu'il l'imaginoit, & il vit qu'en differentes expositions au Soleil, elle répondoit assés bien aux apparences qu'il vouloit expliquer.

6°. Depuis près de 100 ans que l'on a les Telescopes, il ne doit pas être arrivé de grands changemens sur la surface de la Lune. Car M. de la Hire démontre qu'avec une Lune de 25 pieds, un espace qui ne seroit pas plus grand que Paris, y seroit fort sensible, & par consequent s'il s'y étoit fait quelque grand changement, qui eût occupé seulement une pareille étenduë, on l'auroit vû. Il n'en est pas ainsi de Jupiter & de Mars *. Il convient assés à une Pla-

* V. ci-dessus p. 103.

nete qui n'a point de Mers, que sa surface soit exempte de grands changemens.

7°. Il lui convient aussi de n'avoir point d'Atmosphere, & en effet il ne paroît pas que la Lune en ait, du moins sensiblement. D'habiles Observateurs ne s'apperçoivent point que les rayons d'une Etoile fixe, qui en sera tout proche, & qui touchera son disque, souffrent aucune refraction.

SUR UNE NOUVELLE ETOILE
QUI PAROIT ET DISPAROIT.

Rien ne seroit plus naturel que de croire exemptes de changement ces Regions immenses, où les Etoiles fixes semblent suspenduës. Depuis une longue suite de Siécles, le spectacle en est toûjours le même, mais il ne l'est qu'à des yeux peu éclairés ou peu attentifs, & maintenant qu'on observe le Ciel avec un plus grand soin, & de nouveaux secours, on voit qu'il a sa part des changemens, qu'on croyoit n'être que sublunaires. Il disparoît des Etoiles qui ont été vûës par les anciens, il en paroît de nouvelles, il y en a qui disparoissent & reparoissent, & quelques-unes dans de periodes assés reglées. V. les M. p. 115.

Auroit-on pensé qu'il n'y a pas dans le Ciel beaucoup de Constellations, où depuis cent ans il ne soit arrivé quelque changement sensible? M. Maraldi a remarqué, il y a déja quelque tems, que la Region où il en arrive le plus est la Voye de lait, comme si dans cette fourmillier de petites Etoiles il regnoit plus de mouvement & d'agitation.

Dans l'espece de celles qui paroissent & disparoissent assés regulierement, tout le monde connoît l'Etoile de la Baleine, dont la révolution est ordinairement de 11 mois, & celle du Cigne, dont la révolution est de 13. M. Maraldi en a découvert dans l'Hidre une troisiéme, dont il a trouvé que la révolution étoit de 2 ans.

Les Etoiles fixes étant autant de Soleils, car à l'énorme distance où elles sont, & que M. Hugens fait 27664 fois plus grande que celle de la Terre au Soleil, elles ne brillent pas d'une lumiere refléchie ; il faut ou que ces Soleils qui paroissent & disparoissent ayent un mouvement par lequel ils s'approchent & s'éloignent de notre monde, ce qui n'est guere vrai-semblable, puisqu'il semble qu'ils devroient avoir tous un pareil mouvement, ou que leurs globes soient en partie lumineux, en partie obscurs, & qu'ils tournent sur leurs axes dans les tems où se fait la periode de l'apparition. Cette ingenieuse hipothese de feu M. Boüillaud est la plus recevable, & elle a été depuis appliquée à de pareils Phenomenes, comme au cinquiéme Satellite de Saturne. Il est fort possible que dans ce nombre infini de Soleils, il y en ait qui ne soient que des demi-Soleils, & d'autant plus que notre Soleil lui-même a des taches, qui le réduiroient à n'être qu'un demi Soleil, si elles étoient fixes & plus étenduës. En cas que des Planetes habitées tournent autour de tous les Soleils, il est aisé de s'imaginer quel est l'effroy de habitans, aux yeux de qui leur Soleil disparoît pour un tems considerable, ou plûtôt quelle est la tranquillité avec laquelle ils voyeut un spectacle ordinaire pour eux, & qui seroit terrible pour nous.

Les révolutions qu'on est obligé de donner aux Etoiles de la Baleine, du Cigne, & de l'Hidre sur leurs axes en 11 mois, 13 mois, & 2 ans sont beaucoup plus longues que celle du Soleil, qui n'est que de 27 jours & demi. Mais il ne paroît pas qu'on puisse tirer delà aucune consequence pour la proportion de la grosseur des Globes, comme si les plus grands employoient plus de tems à tourner. Dans notre Monde, Jupiter mille fois plus gros que la Terre, tourne cependant plus de deux fois plus vîte.

Les Etoiles qui paroissent & disparoissent sans révolutions reglées, peuvent être des Soleils dont les Taches soient fort grandes, mais non pas fixes, & peut-être même capables de s'évanoüir entierement. Celles de notre

Soleil

Soleil nous donnent lieu d'imaginer sur cette matiere un assés grand nombre de varietés.

SUR LES TROIS ECLIPSES DE CETTE ANNÉE.

LA premiere des trois Eclipses de cette année a été lunaire. Le commencement qui avoit été déterminé dans la connoissance des tems à 31′ après minuit, 28 Avril, ne pût être observé à cause de la pluïe & des nuages, non-plus que plusieurs autres phases. Mrs Cassini & Maradi observerent la fin à 3h 3′, & la grandeur de 5 doits 52′. Mrs de la Hire observerent la fin à 3h 4′, & la grandeur de 5 doits 40′. V. les M. p. 155. 157. & 421.

Les observations de cette Eclipse, quoiqu'en petit nombre, & même un peu douteuses, n'ont pas laissé d'être d'un grand usage. Heureusement le P. Boutin Missionnaire Jesuite étant alors au Port de Paix dans l'Isle de S. Domingue observa aussi, & il en a envoyé un petit Memoire au P. Goüye, qui l'a communiqué à l'Academie. Quoique le P. Boutin n'ait observé qu'avec sa montre, & à la vûë, la grandeur de l'Eclipse qu'il a marquée à 10′ près de Mrs de la Hire, a fait ajoûter foi à ses autres observations. M. de la Hire a pris celle qu'il a faite de la fin de l'Eclipse à 9h 40′ du soir le 27 Avril au Port de Paix, & la comparant à l'observation correspondante de Paris, il en conclut la difference de longitude de ces deux lieux de plus de 81 degrés, au lieu que les meilleures Cartes que nous ayons jusqu'à present ne la marquent que d'environ 75.

Par les observations que les Jesuites Missionnaires ont faites en divers lieux de l'Orient, il n'y a pas encore 20 ans, on a trouvé les differences de longitude beaucoup moindres que ne les marquoient les Cartes les plus estimées, & l'Asie s'est rapprochée de nous de plus de 500 lieuës. Maintenant voici tout au contraire l'Amerique qui s'en

éloigne, & les 6 degrés dont l'Isle de S. Domingue est plus occidentale qu'on ne pensoit, pris sous l'Equateur, valent 150 lieuës moyennes de France. Mais pourquoi la Geographie est-elle tombée à l'égard de l'Asie & de l'Amerique dans des erreurs opposées? M. de la Hire croit que cela vient de ce que les déterminations des longitudes dans les Cartes n'ont pas été fondées jusqu'à present sur des observations astronomiques, mais sur l'estime des Navigateurs, qui ont cru les lieux d'autant plus éloignés que la navigation étoit plus difficile; or il est certain qu'elle l'est plus d'ici en Asie qu'en Amerique. On pourroit ajoûter qu'à l'égard de l'Asie l'erreur excessive de Ptolomée a influé sur les Cartes modernes, telles que celles de Mrs Sanson & Duval. M. Cassini a remarqué, il y a déja du tems, que selon Ptolomée la Chine seroit de plus de 45 degrés plus orientale qu'elle n'est effectivement, & il est assés naturel que l'on n'ait pas osé faire d'abord à la Geographie de Ptolomée une aussi grande correction qu'il auroit fallu, & que l'on ait conservé quelque prévention pour le grand éloignement de la Chine. Peut-être est-ce par cette raison que du côté de l'Amerique l'erreur, qui a eu ce principe de moins, n'a pas été si grande.

V. les M. p 165. 169. 172. 249. La seconde Eclipse de cette année suivit la premiere d'aussi près qu'il soit possible, puisqu'il n'y eût que l'intervalle de la Pleine Lune à la Nouvelle Lune. Elles furent encore d'autant plus proches, qu'au tems de la seconde la Lune étoit vers son Perigée, & par consequent dans sa plus grande vîtesse, & alors son mouvement vrai surpassa le moyen presque autant qu'il le puisse surpasser. Cette seconde Eclipse fut donc solaire, & elle arriva le 12 May au matin à Paris.

L'Astronomie peut se venter, & elle conservera cette gloire dans les siécles à venir, que jamais phenomene celeste n'a eu de plus grands & de plus illustres Observateurs. Le Roi voulut voir faire les observations par des Astronomes de l'Academie, & pour cela M. Cassini le fils & M. de la Hire le fils allerent à Marli, avec tous les in-

ſtrumens neceſſaires. Toute la Maiſon Royale & toute la Cour furent témoins des operations, & Monſeigneur le Duc de Bourgogne, qui fait bien voir que les Sciences peuvent trouver leur place parmi les occupations des plus grands Princes, détermina lui-même pluſieurs Phaſes, le commencement, par exemple, qui fut douteux à cauſe des nuages, & qu'il fixa par une eſtime fort juſte à 8h 26'. La fin fut à 10h 41'. Du diametre apparent du Soleil diviſé en 12 doits, il y en eut 11 couverts dans la plus grande obſcurité, à quelque minutes près, chaque doit ayant 60 minutes.

Quoiqu'il ne nous reſtât que la 11me partie du diametre du Soleil, la lumiere, qui étoit à la verité d'une pâleur effrayante & ſiniſtre, ne laiſſoit pas d'être encore aſſés grande, & tous les objets ſe diſtinguoient auſſi facilement que dans le plus beau jour. Comme les eſpaces compris dans des cercles differens ſont en même raiſon que les quarrés des diametres, ſi l'eſpace qui étoit encore viſible dans le diſque du Soleil eût été parfaitement circulaire, nous n'aurions eu que la 144me partie de la lumiere que nous avons ordinairement, mais cet eſpace étant un peu plus grand à cauſe des *cornes* de l'Eclipſe, il nous reſta auſſi un peu plus de lumiere, mais nous en eûmes moins que Saturne, qui étant 10 fois plus éloigné du Soleil que nous, n'en a que 100 fois moins, & cela nous doit aſſurer que cette Planete malgré ſon grand éloignement du Soleil en eſt ſuffiſamment éclairée, quand même ſes Habitans n'auroient les yeux faits que comme nous.

Au tems de cette Eclipſe le Soleil étoit vers ſon Apogée, auſſi-bien que la Lune vers ſon Perigée ; & par conſéquent le diametre apparent du Soleil étoit à peu-près le plus petit, & celui de la Lune le plus grand qu'il puiſſe être, circonſtance qui rend l'Eclipſe plus grande, & ſa durée plus longue. L'excès du diametre apparent de la Lune ſur celui du Soleil étoit environ de 2' $\frac{1}{2}$.

M. Caſſini ne manqua pas d'employer la Methode qu'il a inventée depuis long-tems pour tracer le chemin de

l'ombre de la Lune sur la Terre, & déterminer par-là tous les lieux qui ont vû l'Eclipse, soit totale, soit partiale, soit centrale ou non, & les differens tems où ils l'ont vûë. Dans l'Eclipse solaire du 23 Sept. 1699 rapportée par l'Histoire de la même année *, Il avoit décrit le mouvement de l'ombre d'Occident en Orient déclinant vers le midi, & l'avoit fait commencer par les parties Orientales de l'Amerique Septentrionale, & finir à la partie Occidentale de la Chine, après avoir traversé le milieu de l'Afrique & l'Equateur. Dans l'Eclipse de cette année, le mouvement de l'ombre fut d'Occident en Orient déclinant vers le Septentrion, il commença dans l'Oceant Atlantique en deçà de l'Equateur & de l'Amerique, traversa la Mediterranée, alla jusques dans la grande Tartarie, & du côté du Septentrion une partie de l'ombre tomba hors de la Terre, aussi-bien que dans l'Eclipse de 1699. Ces deux Eclipses étant comparées ensemble, l'ombre de la premiere alloit du Nord-Oüest au Sud-Est, & celle de la seconde du Sud-Oüest au Nord-Est, & si elles avoient laissé des traces, elles se croiseroient en Pologne.

* p. 76. & suiv.

Cette difference de la direction des deux mouvemens est produite par la differente situation qu'avoient à l'égard du Soleil les signes d'où venoit la Lune. Quand elle vient se joindre au Soleil, elle vient toûjours d'un signe ou d'un degré plus occidental que celui où est le Soleil, mais ce degré plus occidental peut-être ou au midi ou au Septentrion du Soleil. Il est très-aisé de faire l'application de cette remarque.

Dans l'endroit déja cité de l'Hist. de 1699, nous avons dit que le mouvement de l'ombre de la Lune sur la Terre est plus rapide que celui d'un boulet de Canon dans l'air. Cette prodigieuse vîtesse de l'ombre vient de ce que tandis que la Lune parcourt un degré de son Orbe, son ombre parcourt sur la Terre une espace égal. Il faut donc voir ce que vaut un degré de l'Orbite de la Lune appliqué sur la circonference de la Terre. Les circonferences de deux Cercles étant comme leurs rayons, & la distance de la

Lune à la Terre, ou, ce qui est la même chose, le demi-diametre de son Orbite étant environ de 60 demi-diametres de la Terre, un degré de l'Orbite de la Lune vaut 60 degrés d'un grand Cercle de la Terre, ou 1500 lieuës. Or la Lune parcourt un degré de son Orbite environ en 2 heures, ce qui donne à son ombre une vîtesse de 12 lieuës par Minute, & dans ce même tems un boulet de Canon ne parcourt que près de 3 lieuës. Nous n'entrons point ici dans les circonstances particulieres, qui peuvent faire varier la vîtesse de l'ombre, telles que sont les inégalités du mouvement de la Lune, ses differentes distances à la Terre, la differente obliquité de la projection de l'ombre sur differentes parties de la surface du globe terrestre, la diversité même des refractions des rayons du Soleil.

Le Languedoc, la Provence, & le Dauphiné se sont trouvés sur la route de la ligne qui partageoit par le milieu l'ombre de la Lune le 12 Mai, c'est-à-dire, qu'ils ont vû l'Eclipse totale, & même centrale. Les lieux qui voyent une Eclipse totale peuvent ne la pas voir centrale, parce que la Lune peut couvrir entierement le Soleil, sans que la ligne tirée du lieu de l'observation au centre de la Lune passe aussi par le centre du Soleil. Mais ceux qui voyent une Eclipse centrale la voyent aussi totale, si elle peut l'être, & de la plus grande durée dont elle puisse être, du moins à peu de chose près. Les lieux qui voyent l'Eclipse totale la voyent plus ou moins longue, selon qu'ils sont de part & d'autre plus ou moins éloignés des lieux qui la voyent centrale.

A Arles l'Eclipse fut centrale, & dura totale pendant 5′, ce qui est à peu-près la plus grande durée qu'une Eclipse totale de Soleil puisse avoir. Puisque le diametre apparent de la Lune excedoit celui du Soleil de 2′ ½, la Lune après qu'elle eut entierement couvert le Soleil, eut ce 2′ ½ à parcourir dans son Orbite, avant que de pouvoir laisser la moindre partie du Soleil découverte. Or si la Lune fait 1 degré de son Orbite en 2 heures, elle en fait 2′ ½ en 5′. A Arles, aussi-bien que dans plusieurs autres Villes qui eu-

rent l'Eclipse ou centrale ou totale, l'obscurité fut si grande que l'on ne vit plus ni à lire, ni à travailler; à peine se reconnoissoit-on les uns les autres; les Oiseaux de nuit sortirent de leurs trous, & ceux qui volent de jour se cacherent. Les Astronomes virent auprès du Soleil Mercure, Venus & Saturne, & plusieurs fixes de toutes parts. Quand la plus petite partie du Soleil commença à reparoître, ce fut comme un éclair subit & très-vif.

La Societé Royale des Sciences établie depuis peu à Montpellier sur le modele de l'Academie, observa avec beaucoup de soin cette Eclipse. Ces Mrs ont remarqué que pendant qu'elle fut totale l'obscurité ne ressembla ni à celle de la nuit ni à celle du Crepuscule, mais qu'elle fut d'une espece particuliere, qui ne se peut non-plus exprimer que la lumiere ou le son. Il est assés étonnant que la varieté qui regne dans la Nature s'étende jusques sur l'obscurité, qui semble n'avoir qu'une cause, & par consequent devoir être fort uniforme.

Mais de tous les Phenomenes de cette Eclipse le plus considerable, & en même tems le plus difficile à expliquer, ce fut une Couronne d'une lumiere pâle, large de la 12me partie du diametre de la Lune, qui parut autour de son disque dans les lieux où l'Eclipse fut totale. Les Astronomes de la Societé Royale de Montpellier, plus attentifs & plus exacts que d'autres Observateurs, remarquerent que cette Couronne, qui, à la verité, ne s'étendoit point avec une égale vivacité au-delà des bornes qu'on vient de lui donner, alloit beaucoup plus loin en s'affoiblissant toûjours, & formoit un grand espace circulaire de 8 degrés de diametre, & dont la Lune étoit le centre.

D'où pouvoit venir cette Couronne lumineuse? puisque le diametre apparent de la Lune surpassoit celui du Soleil, l'Eclipse n'étoit pas *annulaire*, c'est-à-dire, que la circonference du disque du Soleil ne demeuroit pas découverte, & d'ailleurs l'éclat de cette Couronne étoit sans comparaison moindre que celui de la plus petite par-

tie du Soleil. Cette apparence auroit pû être causée par une Atmosphere de la Lune, mais il n'est gueres vrai-semblable qu'elle en ait, puisque quand elle rencontre quelque Etoile & la cache, on ne voit point ordinairement ou la figure ou la vîtesse apparente de cette Etoile changer par la refraction que l'Atmosphere de la Lune causeroit à ses rayons,

M. Cassini a donc recours à une autre hipothese. Il découvrit en 1683. une Lumiere qui suit le Soleil, & qui l'a peut-être toûjours suivi, sans avoir jamais été apperçûë jusques-là, parce que quand il y a des clairs de Lune elle en est toûjours effacée, & hors delà, presque toûjours par les Crepuscules, qui ne la laissent paroître que quand ils sont les plus courts, & n'en laissent paroître que l'extrémité la plus foible. Il supposa que cette Lumiere étoit causée par une matiere répanduë autour du Soleil jusqu'à une certaine distance, plus épaisse à proportion qu'elle en étoit plus proche, & capable de reflechir ses rayons vers nos yeux, lorsqu'ils n'y viennent plus directement. Il avança même alors, conformément à son sistême, que *si on pouvoit voir cette Lumiere en presence du Soleil, elle lui formeroit une espece de chevelure*, au lieu qu'elle ne paroissoit qu'une traînée de lumiere d'une certaine largeur, toûjours étenduë sur le Zodiaque, parce qu'on ne la voyoit que quand le Soleil étoit sous l'horison. Il y a tout lieu de croire que la grande Couronne qui dans l'Eclipse totale a été vûë autour de la Lune, ou, ce qui revient au même, autour du Soleil, est la Chevelure prédite par M. Cassini. En effet, elle n'a paru qu'au même degré d'obscurité à peu-près où l'on voit, après la fin des Crepuscules, la Lumiere qui s'étend sur le Zodiaque jusqu'à un certain terme. Il est très-possible, pour ne rien dire de plus, que cette même Chevelure ait déja paru dans d'autres Eclipses, & que faute de connoître la Lumiere qui la produisoit, on ait pris pour annulaires des Eclipses totales, & même plus que totales. Plus on fait de découvertes, plus on voit qu'on n'en sçauroit trop faire, & qu'elles sont toutes importantes.

V. les M. p. 462. Toutes les observations de cette Eclipse que l'Academie pût avoir de differens lieux, servirent, selon la methode de M. Cassini, à déterminer les Longitudes.

V. les M. p. 471. La troisiéme Eclipse de cette année fut une Eclipse de Lune, qui arriva le 21 Octobre au soir. Selon la *Connoissance des Tems* le commencement devoit être à $6^h\ 3'\ 37''$, le milieu à $7^h\ 22'\ 1''$, la fin à $8^h 40'\ 25''$. La grandeur devoit être de 7 doits 26'. Le tems fut ici très-contraire à l'observation, & la rendit fort imparfaite, mais à Marseille & à Boulongne en Italie il fut plus favorable, & les observations qu'on y fit se sont trouvées, après les reductions necessaires, assés conformes à la *Connoissance des Tems*.

SUR UNE CONJONCTION DE JUPITER. AVEC LE COEUR DU LION.

V. les M. p. 482. LEs meilleures Tables Astronomiques & les plus propres à representer les mouvemens celestes, étant une fois construites, ce n'est pas un repos acquis aux Astronomes. Elles demandent à être tous les jours comparées avec le Ciel, soit parce qu'elles ne peuvent jamais être de la derniere exactitude, soit parce que peut-être le Ciel changera. M. de la Hire ayant comparé à ses Tables de Jupiter une observation qu'il fit le 17 Octobre 1706 de la conjonction de cette Planete avec l'Etoile nommée le Cœur du Lion, ou *Regulus*, fut content de leur justesse, & à cette occasion il examina les deux seules conjonctions de Jupiter avec la même Etoile, dont il y ait memoire parmi les Astronomes.

La premiere est de l'an 508 observée à Athenes, trouvée par M. Boüillaud dans un ancien Manuscrit de la Bibliotheque du Roi. La seconde a été observée en 1623. par

par M. Boüillaud lui-même, encore fort jeune. Nous n'entrerons point dans le détail des reflexions de M. de la Hire sur ces deux observations, & sur les conséquences que M. Boüillaud en a tirées pour la longitude ou la latitude de Jupiter. Nous rapporterons seulement ici un fait digne de remarque. M. de la Hire voyant ses Tables trop éloignées de la position que M. Boüillaud donnoit à Jupiter dans la conjonction de 508, & soupçonnant quelque erreur dans les calculs de cet Astronome, quoique très-habile, trouva qu'effectivement il n'avoit pas fait attention que l'année 508 étoit Bissextile, & cette legere inadvertance étoit la seule cause de tout le mal. Ce qui prouve combien il est aisé de tomber dans une semblable erreur, c'est qu'il est même difficile de s'appercevoir qu'un autre y soit tombé.

Parmi toutes les discussions délicates où M. de la Hire est conduit par le sujet qu'il traite, il propose un soupçon qui lui est venu, que le mouvement des Nœuds des Planetes pourroit bien n'avoir pas toûjours la même direction, mais retrograder quelquefois, & avoir des especes de vibrations irregulieres. A l'égard de la Lune, cela est constant, il croit en être sûr pour Saturne; peut-être dans les autres Planetes les irregularitez du mouvement des Nœuds sont elles-moins sensibles. Il est toûjours certain que quand on ramene les choses à la Phisique le préjugé est grand contre l'uniformité ou l'égalité exacte.

SUR LES TACHES

DU SOLEIL.

SElon le plan que nous avons exposé dans l'Hist. de 1705 *, & en supposant les connoissances préliminaires qui y ont été établies, voici le résultat des Observations que Mrs Cassini, de la Hire & Maraldi ont faites des Taches qui ont paru cette année dans le Soleil. * p. 126.

Le 6 Avril, on apperçut une Tache de mediocre grosseur, éloignée du bord Oriental du Disque d'un peu plus de 3′, dont le diametre du Soleil en contient 32, & plus élevée de 4′ à peu-près que le centre du Soleil. Elle étoit assez nonce, composée d'une Tache plus grosse, qui avoit sa nebulosité à l'ordinaire, & de quelques autres petites. Le tout étoit environné d'une grande Facule, ce qui marque assez souvent que les Taches diminuent de grandeur, & sont prêtes à se dissiper. En effet, celle-ci diminua tellement qu'on ne pût la voir que jusqu'au 10. Elle s'étoit toûjours avancée vers l'Occident.

Le 4 Juin, on vit une petite Tache presque au milieu du Disque. Elle n'avoit point paru 2 jours auparavant, quoiqu'on eût eu attention à en chercher. Elle étoit plus basse que le centre du Soleil de 1′ ½. Le lendemain & les jours suivans, on ne la vit plus.

Le 19 Juin, on apperçut un amas de Taches qui avoit déja passé le milieu du Disque, & qui cependant n'avoit point paru les jours précedens. La plus grosse Tache de cet amas étoit plus basse que le centre du Soleil de près de 4′. Depuis le 19, on ne put observer juqu'au 23, & alors on ne vit plus rien, quoique ces Taches n'eussent pas encore pû être portées dans l'Hemisphere caché du Soleil par son mouvement de 27 jours & demi.

Le 14 Septembre, on apperçut une Tache éloignée de 5′ du bord Oriental du Disque, & plus basse que le centre de 9′. Le tems ne permit point de l'observer après le 20. Dans la derniere observation elle n'étoit plus au-dessous du centre du Soleil que d'un peu plus de 1′.

On ne doit pas être surpris que la *déclinaison* ou *latitude* des mêmes Taches par raport au centre du Soleil varie, quand même on les suposeroit fixes, & sans aucun mouvement particulier. Nous avons expliqué dans l'Hist. de 1701 * que par la composition du mouvement annuel de la Terre autour du Soleil, & du tournoyement du Soleil autour de son axe, l'apparence est la même à nos yeux, que si la Terre étant immobile, l'Equateur du Soleil après

* p. 104. & suiv.

avoir été dans le plan de l'Ecliptique en ſortoit, & s'élevoit peu-à-peu au-deſſus. Or il eſt évident qu'en ce cas-là ce que nous appellons le centre du Soleil, ou le milieu de ſon Diſque apparent changeroit toûjours, & s'approcheroit ou s'éloigneroit d'une Tache ſupoſée fixe.

Le 10 Novembre, il parut près du bord Oriental du Soleil, & au-deſſous du centre, deux Taches aſſez groſſes, mais peu obſcures, & d'un degré d'obſcurité tel à peu-près que quand elles vont diſparoître. Auſſi ne pût-on les voir que juſqu'au 13. La plus Orientale dût paſſer par le milieu du Diſque le 15 vers le Midi.

Le 7 Decembre, on vit vers le bord Oriental du Soleil un amas de Taches, parmi leſquelles il y en avoit trois plus groſſes, dont la plus conſiderable étoit la plus Occidentale. Elle étoit plus baſſe que le centre du Soleil de quelque 5'. Le 11 elle s'étoit avancée vers l'Occident ſelon que le demande l'hypotheſe de la révolution du Soleil en 27 jours & demi, & elle s'étoit élevée de près de 3' par raport au centre. Tout l'amas étoit plus de 16" à paſſer par le Meridien.

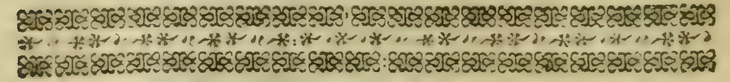
Si l'on ſupoſe avec M. Caſſini que la parallaxe du Soleil ſoit de 10" à peu-près, ou, ce qui eſt la même choſe, que le demi-diametre de la Terre vû de dedans le Soleil fût vû ſous un angle de 10", il s'enſuit que le diametre de la Terre obſervé de dedans le Soleil paſſeroit par un Meridien en 1" $\frac{1}{3}$, par conſequent en 12 fois moins de tems que cet amas de Taches. Et ſi on le ſupoſe ſpherique, ſon diametre étant 12 fois plus grand que celui de la Terre, la maſſe entiere ſera 1728 fois plus groſſe. Une pareille maſſe n'eſt dans le Soleil qu'une Tache inviſible à tous les yeux, & peut-être une eſpece d'écume flotante ſur la ſurface, qui s'eſt formée par accident, & qui ſe diſſipe aſſez vîte.

La plus groſſe Tache paſſa par le milieu du Diſque le 12 ſur les 6 heures du ſoir, de ſorte qu'elle pouvoit être la même qui y avoit paſſé le 15 Novembre à Midi.

Le 17 elle étoit plus haute de près de 1' que le centre

du Soleil. Les jours ſuivans le tems ne permit pas d'obſerver.

MOnſieur Maraldi a communiqué quelques Obſervations faites par les PP. Jeſuites de Lyon dans leur Obſervatoire, & on les a comparées aux Obſervations correſpondantes que l'on avoit.



ACOUSTIQUE.

MOnſieur Carré a commencé à lire un Traité Mathematique des Cordes par rapport aux Inſtrumens de Muſique.

MECHANIQUE.

SUR LES LOIX DU CHOC DES CORPS.

V. les M. p. 441. IL eſt preſque honteux à la Philoſophie de s'être aviſée auſſi-tard qu'elle a fait, qu'il y eût de certaines Regles ou *Loix* ſelon leſqu'elles les Corps ſe communiquent du mouvement. Mais auſſi depuis cent ans ou environ, que l'on a eu cette idée, qui doit être un des premiers fondemens de la Phiſique, on a bien reparé le tems perdu,

les plus celebres Philosophes se sont appliquez à un sujet si utile, & le grand Descartes lui-même l'a rendu encore plus fameux par les erreurs où il est tombé en le traitant. Tout ce qu'un grand nombre d'Auteurs en ont écrit de plus considerable, a été ramassé par M. Carré dans une seule Formule universelle, d'où l'on tire tout d'un coup une infinité de propositions répanduës en differens endroits, & souvent prouvées par de longs & penibles circuits.

Les Loix du Choc des Corps sont très-simples, mais dans presque tous les effets qu'elles produisent à nos yeux, elles sont si enveloppées, & si étouffées sous la multitude des differentes circonstances, qu'il est difficile de les en démêler, & de parvenir à les voir dans leur simplicité naturelle. Le secret est d'écarter d'abord le plus de circonstances qu'il est possible, & de n'envisager que les cas où il en entre le moins.

Il ne s'agit ici que des Corps qui se choquent directement, ou, ce qui est la même chose, dont les Centres de gravité se meuvent sur une même ligne droite.

On suppose pour un temps que les Corps sont ou parfaitement durs ou parfaitement mous, c'est-à-dire, ou qu'ils sont incapables de changer de figure par le choc, ou que s'ils en changent, ils ne reprennent point celle qu'ils avoient auparavant, en un mot, qu'ils sont sans ressort, car un corps à ressort n'est ni parfaitement dur puisqu'il change de figure par le choc, & qu'il s'applatit, par exemple, ni parfaitement mou, puisqu'il reprend ensuite sa premiere figure.

C'est une certaine force qui fait le mouvement, & cette force doit être plus grande pour mouvoir un plus grand corps, ou pour mouvoir le même corps avec plus de vîtesse. Si elle demeure la même, & qu'elle agisse toute entiere, elle donnera une moindre vîtesse à un plus grand corps, & une plus grande vîtesse à un plus petit, & ces vîtesses seront en raison renversées des masses ou pesanteurs des corps. Ainsi la force par laquelle un corps se meut,

ou, ce qui est la même chose, sa quantité de mouvement est le produit de sa masse ou pésanteur par sa vîtesse, & ce produit peut demeurer toûjours égal, tandis que ces deux grandeurs qui le forment varieront d'une infinité de manieres differentes, ce qui est le grand Principe de la Mechanique. Pour sçavoir quelle est la vîtesse d'un corps dont on connoît la quantité de mouvement & la masse, il n'y a donc qu'à diviser la quantité de mouvement par la masse, & le quotient est la vîtesse. Si l'on supose que la masse soit augmentée sans que la quantité de mouvement le soit, la vîtesse devient moindre, puisque la même quantité de mouvement est divisée par un plus grand nombre.

Comme il est souvent utile, & même necessaire d'aller jusqu'à l'Infini, quoique les recherches ne se terminent qu'à des grandeurs finies, on trouve par les Regles de l'Infini que la plus grande masse finie n'ayant qu'une vîtesse infiniment petite, ou, ce qui revient au même, étant en repos, n'a qu'une force infiniment petite ou nulle par raport à la plus petite masse finie qui aura la plus petite vîtesse finie. Delà vient qu'on dit que la force de la Percussion ou du Choc est infinie par raport à celle de la simple pésanteur. De même, une masse infiniment petite mûë avec la plus grande vîtesse finie, n'aura qu'une force infiniment petite.

Il est clair par la seule Metaphisique, & indépendamment de l'experience, que deux forces égales étant opposées, elles empêchent absolument l'action l'une de l'autre, & se détruisent mutuellement entant qu'elles sont forces agissantes, qu'elles ne se détruisent nullement si elles ne sont nullement opposées, & que si deux forces sont inégales & opposées, il ne reste de leur combat que l'excès de la plus grande sur la plus petite. Delà il suit,

1°. Que deux Corps, tels que nous les avons suposés, se rencontrant directement avec des quantités de mouvement égales, s'arrêtent l'un l'autre, & demeurent en repos après le Choc.

2°. Que si un Corps en mouvement en rencontre en un

repos, il le pouſſera devant lui avec une vîteſſe moindre que celle qu'il avoit avant le choc, & qu'ils iront tous deux enſemble avec cette vîteſſe commune ſans ſe ſeparer. Car le corps mû doit conſerver ſa force ou quantité de mouvement toute entiere, puiſque le corps qu'il rencontre ne lui oppoſe que ſon repos, qui n'eſt tout au plus qu'une force infiniment petite, & il arrive par le choc la même choſe que ſi la quantité de mouvement du corps mû demeurant la même, ſa maſſe étoit augmentée de celle du corps en repos; ſa vîteſſe qui devient commune aux deux corps eſt donc diminuée.

3°. Que ſi deux corps ſe choquent avec des quantités de mouvement inégales & oppoſées, ils iront tous deux enſemble après le choc ſelon la direction du plus fort, & avec une vîteſſe commune moindre que la ſomme des vîteſſes qui ont precedé le choc. La plus petite quantité de mouvement ayant peri par le choc, & avec elle une portion égale de la plus grande, il n'eſt reſté pour toute quantité de mouvement que l'excès de la grande ſur la petite, & c'eſt la même choſe après le choc que ſi le corps le plus fort, n'ayant que cette ſeule quantité de mouvement, eût rencontré le plus foible en repos.

4°. Que ſi deux corps ayant la même direction & des vîteſſes inégales ſe rencontrent, ils iront tous deux enſemble après le choc avec une vîteſſe commune moindre que la ſomme des deux vîteſſes qui ont precedé le choc. Les deux quantités de mouvement n'ayant rien d'oppoſé ſubſiſtent toutes deux après le choc, & c'eſt la même choſe que ſi l'un des deux corps qui auroit eu une quantité de mouvement égal à ces deux quantités, avoit rencontré l'autre en repos; or on a vû qu'en ce cas-là quelle qu'eût été ſa vîteſſe avant le choc elle ſeroit moindre après.

Il eſt très-aiſé d'imaginer en nombres une infinité d'Exemples de ces 4 cas, en donnant aux deux corps telles maſſes, & telles vîteſſes qu'on voudra.

On voit par ces 4 cas, qui comprennent tout ce qui eſt poſſible en cette matiere, 1°. Que la quantité de mouve-

ment qui a precedé le choc ne peut jamais augmenter par le choc. 2°. Qu'elle peut diminuer & même s'anéantir. 3°. Que la vîtesse diminuë toûjours.

Il periroit donc du mouvement à chaque instant en une infinité d'endroits de l'Univers, & la Nature tomberoit peu à peu dans une langueur, suivie à la fin d'un repos universel & funeste à tous les Estres, s'il n'y avoit une ressource perpetuelle pour la reproduction du mouvement. C'est le ressort, dont peut-être aucun corps n'est absolument privé. Il n'y en a point qui soit ni parfaitement dur, ni parfaitement mou. Ils s'applatissent par le choc, entant que mous, mais par leur ressort naturel ils reprennent leur figure, entant que durs, & ils la reprennent parfaitement, si leur ressort est parfait, comme on le supposera toûjours dans la suite. Le mouvement que nous avons consideré jusqu'ici dans les corps conçûs sans ressort s'apellera *simple*, par oposition au mouvement que le ressort produit.

Il est certain que le ressort, qu'elle qu'en soit la cause Phisique, est une force qui fait qu'un corps applati ou enfoncé par un certain degré de compression, ou enfin changé quant à sa figure de telle maniere qu'on voudra, la reprend entierement. Or comme ce changement de figure est tout l'effet de la force étrangere dont il a souffert l'impression, il ne peut détruire entierement cet effet sans une force égale, & par consequent la force par laquelle un corps à ressort se rétablit est toûjours égale à celle qui l'a ou applati ou enfoncé, &c. Mais quand un corps à ressort choqué ou applati par un autre corps rétablit sa figure, il repousse en arriere celui dont il a été choqué, donc il le repousse avec une force égale à celle qu'avoit avant le choc le corps qui a choqué, donc il tend à lui imprimer la force ou quantité de mouvement qu'il avoit, & par consequent à lui rendre sa premiere vîtesse, mais avec une direction contraire.

Il suit delà que si je presse entre mes mains deux corps à ressort l'un contre l'autre, par exemple, deux balles, leurs deux ressorts agissent l'un contre l'autre avec une

force

force égale à celle de cette pression, & c'est la même chose que si un seul ressort d'une force égale à la pression de mes deux mains, étoit placé entre les deux balles, & prêt à se débander contre toutes les deux, & à envoyer l'une d'un côté, l'autre de l'autre. Or si les deux balles sont supposées inégales en grosseur, la force du ressort placé entre elles agissant également contre les deux ne pourra imprimer qu'une moindre vîtesse à la plus grosse, tandis qu'elle en imprimera une plus grande à la plus petite, & par consequent dès que les balles, mises en ressort par une pression mutuelle, pourront se separer, elles prendront des vîtesses qui seront en raison renversée de leurs masses, chacune d'un côté opposé. Voilà le seul principe de tous les mouvemens de ressort.

Il ne reste plus qu'a voir quelle est dans le choc de deux corps la force qui les met en ressort, car elle sera necessairement partagée en raison renversée de leurs masses. Cette force n'est que leur vîtesse *respective*, c'est-à-dire, la quantité dont ils s'approchent l'un de l'autre en un certain tems. S'il n'y a qu'un des deux corps qui se meuve, la vîtesse respective est toute la vîtesse *absoluë* de ce corps. S'ils se meuvent tous deux avec des directions contraires, ou l'un vers l'autre, la vîtesse respective est la somme des vîtesses absoluës, & ce n'en est que la difference, s'ils se meuvent du même sens, ou avec la même direction. On sous-entend que dans ce dernier cas leurs vîtesses soient inégales: car autrement ils ne s'approcheroient jamais, & la vîtesse respective seroit nulle, quelques que fussent les deux vîtesses absoluës égales. Il est évident que plus la vîtesse respective est grande, plus le choc est violent, & plus les deux corps sont mis en ressort.

Pour déterminer tous les effets du choc, il ne faut donc que voir quelles sont les quantités de mouvement, ou les vîtesses résultantes du mouvement simple, & combiner avec elles les quantités de mouvement ou les vîtesses résultantes du mouvement de ressort, ou, ce qui est la même chose, la vîtesse respective partagée entre les deux

corps selon la raison renversée de leurs masses. Toute l'attention qu'il faut avoir dans cette combinaison, est que des deux vîtesses produites par le mouvement de ressort, l'une a toûjours une direction contraire à la vîtesse commune produite par le mouvement simple, & l'autre toûjours la même direction, ce qui augmente ou diminuë, & enfin modifie en une infinité de manieres differentes les effets du mouvement simple.

Dans le premier des 4 cas que nous avons rapportés, deux corps qui se choquent en allant l'un contre l'autre avec des quantités de mouvement égales, s'arrêtent absolument l'un l'autre par le mouvement simple. Mais ensuite par le mouvement de ressort, leur vîtesse respective qui est alors la somme de leurs vîtesses absoluës se partageant entre eux en raison renversée de leurs masses, chacun reprend la même vîtesse absoluë qu'il avoit avant le choc, car puisqu'ils avoient des quantités de mouvement égales, leurs vîtesses absoluës étoient necessairement en raison renversée de leurs masses. Il est inutile de remarquer que ces vîtesses ont après le choc une direction contraire à celle qu'elles avoient auparavant. Et comme on peut appeller vîtesse respective non-seulement la quantité dont deux corps s'approchent l'un de l'autre en un certain tems, mais aussi celle dont ils s'éloignent en un tems égal, leur vîtesse respective est la même avant & après le choc. Ainsi dans ce cas la vîtesse respective, & même les deux quantités de mouvement, entierement détruites par le mouvement simple, sont entierement rétablies par le mouvement de ressort.

Et l'on peut même voir que dans les autres 3 cas qui restent, la vîtesse respective doit pareillement être égale avant & après le choc. Car dans ces 3 cas, les deux corps par le mouvement simple vont ensemble après le choc d'une vîtesse commune, comme feroient deux parties d'un même corps, & par consequent sont en repos à l'égard l'un de l'autre. Or l'effet de leur ressort est de les séparer, & la force de ce ressort n'est que la vîtesse respecti-

ve qu'ils avoient avant le choc, dont ils se séparent avec cette même vîtesse respective.

On peut encore prouver ainsi la même chose. Les deux corps mûs ensemble de la vîtesse commune produite par le mouvement simple, sont dans le même cas que s'ils étoient en repos dans un bateau qui allât de cette vîtesse; or il est clair que si on les mettoit tous deux en ressort, ils se sépareroient ensuite avec une force égale à celle qui auroit fait agir leur ressort, & cela indépendamment de la vîtesse du bateau, donc la vîtesse commune produite par le mouvement simple, quelle qu'elle soit, ne peut empêcher la vîtesse respective d'être égale avant & après le choc.

Une vîtesse respective peut demeurer la même, tandis que les vîtesses absoluës, dont elle est formée par addition ou par soustraction, varieront entre elles en une infinité de manieres, & par consequent l'égalité de la vîtesse respective avant & après le choc n'emporte nullement celle des vîtesses absoluës. De plus, ces mêmes vîtesses sont encore augmentées ou diminuées après le choc, selon que la vîtesse respective toûjours partagée de la même maniere entre les deux corps, a la même direction qu'elles, ou une direction contraire. Mais ce sont ces vîtesses absoluës qui multipliées par les masses font les quantités de mouvement, d'où il suit que les quantités de mouvement, aussi-bien que les vîtesses absoluës, peuvent être, & sont même le plus souvent fort inégales avant & après le choc Cette inegalité cependant est renfermée dans des bornes, & nous allons les déterminer pour faire appercevoir en gros toutes les variations comprises dans l'entre-deux.

Si un corps en mouvement en rencontre directement un autre égal & en repos, il est aisé de voir que par le mouvement simple la vîtesse commune dont ils iront ensemble selon la direction du corps qui étoit mû, sera la moitié de la vîtesse qu'avoit ce corps, que par le mouvement de ressort la vîtesse respective qui n'est alors que la

vîteſſe abſoluë du corps mû étant partagée également entre les deux, puiſqu'ils ſont égaux, celui qui étoit mû ſera repouſſé en arriere avec la moitié de ſa premiere vîteſſe, & par conſequent s'arrêtera puiſqu'il eſt repouſſé en arriere avec la même vîteſſe dont il tendoit à aller en avant, & que le corps qui étoit en repos étant pouſſé ſelon la direction de l'autre avec les deux moitiés de la vîteſſe qu'il avoit, aura cette vîteſſe entiere avec la même direction, & qu'enfin la quantité de mouvement, & la vîteſſe abſoluë ſeront égales avant & après le choc, auſſi-bien que la vîteſſe reſpective.

Si un corps infiniment petit ayant une vîteſſe finie, & par conſequent une quantité de mouvement infiniment petite, rencontre un corps fini en repos, la vîteſſe commune dont il le fera aller avec lui ſelon ſa direction ſera infiniment petite, car ce ſera ſa quantité de mouvement infiniment petite diviſée par la ſomme de leurs maſſes, ou plûtôt par la maſſe ſeule du corps fini, qui eſt infiniment grand par raport à l'autre. Le corps fini multiplié par cette vîteſſe infiniment petite, aura une quantité de mouvement infiniment petite, égale à celle qu'avoit avant le choc le corps infiniment petit, qui n'a plus qu'une quantité de mouvement infiniment petite du ſecond genre, & par conſequent nulle par raport à celle du corps fini. Mais par le mouvement de reſſort la vîteſſe reſpective qui eſt la vîteſſe finie du corps infiniment petit ſe partage de ſorte que le corps fini n'en prend qu'une partie infiniment petite, & que le corps infiniment petit la reprend toute entiere, car telle eſt la proportion des maſſes. On voit d'ailleurs par les directions que la nouvelle vîteſſe infiniment petite que prend le corps fini eſt du même côté que celle qu'il avoit déja, & par conſequent double ſa quantité de mouvement, tandis que la vîteſſe finie que reprend le corps infiniment petit eſt en arriere. Donc le corps infiniment petit a la même quantité de mouvement après le choc qu'auparavant, & le corps fini en a pris une double de celle-là; & pour la vîteſſe reſpective elle demeure

toute entiere au corps à qui elle apartenoit avant le choc, puisque la vîtesse du corps fini n'est à compter pour rien par raport à celle de l'infiniment petit.

Donc dans le cas où un corps en mouvement en choque un égal en repos, la quantité de mouvement étant égale avant & après le choc, & étant triplée après le choc dans le cas où un corps infiniment petit en mouvement choque le même corps fini qu'on a supofé en repos, il faut que la quantité de mouvement croisse toûjours dans tous les cas infinis qui sont entre ces deux-là, c'est-à-dire, dans tous ceux où le corps en mouvement sera le plus petit, & que cependant elle ne puisse jamais croître jusqu'à être précisément triple de ce qu'elle étoit, puisqu'il faudroit pour cela un corps infiniment petit en mouvement, & separé de tout autre, ce qui n'est point dans la nature.

De ce que dans le premier des deux cas *extrêmes* la vîtesse respective passe toute entiere dans le corps qui étoit en repos, & de ce que dans le second cas elle demeure toute entiere au corps qui étoit en mouvement, il suit que dans tous les cas moyens elle se partage entre les deux, & il est aisé de trouver qu'elle se partage également lorsque le grand est triple du petit. Donc depuis le cas où les deux corps sont égaux jusqu'au cas où celui qui est mû devient en décroissant toûjours 3 fois plus petit que l'autre, c'est le plus grand qui prend le plus de vîtesse ; depuis ce point-là jusques à ce que le petit corps devienne infiniment petit, c'est lui qui en prend toûjours le plus, & enfin il la conserve entiere.

Ce dernier cas est visiblement celui de la Reflexion. De grands Philosophes prétendent avec assez d'apparence que quand un corps en rencontre un autre inébranlable par raport à lui, il s'arrêteroit tout court, & ne refléchiroit jamais, si ce n'étoit le ressort du corps choqué, & le sien qui agissent alors. Car sans cela quelle nouvelle cause pour retourner en arriere ? On voit même par experience qu'il est bien plus facile d'arrêter une boule qui roule, & de lui faire perdre son mouvement que de la

renvoyer en arriere avec la même vîtesse. Cela supose, il est évident qu'un corps qui se refléchit à la rencontre d'un corps inebranlable, est precisément dans le même cas que s'il en rencontroit un infiniment grand par raport à lui, & comme cet infiniment grand n'existe point, non plus qu'un corps absolument inebranlable pour un autre quel qu'il soit, il s'ensuit qu'un corps qui se reflechit communique toûjours de sa vîtesse à celui qu'il a choqué, quelque inébranlable qu'il paroisse à son égard ; & par consequent perd toûjours par la réflexion une partie de sa force, ou quantité de mouvement, ce que toutes les experiences confirment assez.

Maintenant si nous suposons qu'un corps fini en mouvement en rencontre un infiniment petit en repos, on verra que par le mouvement simple leur vîtesse commune après le choc est la même que celle que le corps fini avoit auparavant, que le mouvement de ressort donne au corps infiniment petit cette même vîtesse selon la même direction, & par consequent la double, que le corps fini qui n'est repoussé en arriere que d'une vîtesse infiniment petite, conserve toute celle qu'il avoit d'abord, que par consequent la vîtesse absoluë qui a précedé le choc est triplée, & que la quantité de mouvement demeure la même, puisque le corps fini n'a que sa premiere vîtesse, & que celle du corps infiniment petit multipliée par sa masse ne fait qu'une quantité de mouvement infiniment petite.

On pourra conclure par un raisonnement semblable à celui que nous avons déja fait, que depuis le cas de l'égalité des deux corps dont l'un est en mouvement, l'autre en repos, jusqu'au cas où le corps en repos est infiniment petit, le corps qui est en repos diminuant toûjours dans tous les cas moyens, la vîtesse qui a précedé le choc est toûjours augmentée après le choc, que jamais elle ne peut être précisément triplée, que le grand corps ne peut jamais conserver entierement sa premiere vîtesse, ni le petit en prendre une qui soit double, que puisque dans les deux

cas extrêmes la quantité de mouvement étant égale avant & après le choc, elle passe toute entiere dans le premier cas au corps qui étoit en repos, & dans le second demeure toute entiere à celui qui étoit en mouvement, elle doit se partager entre eux dans tous les cas moyens, qu'elle se partage également lorsque le grand est triple du petit, &c.

Au lieu que nous avons supposé que le corps choqué par le corps fini étoit un infiniment petit du premier genre, si nous le suposions du second, les mêmes raisonnemens subsisteroient, & cet infiniment petit du second genre prendroit toûjours une vîtesse double de celle du corps fini. Mais si l'on supose entre ces deux corps le premier infiniment petit qui prendra par le choc une vîtesse double de celle du corps fini, & si on conçoit qu'avec cette vîtesse il aille choquer l'infiniment petit du second genre, il lui donnera une vîtesse double de la sienne, & par consequent quadruple de celle du corps fini. Donc si le corps fini choque immediatement le corps infiniment petit du second genre, il lui donnera la moitié moins de vîtesse, que s'il le choque par l'entremise de l'infiniment petit du premier genre; & plus on metrra ensuite d'infiniment petits des genres suivans tous en repos, & dont le dernier ne sera choqué que par l'entremise de tous ceux qui le précederont, plus la vîtesse qu'il prendra sera grande par raport à celle du corps fini, premier moteur. Il est visible par ce qui vient d'être dit que cette augmentation de vîtesse suivra toûjours la progression double, & que la vîtesse de chaque infiniment petit sera à celle du corps fini, comme le terme correspondant de la progression double sera à l'unité; par exemple, la vîtesse de l'infiniment petit du sixiéme genre sera à celle du corps fini, comme le sixiéme terme de la progression double, ou 32, à 1. Il faut remarquer ici que le corps fini & tous les infiniment petits qui le suivent, rangés selon leurs genres, forment précisément en vertu de ces genres differens une progression géometrique, ce qui est évident.

Comme les proprietés de l'infini se retrouvent dans le fini, les restrictions necessaires y étant apportées, il s'ensuit qu'un corps en mouvement donnera plus de vîtesse à un corps plus petit en repos s'il le choque par l'entremise d'un corps de grandeur moyenne entre les leurs, que s'il le choquoit immediatement; que plus le nombre des corps moyens interposés sera grand, plus la vîtesse du premier sera augmentée dans le dernier; que le nombre des corps interposés étant égal, la vîtesse ne sera jamais plus augmentée que quand tous ces corps, le premier y étant compris seront en progression géometrique; que tout le reste étant égal, la vîtesse sera encore d'autant plus augmentée que la progression géometrique sera formée d'un plus grand raport, c'est-à-dire, que les termes en seront plus inégaux, & qu'enfin quelque inégaux qu'ils soient, jamais la vîtesse ne pourra être réellement augmentée selon la progression double. Il est aisé de voir que tout cela vient de ce que le fini est copié, pour ainsi dire, d'après l'infini, premier original de toutes ces proprietés.

Si l'on renverse la suposition précedente, c'est-à-dire, qu'un corps infiniment petit du second genre choque avec une vîtesse finie un corps fini en repos, ou que ce même infiniment petit du second genre en choque un du premier, qui ensuite avec la vîtesse aquise par ce choc aille choquer le corps fini, & que l'on compare les deux vîtesses du corps fini dans ces deux cas, on trouvera que dans le second il a deux degrés de vîtesse infiniment petite du second genre, au lieu qu'il n'en a qu'un dans le premier cas, d'où l'on tirera des consequences semblables à celles qui viennent d'être tirées.

Un corps communique donc toûjours plus de vîtesse à un autre s'il le choque par l'entremise de quelques corps interposés, & d'une grandeur moyenne, que s'il le choquoit immediatement. Cette importante Regle du mouvement a été découverte par M. Huguens, & publiée dans ses Oeuvres posthumes depuis peu d'années. Il est fort vrai-semblable que la nature employe ce secret dans les

occasions où l'on voit un grand mouvement naître tout à coup entre des corps qui paroissoient auparavant fort tranquilles, par exemple, dans les Fermentations, & dans les effets de la poudre à canon. Quel peut être le principe de ces agitations si violentes & si tumultueuses? Où étoit caché tout ce mouvement qui vient à se déveloper? On sçait presentement qu'il suffira d'une premiere vîtesse assés peu considerable, pourvû que les corps qui la doivent recevoir les uns aprés les autres soient tels que leurs grandeurs croissent ou décroissent à peu-près selon quelque progression, & qu'ils soient arrangés de suite, ou, ce qui revient au même, soient mis en mouvement selon cet ordre.

Jusqu'ici nous n'avons examiné que les cas où un corps en mouvement en rencontre un autre en repos.

Si deux corps égaux ayant chacun, par exemple, 2 de masse, se rencontrent directement avec des vîtesses contraires & inégales, dont l'une soit, par exemple, 4, & l'autre *6*, on voit que par les loix du mouvement simple la plus petite quantité de mouvement qui est 8 étant retranchée de la plus grande qui est 12, il reste 4 pour la quantité de mouvement qui subsiste après le choc, & que 4 divisé par la somme des deux corps donne 1 vîtesse commune, avec laquelle le plus fort fera rebrousser chemin au plus foible, & le poussera devant lui. Mais par les loix du ressort la vîtesse respective qui est 10, puisqu'elle est en ce cas la somme des vîtesses absoluës, sera partagée également entre les deux corps, puisqu'ils sont égaux, & ils auront chacun 5 degrés de vîtesse en une direction contraire à celle qu'ils avoient avant le choc. Le plus fort qui par le mouvement simple poursuivoit son chemin avec 1 degré de vîtesse est donc renvoyé avec 5 degrés en un sens contraire. Reste 4 en ce sens-là. Le plus foible qui avoit aussi 1 degré de vîtesse selon la direction du plus fort, prend de plus 5 degrés en ce même sens-là, il en a donc *6*, c'est-à-dire, que par le choc ils ont fait entre eux un échange des vîtesses qu'ils avoient auparavant, & même de leurs di-

rections, & il en ira de même en tout autre exemple.

Si tout le reste demeurant le même, on supose que l'un des deux corps soit infiniment petit, la vîtesse commune des deux produite par le mouvement simple après le choc, sera la vîtesse entiere qu'avoit le corps fini avant le choc, & la direction sera aussi la même. Mais par le ressort le corps fini sera infiniment peu repoussé en arriere, & par consequent conservera sa premiere vîtesse & sa premiere direction, & le corps infiniment petit prendra selon la même direction la vîtesse respective entiere, c'est-à-dire, la somme des deux vîtesses absoluës qui ont précedé le choc, ce qui ne lui fera rien perdre de la vîtesse qu'il avoit par le mouvement simple. Donc les deux corps iront selon la direction qu'avoit le corps fini avant le choc, le fini avec sa premiere vîtesse, l'infiniment petit avec le double de cette vîtesse, plus celle qu'il avoit avant le choc.

Par-là on voit que même dans le cas où l'un des deux corps seroit infiniment petit par raport à l'autre, la somme des vîtesses absoluës qui ont précedé le choc n'est pas triplée par le choc, puisqu'il n'y a que la vîtesse du grand corps qui le soit, & que celle du petit demeure simple, que cette somme est d'autant plus éloignée de se tripler que la vîtesse du petit corps est plus grande par raport à celle du grand, qu'elle ne se triple précisément que quand la vîtesse du petit corps est infiniment petite, c'est-à-dire, quand il étoit en repos avant le choc, ce qu'on a déja vû, que les deux corps étant finis la somme de leurs vîtesses après le choc, est d'autant plus augmentée que l'un est plus petit, & a moins de vîtesse par raport à l'autre, &c.

Dans le premier des deux cas extrêmes, le corps qui a le plus de quantité de mouvement change sa direction & dans le second il la conserve; donc il y a un cas moyen où il ne la change ni ne la conserve, c'est-à-dire, où il n'en a point, ou, ce qui est la même chose, demeure en repos, & l'on trouve que cela arrive lorsqu'il est triple de l'autre, & qu'ils ont tous deux des vîtesses égales.

Il ne reste plus que le cas où deux corps ayant la même

direction, celui qui fuit l'autre à la plus grande vîtesse & vient à le choquer. Si ces deux corps sont égaux on trouvera par un raisonnement semblable à celui qui a été fait dans le cas des directions contraires, qu'après le choc ils font entre eux un échange des vîtesses qu'ils avoient auparavant, & conservent leur premiere direction. Si le corps qui suit l'autre est infiniment grand par raport à lui, il conserve sa premiere vîtesse, & l'autre en prend le double, moins celle qu'il avoit avant le choc. Si le corps qui poursuit est infiniment petit, c'est le contraire, il prend le double de la vîtesse de l'autre, moins celle qu'il avoit avant le choc, & le corps poursuivi conserve la sienne. La vîtesse du corps poursuivi étant toûjours la moindre, elle peut, lorsqu'elle est doublée dans ce dernier cas & qu'on en retranche celle de l'autre corps, demeurer positive, ou devenir nulle ou negative, c'est-à-dire, que le corps infiniment petit peut conserver sa direction, ou s'arrêter, ou la changer. Il est aisé de transporter tout cela dans le fini, & de conclure des deux cas extrêmes les cas moyens.

Peut-être en combinant ensemble les cas principaux que nous n'avons envisagés que séparément, pourroit-on s'élever à une Theorie encore plus sublime, mais il suffit presentement que les routes en soient ouvertes. La Formule générale de M. Carré donne avec une extrême facilité tout ce que nous n'avons exposé ici que par d'assés longs raisonnemens, & de plus une infinité de détails que nous n'avons pû saisir qu'en gros, mais il est peut-être bon de faire voir dans toute leur étenduë les fondemens de ces Formules si commodes & si courtes; après cela, on joüit de leur commodité & de leur briéveté avec une pleine assurance, ou si l'assurance n'est pas plus grande, du moins on est dans un plus grand jour.

NOus avons simplement annoncé dans l'Histoire de 1705 *que M. Dalesme avoit donné un moyen très-simple de faciliter & d'augmenter l'action de ceux qui ti- *p. 137.

rent de grands Bateaux. Ce moyen est de tendre le long du rivage une Corde que les Hommes puissent prendre avec les mains en tirant leur Bateau. Il a trouvé par experience qu'avec ce secours, ils ont presque la moitié moins de peine, mais l'épreuve n'a été faite que dans un petit espace de chemin, il y a apparence que dans un plus long ils seroient plûtôt las en se servant de la Corde qu'en tirant à la maniere ordinaire, parce que leurs bras agiroient aussi-bien que leurs jambes & leurs pieds. Le remede à cela seroit qu'ils ne prissent la Corde que dans les endroits difficiles, & laissassent ensuite reposer leurs bras.

Voici deux autres pensées proposées aussi par M. Dalesme.

1°. Fondre des Tuyaux de plomb pour des conduites d'eau, sans soudure, & sans *reprise*, & ensuite les passer à la filiere avec un Mandrin dans le tuyau. Il y a de deux sortes de tuyaux ordinaires. Les uns sont faits de tables ou planches de plomb, que l'on plie en tuyau, & que l'on soude ensuite; ils manquent très-souvent par la soudure, & perdent l'eau. Les autres sont fondus & coulés, mais à diverses reprises, parce qu'on n'a pas des moules assés longs, & comme les reprises se soudent alors entre elles par la fonte, mais non-pas si parfaitement qu'il ne reste alentour quantité de petits trous, on y bat le metal avec le marteau. Mais les tuyaux fondus de M. Dalesme n'auront point l'inconvenient des premiers tuyaux qu'il faut souder dans toute leur longueur, & s'ils ont des trous ou pores ils se fermeront mieux que dans les seconds, parceque la filiere forçant & pétrissant, pour ainsi dire, le metal, le resserrera beaucoup plus, & plus également que ne peut faire le marteau. Les metaux forgés ont plus de force & sont moins poreux que s'ils étoient simplement fondus, & il vaut encore mieux les passer à la filiere que les forger.

2°. Coler aux grands Vaisseaux avec le Bray ou Conroy qui sert à carener, du plomb d'abord fondu épais, & ensuite forgé mince, & par consequent fort solide & fort peu

poreux. Par-là on défendroit les Vaiſſeaux contre les Vers, qui dans les climats chauds les rongent & les ruinent. Le plomb coûteroit 4 ou 5 fois moins que le doublage de planches dont on ſe ſert. Il ne ſe détachera du Vaiſſeau qu'avec le Conroy.

MOnſieur des Billettes a donné la Deſcription de l'Art de la Papeterie, & de celui du Doreur de Livres, & M. Jaugeon a commencé à donner celle des Arts & Metiers qui concernent la Soye.

MACHINES OU INVENTIONS

APPROUVE'ES PAR L'ACADEMIE

PENDANT L'ANNE'E 1706.

I.

UNe maniere de tirer les Loteries propoſée par M. d'Aubicour.

II.

Une Chaine ſans fin, inventée par M. Martenot, qui peut ſervir à la place du Treüil ordinaire, & réüſſir bien, pourvû que dans l'exécution on y aporte aſſés de préciſion & de ſolidité.

III.

Un Coûteau pliant, inventé par M. de la Chaumette, qui eſt tel que ſans aucun reſſort les deux jouës du manche s'aprochent exactement lorſqu'on l'ouvre, & s'éloignent pour recevoir la lame lorſqu'on le ferme. L'invention a paru ingenieuſe.

IV.

Une nouvelle ſorte de Bougies, inventées par M. Marius qui ne coûteront que la moitié des autres, ſeront auſſi propres à manier, & donnneront autant de lumiere,

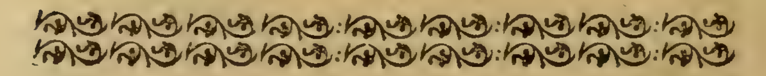
mais ſeulement dureront un peu moins.

V.

Des Cornets d'une conſtruction nouvelle, inventés par M. du Guet. Quoiqu'ils ne ſoient encore regardés par l'Auteur que comme une *étude* & une ébauche, on a cru qu'ils pourroient être fort utiles à ceux qui ſont devenus ſourds.

VI.

Une Machine du ſieur Thomas, pour élever des fardeaux d'une grande péſanteur. On l'a trouvée utile, mais preſque ſemblable à pluſieurs autres qui ont déja été inventées.



ELOGE

DE M. DU HAMEL.

JEAN-BAPTISTE DU HAMEL nâquit en *1624* à Vire en baſſe Normandie. Nicolas du Hamel ſon Pere étoit Avocat dans la même Ville; malgré le caractere géneral qu'on attribuë à ce païs-là, & malgré ſon intereſt particulier, il ne ſongeoit qu'à accommoder les procès qu'il avoit entre les mains, & en étoit quelquefois mal avec les Juges.

M. du Hamel fit ſes premieres études à Caën, ſa Rhetorique & ſa Philoſophie à Paris. A l'âge de 18 ans il compoſa un petit Traité, où il expliquoit avec une ou deux figures, & d'une maniere fort ſimple, les trois Livres des *Spheriques* de Theodoſe; il y ajoûta une Trigonometrie fort courte & fort claire dans le deſſein de faciliter l'entrée de l'Aſtronomie. Il a dit dans un Ouvrage poſterieur qu'il n'avoit imprimé celui-là que par une vanité de jeune homme, mais peu de gens de cet âge pourroient avoir la même vanité. Il faloit que l'inclination qui le portoit aux

Sciences fût déja bien générale & bien étenduë, pour ne pas laisser échaper les Mathematiques si peu connuës, & si peu cultivées en ce tems-là, & dans les lieux où il étudioit.

A l'âge de 19 ans, il entra dans les Peres de l'Oratoire. Il y fut 10 ans, & en sortit pour être Curé de Neüilli sur Marne. Pendant l'un & l'autre de ces deux tems, il joignit aux devoirs de son état une grande aplication à la lecture.

La Phisique étoit alors comme un grand Royaume démembré, dont les Provinces ou les Gouvernemens seroient devenus des Souverainetés presque indépendantes. L'Astronomie, la Mechanique, l'Optique, la Chimie, &c. étoient des Sciences à part, qui n'avoient plus rien de commun avec ce qu'on apelloit Phisique; & les Medecins même en avoient détaché leur Phisiologie, dont le nom seul la trahissoit. La Phisique apauvrie & dépoüillée n'avoit plus pour son partage que des Questions également épineuses & steriles. M. du Hamel entreprit de lui rendre ce qu'on lui avoit usurpé, c'est-à-dire une infinité de connoissances utiles & agréables, propres à faire renaître l'estime & le goût qu'on lui devoit, Il commença l'exécution de ce dessein par son *Astronomia Physica*, & par son Traité *De Meteoris & Fossilibus*, imprimés l'un & l'autre en 1660.

Ces deux Traités sont des Dialogues dont les Personnages sont Theophile, grand Zelateur des Anciens, Menandre, Cartesien passionné, Simplicius, Philosophe indifferent entre tous les partis, qui le plus souvent tâche á les accorder tous, & qui hors delà est en droit par son caractere de prendre dans chacun ce qu'il y a de meilleur. Ce Simplicius ou M. du Hamel, c'est le même homme.

A la forme de Dialogues, & à cette maniere de traiter la Philosophie, on reconnoît que Ciceron a servi de modele, mais on le reconnoît encore à une Latinité pure & exquise, & ce qui est plus important à un grand nombre d'expressions ingenieuses & fines, dont ces Ouvrages sont

ſemés. Ce ſont des raiſonnemens philoſophiques, qui ont dépoüillé leur ſechereſſe naturelle ou du moins ordinaire, en paſſant au travers d'une imagination fleurie & ornée, & qui n'y ont pris cependant que la juſte doſe d'agrément qui leur convenoit. Ce qui ne doit être embelli que juſqu'à une certaine meſure préciſe, eſt ce qui coûte le plus à embellir.

L'Aſtronomie phiſique eſt un Recueil des principales penſées des Philoſophes tant Anciens que Modernes ſur la Lumiere, ſur les Couleurs, ſur les Siſtêmes du monde; & de plus tout ce qui apartient à la Sphere, à la Theorie des Planetes, au Calcul des Eclipſes, y eſt expliqué mathematiquement. De même, le Traité des Meteores & des Foſſiles raſſemble tout ce qu'en ont dit les Auteurs qui ont quelque reputation dans ces matieres; car M. du Hamel ne ſe bornoit pas à la lecture des plus fameux. On voit dans ce qu'il a écrit des Foſſiles une grande connoiſſance de l'Hiſtoire Naturelle, & ſur tout de la Chimie, quoiqu'elle fût encore alors envelopée de myſteres & de tenebres difficiles à percer.

On lui reprocha d'avoir été peu favorable au grand Deſcartes, ſi digne du reſpect de tous les Philoſophes, même de ceux qui ne le ſuivent pas. En effet, Theophile le traite quelquefois aſſés mal. M. du Hamel répondit que c'étoit Theophile, entêté de l'Antiquité, incapable de goûter aucun Moderne, & que jamais Simplicius n'en avoit mal parlé. Il diſoit vrai, cependant c'étoit au fond Simplicius qui faiſoit parler Theophile.

En 1663, qui fut la même année où il quitta la Cure de Neüilli, il donna le fameux Livre, *De Conſenſu veteris & novæ Philoſophiæ.* C'eſt une Phiſique générale, ou un Traité des premiers Principes. Ce que le titre promet eſt pleinement exécuté, & l'eſprit de conciliation, héréditaire à l'Auteur, triomphe dans cet Ouvrage. Il commence par la ſublime & peu intelligible Metaphiſique des Platoniciens ſur les Idées, ſur les Nombres, ſur les formes Archetypes, & quoique M. du Hamel en reconnoiſſe l'obſcurité,

rité, il ne peut leur refuser une place dans cette espece d'Etats généraux de la Philosophie. Il traite avec la même indulgence la Privation principe, l'Eduction des formes substantielles, & quelques autres idées Scholastiques; mais quand il est enfin arrivé aux Principes qui se peuvent entendre, c'est-à-dire, ou aux Loix du mouvement, ou aux principes moins simples établis par les Chimistes, on sent que malgré l'envie d'accorder tout, il laisse naturellement pancher la balance de ce côté-là. On s'aperçoit même que ce n'est qu'à regret qu'il entre dans des questions génerales ,d'où l'on ne remporte que des mots, qui n'ont point d'autre merite que d'avoir long-tems passé pour des choses. Son inclination & son sçavoir le rapellent toûjours assés promptement à la Philosophie Experimentale, & sur tout à la chimie pour laquelle il paroît avoir eu un goût particulier.

En 1666. M. Colbert qui sçavoit combien la gloire des Lettres contribuë à la splendeur d'un Etat, proposa & fit aprouver au Roi l'établissement de l'Academie Roiale des Sciences. Il rassembla avec un discernement exquis un petit nombre d'hommes, excellens chacun dans son genre. Il falloit à cette Compagnie un Secretaire qui entendit & qui parlât bien toutes les differentes langues de ces Sçavans , celle d'un Chimiste, par exemple, & celle d'un Astronome, qui fût auprès du Public leur interprete commun, qui pût donner à tant de matieres épineuses & abstraites des éclaircissemens, un certain tour, & même un agrément que les Auteurs negligent quelquefois de leur donner, & que cependant la plûpart des Lecteurs demandent, enfin qui par son caractere fût exempt de partialité, & propre à rendre un compte desinteressé des contestations Academiques. Le choix de M. Colbert pour cette fonction tomba sur M. du Hamel; & après les preuves qu'il avoit faites sans y penser de toutes les qualités necessaires, un choix aussi éclairé ne pouvoit tomber que sur lui.

Sa belle Latinité ayant beaucoup brillé dans ses Ouvrages, & d'autant plus que ses matieres étoient moins

favorables, il fut choisi pour mettre en Latin un Traité des Droits de la feuë Reine sur le Brabant, sur Namur, & sur quelques autres Seigneuries des Pays-bas Espagnols. Le Roi qui le fit publier en 1667. vouloit qu'il pût être lû de toute l'Europe, où ses conquêtes, & peut-être aussi un grand nombre d'excellens Livres, n'avoient pas encore rendu le François aussi familier qu'il l'est devenu.

A cet Ouvrage qui soûtenoit les droits de la Reine, il en succeda l'année suivante un autre de la même main, & en Latin, qui soutenoit les droits de l'Archevêque de Paris contre les Exemptions que prétend l'Abbaye de S. Germain des Prez. Ce fut M. de Perefixe, alors Archevêque, qui engagea M. du Hamel à cette entreprise, & apparemment il crut que le nom d'un Auteur, si éloigné d'attaquer sans justice, & même d'attaquer, seroit un grand préjugé pour le Siege Archiepiscopal. En effet, c'est la seule fois que M. du Hamel ait forcé son caractere jusqu'à prendre le personnage d'Aggresseur; & il est bon qu'il l'ait pris une fois pour laisser un modele de la moderation & de l'honnêteté avec laquelle ces sortes de contestations devroient être conduites.

Sa grande reputation sur la Latinité fut cause encore qu'en la même année 1668. M. Colbert de Croissi Plenipotentiaire pour la Paix d'Aix la Chapelle l'y mena avec lui. Il pouvoit l'employer souvent pour tout ce qui se devoit traiter en Latin avec les Ministres Etrangers, & quoique la pureté de cette Langue puisse paroître une circonstance peu importante par rapport à une negociation de Paix, les Politiques sçavent assez qu'il ne faut rien negliger de ce qui peut donner du relief à une Nation aux yeux de ses voisins, ou de ses ennemis.

Après la Paix d'Aix la Chapelle, M. de Croissi alla Ambassadeur en Angleterre, & M. du Hamel l'y accompagna. Il fit ce voyage en Philosophe; sa principale curiosité fut de voir les Sçavans, sur tout l'illustre M. Boyle qui lui ouvrit tous ses trésors de Phisique Experimentale. De-là, il passa en Hollande avec le même esprit, & il rapporta de ces deux voyages des richesses, dont il a ensuite orné ses Livres.

Revenu en France, & occupant sa place de Secretaire de l'Academie, il publia son Traité *De Corporum affectionibus* en 1670. Là, il pousse la Phisique jusqu'à la Medecine, dont il ne se contente pas d'effleurer les principes. Deux ans après, il donna son Traité *de Mente humana*. C'est une Logique Metaphisique, ou une Theorie de l'Entendement humain & des Idées, avec l'art de conduire sa raison. Quoique les experiences phisiques paroissent étrangeres à ce sujet, elles y entrent cependant en assés grande quantité, elles fournissent tous les exemples dont l'Auteur a besoin ; il en étoit si plein, qu'elles semblent lui échaper à chaque moment.

Un an après, c'est-à-dire en 1673, parut son Livre *De Corpore animato*. On peut juger par le titre si la Phisique Experimentale y est employée. Sur tout, l'Anatomie y regne. M. du Hamel en avoit acquis une grande connoissance & par les Conferences de l'Academie, & par un commerce particulier avec M^rs. Stenon, & du Verney. Quand M. du Verney commença à s'établir à Paris, & qu'il y établit en même temps un nouveau goût pour l'Anatomie, M. du Hamel fut un des premiers qui se saisit de lui, & des découvertes qu'il apportoit. Un tel Disciple excita encore le jeune Anatomiste à de plus grands progrès, & y contribua.

Dans ce Livre *De Corpore animato*, il fair entendre qu'on lui reprochoit de ne point decider les Questions, & d'être trop indéterminé entre les differens partis. Il promet de se corriger, & il faut avoüer cependant qu'il ne paroît pas trop avoir tenu parole, mais enfin il est rare qu'un Philosophe soit accusé de n'être pas assés decisif.

Au même endroit, il se fait à lui-même un autre reproche, dont il est beaucoup plus touché, c'est d'être Ecclesiastique, & de donner tout son temps à la Philosophie profane. Il est aisé de voir quelle foule de raisons la justifioient, mais l'extrême délicatesse de sa conscience ne s'en contentoit pas. Il proteste qu'il veut retourner à un Ouvrage de Théologie, dont le projet avoit été formé dès le temps qu'il publia ses premiers Livres, & dont l'execu-

tion avoit été toûjours interrompuë.

Cependant il y survint encore une nouvelle interruption. Un ordre superieur, & glorieux pour lui l'engagea à composer un Cours entier de Philosophie, selon la forme usitée dans les Colleges. Cet Ouvrage parut en 1678 sous le titre de *Philosophia vetus & nova ad usum Scholæ accommodata, in Regia Burgundia pertracta*, assemblage aussi judicieux & aussiheureux qu'il puisse être des idées anciennes & des no uvelles, de la Philosophie des mots, & de celle des choses, de l'Ecole & de l'Academie pour en parler encore plus juste; l'Ecole y est ménagée, mais l'Academie y domine. M. du Hamel y a repandu tout ce qu'il avoit puisé dans les Conferences Academiques, experiences, découvertes, raisonnemens, conjectures. Le succés de l'Ouvrage a été grand, les nouveaux Sistêmes déguisés en quelque sorte ou alliés avec les anciens se sont introduits plus facilement chez leurs Ennemis; & peut-être le Vrai a-t'il eu moins d'oppositions à essuyer, parce qu'il a eu le secours de quelques erreurs.

Plusieurs années après la publication de ce Livre, des Missionnaires qui l'avoient porté aux Indes Orientales écrivirent qu'ils y enseignoient cette Philosophie avec beaucoup de succès, principalement la Phisique, qui est des quatre parties du Cours entier celle où l'Adademie & les Modernes ont le plus de part. Des Peuples peu éclairés & conduits par le seul goût naturel, n'ont pas beaucoup hésité entre deux especes de Philosophie, dont l'une nous a si long-tems occupés.

Il semble que M. du Hamel ait été destiné à être le Philosophe de l'Orient. Le P. Bouvet Jesuite, & fameux Missionaire de la Chine, a écrit que quand ses Confreres & lui voulurent faire en langue Tartare une Philosophie pour l'Empereur de ce grand Etat, & le disposer par là aux verités de l'Evangile, une des principales sources où ils puiserent fut la Philosophie ancienne & moderne de M. du Hamel. L'entrée qu'elle pouvoit procurer à la Religion dans ces climats éloignés, a dû le consoler de l'application qu'il y avoit donnée.

A la fin, il s'acquitta encore plus précisément du devoir dont il se croyoit chargé. En 1691. il imprima un corps de Theologie en 7 Tomes, sous ce titre, *Theologia Speculatrix & Practica juxta SS. Patrum dogmata pertractata, & ad usum Scholæ accomodata.* La Theologie a été long-tems remplie de subtilités fort ingenieuses à la verité, utiles même jusqu'à un certain point, mais assés souvent excessives; & l'on negligeoit alors la connoissance des Peres, des Conciles, de l'Histoire de l'Eglise, enfin tout ce qu'on appelle aujourd'hui Theologie positive. On alloit aussi loin que l'on pouvoit aller par la seule Metaphisique, & sans le secours des faits presque entierement inconnus, & cette Theologie a pû être appellée fille de l'Esprit & de l'ignorance. Mais enfin les vûës plus saines & plus nettes des deux derniers Siecles ont fait renaître la Positive. M. du Hamel l'a reunie dans son Ouvrage avec sa Scolastique, & personne n'étoit plus propre à ménager cette reünion. Ce que la Philosophie Experimentale est à l'égard de la Philosophie Scholastique, la Theologie Positive l'est à l'égard de l'ancienne Theologie de l'Ecole : c'est la positive qui donne du corps & de la solidité à la Scholastique & M. du Hamel fit précisement pour la Theologie ce qu'il avoit fait pour la Philosophie. On voit de part & d'autre la même étenduë de connoissances, le même desir, & le même art de concilier les opinions, le même jugement pour choisir, quand il le faut, enfin le même esprit qui agit sur differentes matieres. On peut se représenter ici ce que c'est que d'être Philosophe & Theologien tout-à-la fois, Philosophe qui embrasse toute la Philosophie, Theologien qui enbrasse la Theologie entiere.

Ce travail presque immense lui en produisit encore un autre. On souhaita quil tirât en abregé de son Corps de Theologie ce qui étoit le plus necessaire aux jeunes Ecclesiastiques, que l'on instruit dans les Seminaires. Touché de l'utilité du dessein, il l'entreprit, quoiqu'âgé de 70 ans & sujet à une infirmité, qui de tems en tems le mettoit à deux doits de la mort. Il fit même beaucoup plus qu'on ne lui demandoit, il traita quantité de matieres qu'il n'a-

voit pas fait entrer dans ſon premier Ouvrage, & en donna un preſque tout nouveau en 1694. ſous ce titre, *Theologiæ Clericorum Seminariis accommodatæ Summarium.* Ce Sommaire contient 5. Volumes.

Son application à la Theologie ne nuiſit point à ſes devoirs Academiques. Non ſeulement il exerça toujours ſa fonction, en tenant la plume, & recueillant les fruits de chaque Aſſemblée, mais il entreprit de faire en Latin une Hiſtoire générale de l'Academie depuis ſon établiſſement en 1666. juſqu'en 1696 Il prit cette Epoque pour finir ſon Hiſtoire, parce qu'au commencement de 1697. il quitta la plume, ayant repreſenté à M. de Pontchartrain, aujourd'hui Chancelier de France, qu'il devenoit trop infirme, & qu'il avoit beſoin d'un ſucceſſeur. Il ſeroit de mon interêt de cacher ici le nom de celui qui oſa prendre la place d'un tel Homme, mais la reconnoiſſance que je lui dois de la bonté avec laquelle il m'agrea, & du ſoin qu'il prit de me former, ne me le permet pas.

Ce fut en 1698. que parut ſon Hiſtoire ſous ce titre: *Regiæ Scientiarum Academiæ Hiſtoria.* L'Edition fut bien-tôt enlevée, & en 1701. il en parut une ſeconde beaucoup plus ample, augmentée des quatre années qui manquoient à la premiere pour finir le Siécle, & dont les deux dernieres étoient compriſes dans une Hiſtoire Françoiſe.

Si nous n'avions une preuve inconteſtable par la datte de ſes Livres, nous n'aurions pas la hardieſſe de rapporter qu'en la même année 1698. où il donna pour la premiere fois ſon Hiſtoire de l'Academie, il donna auſſi un Ouvrage Theologique fort ſçavant, intitulé, *Inſtitutiones Biblicæ, ſeu Scripturæ Sacræ Prolegomena unâ cum ſelectis Annotationibus in Pentateuchum.* Là, il ramaſſe tout ce qu'il y a de plus important à ſçavoir ſur la critique de l'Ecriture Sainte; un Jugement droit & sûr eſt l'Architecte qui choiſit & qui diſpoſe les materiaux que fournit une vaſte Erudition. Le même caractere regne dans les Notes ſur les cinq Livres de Moyſe, elles ſont bien choiſies, peu chargées de diſcours, inſtructives, curieuſes ſeulement lorſqu'il faut qu'elles le ſoient pour être inſtructives, ſçavantes ſans

pompe, mêlées quelquefois de sentimens de pieté, qui partoient aussi naturellement du cœur de l'Ecrivain, que du fond de la matiere.

Il publia en 1701 les *Pseaumes*, & en 1703 *les Livres de Salomon*, *la Sapience*, *& l'Ecclesiastique* avec de pareilles Notes. Tous ces Ouvrages n'étoient que les avant-coureurs d'un autre sans comparaison plus grand auquel il travailloit, d'une *Bible* entiere accompagnée de Notes sur tous les endroits qui en demandoient, & de Notes telles qu'il les faisoit. Il la donna en 1705, âgé de 81. ans. Cette Bible, & par la beauté de l'Edition, & par la commodité & l'utilité du Commentaire disposé au bas des pages, l'emporte au jugement des Sçavants sur toutes celles qui ont encore paru.

Parvenu à un si grand âge, ayant acquis plus que personne le droit de se reposer glorieusement, mais incapable de ne rien faire, il voulut continuer de mettre en Latin l'Histoire Françoise de l'Academie, & il avoit déja fait cet honneur à une Préface générale qui marche à la tête. Mais enfin il mourut le 6. Aoust 1706, d'une mort douce & paisible, & par la seule necessité de mourir.

Jusqu'ici nous ne l'avons presque representé que comme Sçavant & comme Academicien, il faudroit maintenant le representer comme homme, & peindre ses mœurs; mais ce seroit le Panagirique d'un Saint, & nous ne sommes pas dignes de toucher à cette partie de son Eloge, qui devroit être faite à la face des Autels, & non dans une Academie. Nous en détacherons seulement deux faits qui peuvent être rapportés dans une bouche profane.

Il alloit tous les ans à Neüilli sur Marne visiter son ancien Troupeau, & le jour qu'il y passoit étoit celebré dans tout le Village comme un jour de Fête. On ne travailloit point, & on n'étoit occupé que de la joie de le voir. Tout le monde sçait quelles sont les vertus, non-seulement Morales, mais Chrétiennes necessaires à un Pasteur, pour lui gagner tous les cœurs à ce point là, & de quel prix sont les loüanges de ceux sur qui on a eu de l'autorité, & sur qui on n'en a plus.

Pendant qu'il fut en Angleterre, les Catholiques Anglois qui alloient entendre sa Messe chez l'Ambassadeur de France, disoient communément, *allons à la Messe du saint Prêtre.* Ces Etrangers n'avoient pas eu besoin d'un long tems pour prendre de lui l'idée qu'il meritoit; un exterieur très-simple, & qu'on ne pouvoit jamais soupçonner d'être composé, annonçoit les vertus du dedans, & trahissoit l'envie qu'il avoit de les cacher. On voyoit aisément que son humilité étoit, non pas un discours, mais un sentiment fondé sur la science même, & sa charité agissoit trop souvent pour n'avoir pas quelquefois, malgré toutes ses précautions, le déplaisir d'être découverte. Le desir general d'être utile aux autres étoit si connu en lui, que les témoignages favorables qu'il rendoit en perdoient une partie du poids qu'ils devoient avoir par eux-mêmes.

Le Cardinal Antoine Barberin, grand Aumônier de France, le fit Aumônier du Roi en 1656. car nous avions oublié de le dire, & c'est un point qui n'auroit pas été negligé dans un autre Eloge. Il fut pendant toute sa vie dans une extrême consideration auprès de nos plus grands Prélats. Cependant il n'a jamais possedé que de très petits Benefices, ce qui sert encore à peindre son caractere, & pour dernier trait, il n'en a point possedé dont il ne se soit depoüillé en faveur de quelqu'un.

La place d'Anatomiste Pensionnaire qu'il occupoit dans l'Academie a été remplie par M. Litre, & celle d'Anatomiste associé qu'avoit M. Litre a été remplie par M. du Verney le jeune qui étoit Eleve de M. du Hamel.

En même tems le Roy ayant declaré M. Dalesme Veteran, parce qu'étant souvent employé par S. M. dans des Ports de Mer, il ne peut faire les fonctions Academiques, sa place de Mechanicien Pensionnaire fut remplie par M. Carré qui étoit Geomettre associé, & celle de M. Carré par M. Guisnée auparavant Eleve de M. Varignon.

FIN.

MEMOIRES



MEMOIRES
DE
MATHEMATIQUE
ET
DE PHYSIQUE
TIREZ DES REGISTRES de l'Academie Royale des Sciences.

De l'Année M. DCCVI.

OBSERVATIONS
De la quantité d'eau de pluïe qui est tombée à l'Observatoire pendant l'année derniere 1705, & de la hauteur du Thermometre & du Barometre.

PAR M. DE LA HIRE.



'AY fait les observations de la quantité d'eau de pluïe qui est tombée à l'Observatoire pendant toute l'année 1705 de la même maniere que les années précedentes, & comme je l'ay rapporté dans les Memoires que j'en ay donnés. J'ay trouvé la hauteur de l'eau de pluïe dans les mois de 1706. *9. Janvier.*

Janvier.	5 lignes $\frac{1}{4}$	Juillet.	2 lignes $\frac{3}{4}$
Février.	8	Aouſt.	19
Mars.	7 $\frac{5}{8}$	Septembre.	16 $\frac{1}{8}$
Avril.	23 $\frac{3}{8}$	Octobre.	27 $\frac{7}{8}$
May.	4 $\frac{1}{2}$	Novembre.	13 $\frac{1}{4}$
Juin.	15 $\frac{1}{2}$	Decembre.	23 $\frac{1}{2}$

La quantité d'eau en hauteur a donc été cette année de 166 lignes $\frac{3}{4}$ ou de 13 pouces 10 lignes $\frac{3}{4}$, ce qui n'eſt qu'un peu plus de deux tiers de ce qu'il en tombe ordinairement, & que j'ai eſtimé de 19. pouces par la comparaiſon de pluſieurs années. Je n'ay point encore trouvé depuis un aſſez grand nombre d'années que je fais ces obſervations, qu'il ait fait une auſſi grande ſechereſſe que dans celle-ci ; cependant la recolte des grains a été aſſez abondante, ce qu'on peut attribuer aux grandes pluïes du mois d'Avril, qui ont ſuffiſamment humecté la terre pour fournir aux ſechereſſes ſuivantes.

Les trois mois d'Eſté qui fourniſſent pour l'ordinaire autant d'eau que tout le reſte de l'année, à cauſe des orages & des pluïes continuës, n'en ont donné que 37. lignes $\frac{1}{4}$, & le mois de Juillet n'a pas fourni 3 lignes d'eau. Auſſi ce ne ſont pas les grandes pluïes de cette ſaiſon qui contribuënt à la fertilité de la terre ; car elles s'élevent en vapeurs preſqu'auſſi-tôt qu'elles ſont tombées, & une partie s'écoule ſans penetrer fort avant.

Pour les vents ils ont été en Janvier fort inconſtans. En Février dans tout le commencement vers l'Eſt, tirant tantôt au Nord & tantôt au Sud, & à la fin vers l'Oüeſt. En Mars le vent a été preſque toûjours à l'Eſt, paſſant tantôt au Nord & tantôt au Sud. En Avril le vent dominant a été autour du Sud-Oüeſt. En May le vent a regné au Nord, en s'écartant quelquefois vers l'Oüeſt. En Juin dans la premiere moitié, le vent a été comme en May & ſans pluïe ; mais le 14 il a commencé à pleuvoir juſqu'au 17 par un vent de Nord, enſuite Nord-Oüeſt & Sud-Oüeſt, & il eſt tombé 11 lignes d'eau, & le 22, 4 lignes

avec un leger orage : le reste du mois le vent a été au Nord & au Nord-Est. Dans le mois de Juillet le vent dominant a été le Nord, aussi dans tout ce mois il n'a plû que très-peu. En Aoust le vent a été presque toûjours à l'Oüest & au Sud-Oüest. En Septembre le vent dominant a été l'Oüest, en s'écartant un peu au Sud & au Nord. En Octobre le vent a été souvent au Nord, en tirant quelquefois à l'Est & à l'Oüest. En Novembre dans la premiere moitié du mois, le vent étoit au Nord & au Nord-Est, & dans l'autre moitié au Sud-Oüest & au Nord-Oüest. En Decembre le vent dominant a été le Sud & le Sud-Oüest avec une très-grande violence, & des especes d'ouragans à deux ou trois reprises : le 3 du mois au soir le vent étoit de Sud très-grand avec du tonnerre, ce qui est rare en Hyver dans ces païs-cy.

Il n'a point neigé pendant toute cette année.

Le Thermometre a esprit de vin & scellé hermetiquement, dont je me sers pour mesurer le froid & la chaleur, m'a montré que le froid du commencement de l'année n'a pas été considerable, puisque ce Thermometre n'est descendu que jusqu'à 25 degrés le 2 Février, & seulement à 30 degrés le 13 Novembre où il a gelé assez fort, & aussi-tôt il est remonté vers les 40 degrés. Il commence toûjours à geler dans la campagne quand il est descendu jusqu'à 32. Son état moyen, comme il est au fond des carrieres de l'Observatoire, est à 48 degrés. Ces carrieres sont à 14 toises avant dans terre, & à peu près au niveau de la riviere quand elle est de moyenne hauteur. La plus grande chaleur du matin vers le lever du Soleil, qui est le tems où je fais toûjours ces observations, & où l'air est le plus froid de la journée, a été marquée par le Thermometre à 65 degrés $\frac{1}{2}$ le 18 Aoust ; mais vers les 3 heures après midy où l'air est le plus chaud du jour, le Thermometre étoit monté à 75 degrés à la fin du mois de Juillet & au commencement d'Aoust, & le 6 Aoust il étoit à 80 degrés, quoiqu'il soit à l'ombre & exposé à l'air dans la Tour découverte de l'Observatoi-

re, ce qui marquoit une très-grande chaleur, & je doute qu'elle ait jamais été plus grande dans ce païs-cy. Aussi la plûpart de ces Thermometres à esprit de vin se sont cassés, la liqueur qui y est contenuë n'ayant pas eu assez de place pour s'élever dans le haut du tuyau, ce qui n'est pas arrivé au mien à cause que je l'avois fait faire fort long pour le pouvoir exposer au Soleil.

On doit remarquer que la plus grande chaleur de l'aprés-midy ne répond pas toûjours à celle du matin par plusieurs causes particulieres. On voit aussi par ces observations que la chaleur de cette année a été beaucoup plus grande à proportion que le froid; car le Thermomettre a surpassé son état moyen dans la chaleur de 31 degrés, & il n'est descendu au-dessous dans le froid que de 23 degrés.

Voicy les observations de la pesanteur de l'air qui nous est marquée par le Baromettre. Dans celui dont je me sers ordinairement, & qui est de ceux qu'on appelle simples, & qui est toûjours placé à la hauteur de la grande Salle de l'Observatoire, le mercure s'y est élevé au plus haut à 28 pouces 3 lignes $\frac{1}{3}$ le 28 Février avec un vent foible Nord Nord-Est, & il est descendu au plus bas à 26 pouces 7 lignes $\frac{5}{6}$ le 20 Decembre avec un vent Oüest Sud-Oüest; ainsi la difference de hauteur entre le plus bas & le plus haut a été de 1 pouce 7 lignes $\frac{1}{2}$, à peu près comme à l'ordinaire.

La grande élevation du mercure dans le tuyau du Barometre ne nous paroît ordinairement que lorsque le vent est vers le Nord, & au contraire le plus grand abaissement du mercure n'arrive presque toûjours que quand le vent est vers le Sud, & qu'il est violent & avec orage; cependant il y a des causes particulieres qui peuvent rendre l'air plus pesant ou plus leger, sans que le vent soit vers le Nord ou vers le Sud. C'est pourquoi on ne doit pas trop s'assûrer sur les observations du Baromettre pour juger du tems qu'il doit faire.

Je remarquerai ici en passant qu'il y a des Baromettres

dans lesquels le mercure s'éleve bien plus haut que dans d'autres, dans le même tems & dans le même lieu, quoiqu'ils soient faits avec grand soin. Dans celui dont je me sers ordinairement, & dont je viens de rapporter les observations, le mercure y est toujours plus bas de 3 lignes ½ que dans un autre que j'ai aussi, qui est celui où l'on a remarqué la premiere fois de la lumiere dans le vuide du haut du tuyau en agitant le mercure, quoique dans l'autre il y en paroisse aussi. Mais si dans le Barometre où le mercure ne monte pas si haut, l'air grossier n'en a pas été vuidé aussi exactement que dans l'autre, à cause peut-être que son tuyau est fort long, il s'ensuit qu'il n'est pas necessaire que le mercure soit exactement purgé d'air pour faire paroître de la lumiere dans le vuide. Enfin aprés toutes les experiences que nous avons faites sur les Barometres avec differens mercures dans le même tuyau, & avec differens tuyaux & le même mercure, il semble qu'il faudroit croire que les differentes hauteurs de mercure dans les tuyaux du Barometre ne viennent que de la nature du verre dont les pores ne sont pas également serrés, & que l'air n'est pas seulement composé de deux matieres differentes, l'une toute grossiere & l'autre toute subtile; mais que les particules de la matiere grossiere ayant differentes grosseurs jusqu'à être subtile, les pores de quelques verres laissent passer cette matiere moins grossiere, qui par sa pesanteur fait descendre un peu le mercure dans le tuyau. Cette hypothese semble confirmée par l'une des dernieres experiences que M. Amontons fit à l'Academie avec un canon de mousquet bien soudé par l'un des bouts au lieu d'un tuyau de verre, où l'on remarqua que le mercure s'arrêta beaucoup plus bas que dans le verre ordinaire, peut-être à cause que les pores du fer sont beaucoup plus grands que ceux du verre.

J'ai observé la declinaison de l'aiguille aimantée de 9° 35′ vers l'Oüest le dernier jour de Decembre 1705, avec la même aiguille & dans le même lieu où je l'ay

faite depuis plusieurs années, & avec les mêmes circonstances, comme je l'ai marqué dans d'autres Memoires.

OBSERVATIONS

De la Pluïe & du Vent, faites en l'année 1705 au Château du Pontbriand situé à deux lieuës de Saint-Malo en Bretagne.

1706. 9. Janvier.

On a pû voir dans les Memoires de l'année 1704 les observations de la Pluïe & du Vent faites au Château du Pontbriand à deux lieuës de Saint-Malo en Bretagne. Voici la continuation de ces observations, que M. du Pontbriand a faites avec beaucoup d'exactitude au même lieu durant l'année 1705, & qu'il a envoyées à M. du Torar de l'Academie Royale des Sciences pour être communiquées à l'Academie, & pour être comparées avec les observations faites à Paris par M. de la Hire.

Année 1705.

JANVIER.

Jours.	*Eau de Pluïe.*	*Vents.*
3	2 lignes.	Nord Nord-Est.
10	2	S. S. E.
11	1 $\frac{1}{2}$	S. S. O.
12	1 $\frac{1}{2}$	O. N. O.
13	3 $\frac{1}{2}$	N. N. O.
14	1 $\frac{1}{2}$	O. N. O.
17	1 $\frac{1}{2}$	E. N. E.
19	0 $\frac{1}{2}$	E. N. E.

Total 14 lignes.

FEVRIER.

Jours.	*Eau de Pluie.*	*Vents.*
5	2 lignes.	Eſt-Sud-Eſt.
10	1	N. N. E.
13	0 $\frac{3}{4}$	N. O.
14	2	N. N. O.
16	2 $\frac{1}{2}$	S. S. O.
17	0 $\frac{1}{2}$	S. S. O.
18	2 $\frac{1}{2}$	E. S. E.
25	1 $\frac{1}{2}$	E. N. E.
28	0 $\frac{1}{4}$	E. N. E.

Total 13 lignes.

MARS.

Jours.	*Eau de Pluie.*	*Vents.*
4	3 $\frac{1}{2}$ lignes.	Nord-Eſt.
8	0 $\frac{3}{4}$	S. S. O.
10	0 $\frac{1}{2}$	S. S. O.
13	1 $\frac{1}{2}$	S. S. O.
14	0 $\frac{1}{4}$	S. S. E.
24	1	S. E.
25	1 $\frac{1}{2}$	S. E.
26	3 $\frac{1}{2}$	S. S. O.
27	5 $\frac{3}{4}$	S. S. O.
28	0 $\frac{1}{2}$	S. S. O.
29	3 $\frac{1}{2}$	S. E.
30	0 $\frac{1}{3}$	N. E.
31	0 $\frac{1}{2}$	N. E.

Total 23 lignes $\frac{1}{2}$.

AVRIL.

Jours.	*Eau de Pluie.*	*Vents.*
1	0 $\frac{1}{2}$ lignes.	Oüeſt.
2	1 $\frac{1}{2}$	N. O.
3	0 $\frac{1}{4}$	N. O.
4	2	N. O.
5	2 $\frac{3}{4}$	O. N. O.
7	3 $\frac{3}{4}$	O. S. O.

Jours.	*Eau de Pluie.*	*Vents.*
8	2 1/4 lign.	O. S. O.
9	1 1/2	S. S. O.
10	0 3/4	S. S. O.
11	1	N. O.
12	1	N. O.
15	1	N. O.
16	0 1/4	S. S. O.
19	1 3/4	N. E.
20	0 1/4	S. S. E.
24	4 1/2	O. E.
25	0 1/2	N. O.

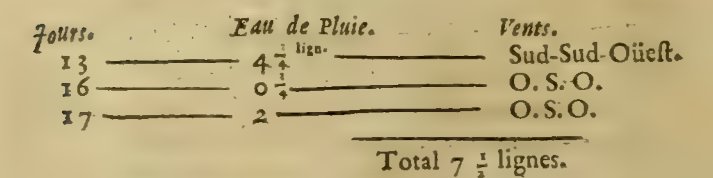
Total 26. lignes.

M A Y.

Jours.	*Eau de Pluie.*	*Vents.*
4	3 lign.	Oüeſt.
5	0 1/4	N. O.
18	4	N. O
26	0 1/2	S. E.
28	0 1/4	N. E.

Total 8 3/4 lignes.

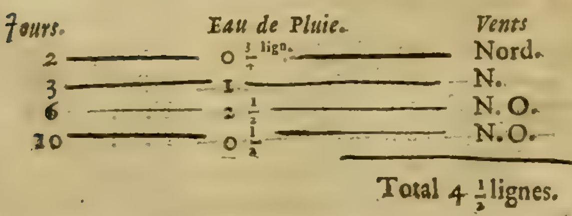
J U I N.



Jours.	*Eau de Pluie.*	*Vents.*
13	4 3/4 lign.	Sud-Sud-Oüeſt.
16	0 3/4	O. S. O.
17	2	O. S. O.

Total 7 1/2 lignes.

J U I L L E T.



Jours.	*Eau de Pluie.*	*Vents*
2	0 3/4 lign.	Nord.
3	1	N.
6	2 1/2	N. O.
10	0 1/2	N. O.

Total 4 1/2 lignes.

AOUST

AOUST.

Jours.	*Eau de Pluie.*	*Vents.*
7	2 $\frac{3}{4}$ lignes.	Sud Oüeſt.
21	3	O. S. O.
23	1 $\frac{1}{2}$	S. O.
24	1	N. O.
27	2 $\frac{1}{2}$	E. S. E.
31	1	O. S. O.

Total 11 $\frac{3}{4}$ lignes.

SEPTEMBRE.

Jours.	*Eau de Pluïe.*	*Vents.*
3	2 lignes.	Nord Oüeſt
4	2 $\frac{1}{4}$	N. N. O.
5	2 $\frac{1}{2}$	O. S. O.
6	3 $\frac{1}{2}$	O. S. O.
8	3	N. O.
10	1 $\frac{1}{4}$	S. O.
15	0 $\frac{1}{2}$	N. O.
23	3	N. N. O.

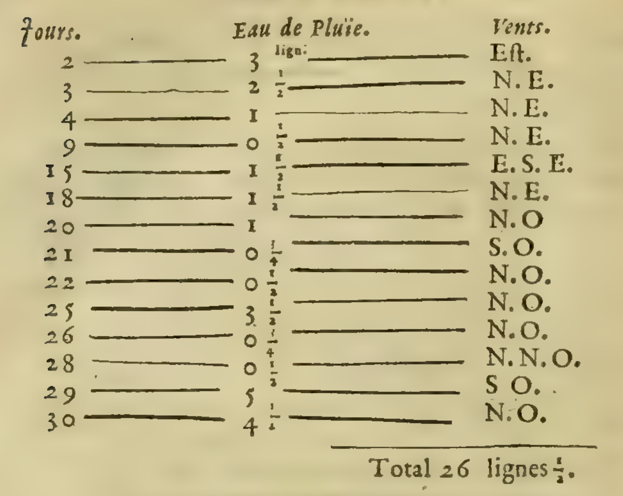
Total 18 lignes.

OCTOBRE.

Jours.	*Eau de Pluie.*	*Vents.*
6	5 $\frac{1}{2}$ lign.	Nord-Oüeſt.
12	1	N. O.
13	1	N. O.
14	0 $\frac{1}{2}$	N. O.
15	2	S. S. O.
16	0 $\frac{1}{2}$	S. S. O.
17	3 $\frac{1}{2}$	S. S. O.
18	6 $\frac{3}{4}$	S. S. O.
19	3	S. S. O.
29	2	S. S. O.
30	3	N. O.
31	3	N. O.

Total 31 $\frac{3}{4}$ lignes.

NOVEMBRE.



Jours.	*Eau de Pluïe.*	*Vents.*
2	3 lign:	Eſt.
3	2 1/2	N. E.
4	1	N. E.
9	0 1/2	N. E.
15	1 1/2	E. S. E.
18	1 1/2	N. E.
20	1	N. O
21	0 1/4	S. O.
22	0 1/2	N. O.
25	3 1/2	N. O.
26	0 1/4	N. O.
28	0 1/2	N. N. O.
29	5	S O.
30	4 1/4	N. O.

Total 26 lignes 1/2.

DECEMBRE.

Jours.	*Eau de Pluïe.*	*Vents.*
1	1 lignes.	Nord. Oüeſt
3	5	N. O.
4	5 1/4	O. S. O.
5	2 1/2	N. O.
6	1 1/2	S. O.
10	3 1/2	S. O.
13	2 1/2	S. S. O.
14	1	S. S. O.
15	8 1/2	S. S. O.
16	3	N. O.
17	2	N. O.
18	1 1/2	N. O.
19	7 1/4	O. S. O.
20	3	N. O.
21	2 1/2	N. O.
22	5 1/2	S, O.
24	3 1/2	O. S. O.
25	3	O. S. O.
26	4	O. S. O.
29	1	O. S. O.
		S. S. O.

Ce jour 30. il y a eu une violente tempête, qui a causé de grands désordres dans toute la Bretagne. 30		5	S.S.O.
31		5	S.S.O.
		Total 75. lignes.	

Total de la quantité de l'eau de pluïe tombée au Pontbriand durant l'année 1705. 260 lignes.
Et en l'année 1704. 284 lignes.
Difference 16 lignes.

AUTRES OBSERVATIONS

De la Pluïe tombée pendant l'année 1705. à Lyon, & communiquées à M. Cassini par le P. Fulchiron Jesuite.

1706. 16 Janvier.

	lignes.
JAnvier	7
Fevrier	27
Mars	18 $\frac{1}{2}$
Avril	10 $\frac{1}{2}$
May	23 $\frac{1}{2}$
Juin	26 $\frac{1}{2}$
Juillet	12 $\frac{3}{4}$
Aoust	15
Septembre	6 $\frac{1}{4}$
Octobre	47 $\frac{3}{4}$
Novembre	14 $\frac{3}{4}$
Decembre	63 $\frac{1}{2}$

Somme totale . . 272 $\frac{1}{2}$, ou 22 pouces 8 lignes $\frac{1}{2}$.
L'année 1704 il plut . . . . 15 pouces 4 lignes $\frac{1}{2}$.

Difference . . . . 7 pouces 4 lignes.

OBSERVATIONS.

Du Barometre & du Thermometre faites en differentes Villes pendant l'année 1705.

PAR M. MARALDI.

1706. 16 Janvier. LE Barometre dans la Tour Occidentale de l'Observatoire a été dans sa plus grande hauteur les trois derniers jours de Fevrier, qu'il se trouva à 28 pouces 3 lignes ½ par un vent de Nord & de Nord-Est. La plus petite hauteur à laquelle il soit descendu a été de 26 pouces 8 lignes ½, ce qui arriva le 19 Decembre par un vent de Sud & de Sud-Est très-violent avec pluïe. La variation de la hauteur du Barometre a été de 1. pouce & 7 lignes.

Le Thermometre de M. Amontons, placé dans la Tour Occidentale de l'Observatoire, a été le 2 & le 3 Fevrier de l'an 1705 à 51 degrés 11 lignes, qui est la plus petite hauteur où il soit arrivé. Par les observations que M. le Marquis Salvago a faites à Gennes avec un Thermometre semblable au nôtre, le 3 de Fevrier fut aussi le jour qu'il s'est trouvé plus bas, ayant été à 52 degrés 10 lignes, presqu'un degré plus haut qu'à Paris. Par les observations faites à Lyon par le P. Fulchiron, le Thermometre fut aussi le même jour 3 Fevrier au degré le plus bas qu'il soit arrivé durant l'année 1705.

A Paris le Thermometre a été au plus haut degré le 6 d'Aoust, étant monté ce jour-là à 57 degrés 3 lignes par un vent de Sud-Est. Le même jour un Thermometre de M. Cassini qui étoit depuis 35 ans en experience se cassa, la liqueur ayant rempli tout le tuyau. A Gennes le Thermometre de M. Amontons fut le 2 & le 3 Aoust au plus haut degré où il soit arrivé l'année 1705, & il monta à 56 degrés 8 lignes, faisant ces jours-là un vent de Nord ; de sorte qu'à Gennes le Thermometre n'est pas monté

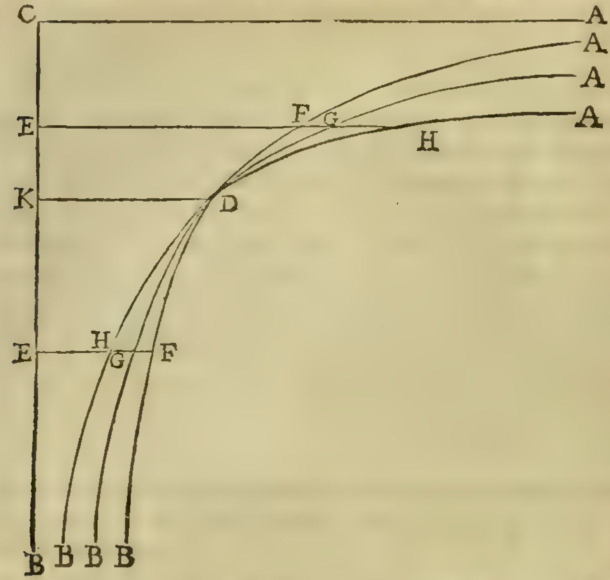
cette année aussi haut qu'à Paris, y ayant un demi-degré de difference. A Lyon le Thermometre est monté au plus haut le 8 Aoust deux jours après qu'à Paris. Par les observations que M. Bon a faites à Montpellier avec un Thermometre de M. Amontons, le 30 Juillet le Thermometre fut à 58 degrés 2 lignes, ayant été ce jour-là à la plus grande hauteur qu'il ait eu pendant toute l'année, & à Montpellier il a été presque un degré plus haut qu'à Paris. Le 30 Juillet à Montpellier la plûpart des vignes furent brûlées par la grande chaleur, & le même Thermometre ayant été exposé au Soleil pendant 28 minutes de temps, monta au dernier degré, c'est-à-dire à 73 pouces, qui est le même degré où M. Amontons marque le degré de chaleur de l'eau boüillante.

REFLEXIONS.

Sur les espaces plus qu'infinis de M. Wallis.

PAR M. VARIGNON.

MOnsieur Walis cherchant la mesure des Espaces renfermez par des hyperboles & leurs asymptotes, & ayant trouvé pour l'expression de quelques-uns de ces Espaces des grandeurs negatives, a crû qu'ils étoient plus qu'infinis. Mais comme un plus qu'infini m'a toûjours parû renfermer une contradiction, cela m'a determiné à chercher le dénoüement de ce mystere, qui cessera d'en être un, dès que j'aurai fait voir que ce que cet Auteur prend pour l'expression d'un Espace plus qu'infini, n'est pas même celle d'un infini, mais seulement d'un Espace fini, qui est à la verité le complément d'un Espace infini; & qu'ainsi les hyperboles & leurs asymptotes ne renferment point d'Espaces plus qu'infinis, comme cet Auteur l'a pretendu. C'est-là l'éclaircissement qui a été promis dans le Livre de M. Carré sur le Calcul Integral. 1706. 3. Fevier.



I. Soient donc tous les genres d'hyperboles *AFB*, *AGB*, & *AHB*, entre les mêmes aſymptotes perpendiculaires *AC*, *CB*, dont le degré de la puiſſance des ordonnées *EF*, *EG*, *EH*, ſoit dans l'une plus haut, dans l'autre le même, & dans la troiſiéme plus bas que celui (m) des abſciſſes *CE*. Enſorte que le lieu de *AFB* ſoit $CE^m \times EF^{m+n} = CK^{2m+n}$; celui de *AGB*, $CE^m \times EG^m = CK^{2m}$; & celui de *AHB*, $CE^m \times EH^{m-n} = CK^{2m-n}$, dans lequel il faut toûjours $m > n$, autrement ce dernier lieu ſe changeroit en parabolique dans le cas de $m < n$, ou du moins à la ligne droite dans celui de $m = n$.

II. Cela poſé, l'on aura $EF = \dfrac{CK^{\frac{2m+n}{m+n}}}{CE^{\frac{m}{m+n}}}$, $EG = \dfrac{CK^2}{CE}$, & $EH = \dfrac{CK^{\frac{2m-n}{m-n}}}{CE^{\frac{m}{m-n}}}$. Donc

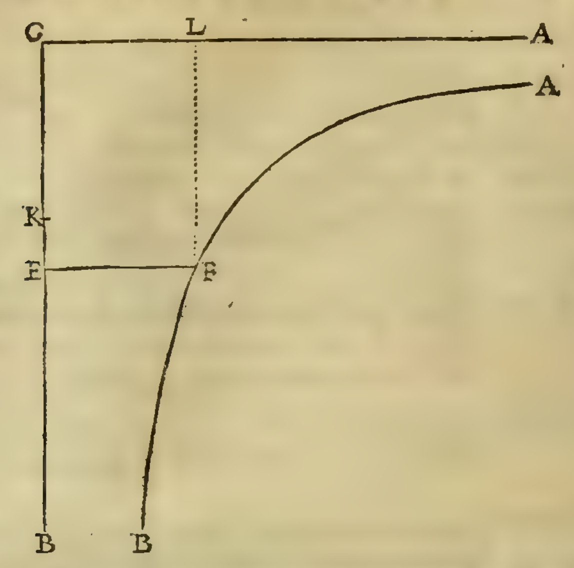
1°. $EF. EG :: \frac{CK^{\frac{2m+n}{m+n}}}{CE^{\frac{m}{m+n}}} . \frac{CK^2}{CE} :: \frac{CE}{CE^{\frac{m}{m+n}}} . \frac{CK^2}{CK^{\frac{2m+n}{m+n}}} :: CE^{\frac{n}{m+n}} . CK^{\frac{n}{m+n}}$. D'où l'on voit que dans le cas du degré ($m+n$) des ordonnées plus grand que celui (m) des abſciſſes, l'on aura $EF < EG$ depuis C juſqu'en K, & $EF > EG$ par-delà K vers B à l'infini : de ſorte que les hyperboles AFB & AGB ſe couperont à l'extremité D de l'ordonnée KD.

2° L'on aura auſſi $EG. EH :: \frac{CK^2}{CE} . \frac{CK^{\frac{2m-n}{m-n}}}{CE^{\frac{m}{m-n}}} : CE^{\frac{n}{m-n}} . CK^{\frac{n}{m-n}}$. D'où l'on voit au contraire que dans le cas du degré ($m-n$) des ordonnées moindres que celui (m) des abſciſſes, l'on aura toujours $EH > EG$ depuis C juſqu'en K, & $EH < EG$ par-delà K vers B à l'infini : de ſorte que les hyperboles AHB & AGB ſe couperont auſſi en D.

III. On voit delà que l'eſpace $ACBBGGA$ entre l'hyperbole ordinaire AGB & ſes aſymptotes, étant infini de part & d'autre, l'hyperbolique $ACBBFFA$ ſera auſſi infini du côté de B qu'il eſt le plus ouvert ; & l'hyperbolique $ACBBHHA$ infini de même du côté de A qu'il eſt auſſi le plus ouvert.

IV. Mais avant que de chercher la valeur juſte de ces eſpaces, il eſt bon (pour moins d'embarras) de remarquer que les deux derniers reviennent au même genre d'hyperbole, ſçavoir à celui dont les coordonnées montent à des puiſſances differentes ; puiſqu'on peut prendre à diſcrétion celles du plus haut ou du plus bas degré pour les ordonnées de cet Courbe. Par exemple ici, le lieu (*art.* 1.) $CE^m \times EF^{m+n} = CK^{2m+n}$ de l'hyperbole AFB, repreſentant ſes ordonnées EF à un plus haut degré que ſes abſciſſes CE, repreſente de même ſes ordonnées LF à un plus bas degré que les abſciſſes CL : De ſorte que l'on peut également dire que les ordonnées de l'hyper-

Voyez la Figure de la page ſuivante.



bole *AFB* sont d'un plus haut ou d'un plus bas degré que ses abscisses, selon qu'on les choisira pour telles; & ainsi de toute autre hyperbole dont les coordonnées montent à des puissances différentes.

V. Cela étant, l'espace *BEFB* pris du côté de *B*, sera celui que M. Wallis appelle *plus qu'infini*. Pour en trouver presentement la valeur, soient $CE = x$, $EF = v$, & $CK = a$ constante. L'on aura (*art.* 1.) $x^m v^{m+n} = a^{2m+n}$,

ou $v\ (EF) = \frac{a^{\frac{2m+n}{m+n}}}{x^{\frac{m}{m+n}}}$ pour le lieu de l'hyperbole *AFB*;

ce qui donne l'élément $v\,dx = a^{\frac{2m+n}{m+n}} x^{\frac{-m}{m+n}} dx$, & l'espace $ACEFA\ (\int v\,dx) = \frac{m+n}{n} \times a^{\frac{2m+n}{m+n}} x^{\frac{n}{m+n}} = \frac{m+n}{n} \times CK^{\frac{2m+n}{m+n}} \times CE^{\frac{n}{m+n}}$: c'est-à-dire, fini du côté de *A* par raport auquel *CE* est finie; & seulement infini du côté de *B*, puisque cette même *CE* n'y sçauroit devenir tout au plus qu'infinie.

VI. Donc

VI. Donc si en prenant *LE* (x) pour l'ordonnée de l'hyperbole *AFB*, (*art. 5.*) $x\,dv = a^{\frac{2m+n}{m}} v^{\frac{-m-n}{m}} dv$ pour l'élément de son espace *BCLFB* entre asymptotes, cet espace ($\int x\,dv$) se trouve $= \frac{ma^{\frac{2m+n}{m}} v^{\frac{-n}{m}}}{-n} = \frac{ma^{\frac{2m+n}{m}}}{-nv^{\frac{n}{m}}}$ négatif, ce n'est pas une marque qu'il soit plus qu'infini, comme l'a dit * M. Wallis; mais seulement qu'au lieu de cet espace *BCLFB* il faut prendre son complément *ALFA* $= \frac{ma^{\frac{2m+n}{m}}}{nv^{\frac{n}{m}}}$ positif: ce qui arrive très-souvent dans une infinité d'autres quadratures. En effet les signes $+$ & $-$ n'étant que des marques d'operation, sçavoir d'addition & de soustraction, à faire sur les grandeurs qu'ils affectent, ils n'en changent point du tout la valeur, bien loin de pouvoir les reduire à moins que rien, ainsi qu'il faudroit pour M. Wallis; mil écus que je dois, valent autant que mil écus que j'aurois; 6 à ajoûter valent autant que 6 à retrancher, &c. Et si l'on dit que $+6$ ne sont pas égaux à -6, cela ne signifie autre chose sinon qu'ajoûtant 6 on fait plus que si on les retranchoit, les operations d'addition & de soustraction, exprimées par les signes $+$ & $-$, étant aussi comprises dans cette comparaison. Donc $\frac{ma^{\frac{2m+n}{m}}}{-nv^{\frac{n}{m}}}$ vaut autant que $\frac{ma^{\frac{2m+n}{m}}}{+nv^{\frac{n}{m}}}$, c'est à dire, seulement une espace fini, bien loin d'en signifier un plus qu'infini: Toute la difference, c'est que les espaces exprimés par ces formules, sont renversés l'un par raport à l'autre, comme les expressions négatives le marquent par tout en Geometrie.

* *Arith. infin. Schol. prop.* 101. & *prop.* 104 &c.

VII. Pour prouver encore que la valeur négative $\frac{ma^{\frac{2m+n}{m}}}{-nv^{\frac{n}{m}}}$ trouvée (*art. 6.*) pour l'espace cherché *BCLFB*,

n'eſt point une expreſſion plus qu'infinie de cet eſpace, mais ſeulement une valeur finie de ſon complément *ALFA* à l'égard duquel elle devient poſitive, enſorte que *ALFA* ſoit $= \frac{m a^{\frac{2m+n}{m}}}{n v^{\frac{n}{m}}}$; il n'y a qu'à conſiderer que ſi de l'eſpace fini *ACEFA* trouvé cy-devant (*art.* 5.) $= \frac{m+n}{n} \times a^{\frac{2m+n}{m+n}} x^{\frac{n}{m+n}}$, l'on retranche le parallelogramme *CEFL* (xv) l'on aura *ALFA* $= \frac{m+n}{n} a^{\frac{2m+n}{m+n}} x^{\frac{n}{m+n}} - xy$ (à cauſe que le lieu $x^m v^{m+n} = a^{2m+n}$ de l'art. 5. donne $x = \frac{a^{\frac{2m+n}{m}}}{v^{\frac{m+n}{m}}}$, & $x^{\frac{n}{m+n}} = \frac{a^{\frac{2mn+n^2}{m^2+mn}}}{v^{\frac{n}{m}}}$) $= \frac{m+n}{n} \times \frac{a^{\frac{2m+n}{m+n} + \frac{2mn+n^2}{m^2+mn}}}{v^{\frac{n}{m}}}$ $- \frac{a^{\frac{2m+n}{m}}}{v^{\frac{n}{m}}} = \frac{m+n}{n} \times \frac{a^{\frac{2m^2+3mn+n^2}{m^2+mn}}}{v^{\frac{n}{m}}} - \frac{a^{\frac{2m+n}{m}}}{v^{\frac{n}{m}}} = \frac{m+n}{n} \times \frac{a^{\frac{2m+n}{m}}}{v^{\frac{n}{m}}}$ $- \frac{a^{\frac{2m+n}{m}}}{v^{\frac{n}{m}}} = \frac{m a^{\frac{2m+a}{m}}}{n v^{\frac{n}{m}}}$, ainſi que je viens de dire.

VIII. Après cela le lieu général $x^m y^p = a^{m+p}$ des hyperboles entre aſymptotes (telles que dans la Fig. 1. dont les ordonnées *EF*, *EG*, *EG*, ſont ici chacune ſéparément $= y$, & leurs abſciſſes communes $CE = x$) donnant $\frac{p a^{\frac{m+p}{p}} x^{\frac{p-m}{p}}}{p-m}$ pour l'eſpace aſymptotique terminé par une de leurs ordonnées (y); il eſt aiſé de voir,

Voyez la Figure de la page 14. ci-deſſus.

1°. Que lorſque $p > m$, comme (*art.* 2. *n.* 1.) dans l'hyperbole *AFB*, cet eſpace doit être *ACEFA* $= \frac{p a^{\frac{m+p}{p}} x^{\frac{p-m}{p}}}{p-m}$ fini, & le tout *ACBBFA* infini lorſque x (*CE*) eſt infinie. Ce qui prouve que la valeur de cet eſpace prolongé à

l'infini de part & d'autre, doit être fini du côté de A, & infini du côté de B.

2°. Lorsque $p < m$, comme (*art.* 2. *n.* 2.) dans l'hyperbole AHB, la formule générale $\frac{pa^{\frac{m+p}{p}} x^{\frac{p-m}{p}}}{p-m}$ devenant ici négative, au lieu d'exprimer l'espace cherché $ACEHA$, elle se change en celle de son complément $BEHB$, & donne ce complément $BEHB = \frac{pa^{\frac{m+p}{p}}}{m-p \times x^{\frac{m-p}{p}}}$ positif : de maniére que lorsque x (CE) sera $= 0$, tout l'espace $BCAAHB$ sera infini. Ce qui fait voir aussi que la valeur de cet espace prolongé à l'infini de part & d'autre, doit être fini du côté de B, & infini du côté de A, comme dans l'hyperbole AFB cy-dessus ; mais à rebours, ainsi qu'il doit arriver suivant l'art. 4.

3°, Enfin lorsque $p = m$, comme (*art.* 1.) dans l'hyperbole AGB, l'expréssion générale $\frac{pa^{\frac{m+p}{p}} x^{\frac{p-m}{p}}}{p-m}$ des espaces hyperboliques asymptotiques donne le cherché $ACEGA$ aussi-bien que son complément $BEGB = \frac{aa}{0}$. D'où l'on voit que l'espace $ACBBGA$ doit être infini de part & d'autre ; & par conséquent plus infini (pour ainsi dire) que les précédens $ACBBFA$ & $ACBBHA$ qu'on vient de voir ne l'être que par chacun un côté. Donc il s'en faut bien qu'ils ne soient plus qu'infinis : Et c'est tout ce qu'on s'étoit proposé d'examiner ici.



REMARQUES
ET
REFLEXIONS
Sur la nature des Cataractes qui se forment dans l'œil.

PAR M. DE LA HIRE.

1706. 17 Fevrier. ON a distingué le *Glaucoma* de la *Cataracte*, en ce que le Glaucoma se prend pour une maladie du Crystallin, qui devient opaque & de couleur blanchâtre ou verdâtre; mais la Cataracte n'est composée que de quelques filets ou toiles qui se forment dans l'humeur aqueuse, & qui peu à peu en s'épaississant empêchent les raïons de la lumiere de penetrer dans l'œil jusqu'à la retine.

On a toûjours jugé que le Glaucoma étoit un mal incurable, puisqu'il n'étoit pas possible de rendre au Crystallin sa transparence quand il l'avoit perduë: mais pour la Cataracte il s'est trouvé des Operateurs assés adroits pour percer l'œil par le côté avec une aiguille, & rompre en tournant fort doucemement les especes de membranes qui la forment; & en les rangeant dans la partie basse de l'œil derriere la membrane uvée, rendre à l'œil son usage ordinaire.

C'est-là le sentiment commun qu'on a de ces maladies. Cependant quelques Medecins soûtiennent à present que ce ne sont point des pellicules ou membranes qu'on abbaisse quand on fait l'operation de la Cataracte; mais que c'est le Cristallin même qu'on détache du ligament ciliaire qui le soûtient, & qu'on le range vers la partie basse de l'œil. Ils disent pour confirmer ce qu'ils avancent, qu'ils ont trouvé le Cristallin dérangé & abaissé dans la

dissection de l'œil d'un homme à qui on avoit fait cette operation.

Mais je réponds que s'il étoit possible de déplacer le Cristallin en le détachant du ligament ciliaire, le Glaucoma ne seroit plus une maladie incurable, comme on l'a jugé jusqu'à present. Et si l'on abaissoit toûjours le Crystallin dans cette operation, la Cataracte suivant l'opinion commune ne seroit qu'une maladie imaginaire, puisque sans se mettre en peine de cette membrane ou peau qu'on croit voir dans l'humeur aqueuse, ni de toutes les observations qu'on fait pour juger s'il est tems de l'abaisser, & si elle est assés meure & de nature à être détournée & rompuë avec l'aiguille, on gueriroit toûjous ce mal en quelque tems & en quelque circonstance que ce fût en abaissant le Cristallin, & l'on rendroit la vûë au malade.

Mais il semble dans ce doute qu'on accuse les Operateurs de ne sçavoir pas ce qu'ils font, & que croïant abattre des especes de pellicules, ils détachent & abattent le Cristallin. Cependant il y a peu d'apparence qu'ils se trompent tous, hormis quelques-uns, dans le jugement qu'ils font de ces deux maladies de l'œil, & dans cette operation.

Ces jours passés M. Chomel de cette Academie ayant voulu faire avec nous quelques operations sur des yeux de bœuf au sujet des differens sentimens qu'on avoit de la Cataracte, nous ouvrîmes d'abord un de ces yeux pour voir si l'humeur vitrée étoit adherante à la membrane qui renferme le Crystallin, & nous reconnûmes qu'elle s'en détachoit assés facilement. Ensuite dans d'autres yeux nous perçâmes de biais la Sclerotique entre le ligament ciliaire & l'uvée avec une aiguille applatie par le bout, comme sont quelques-unes de celles dont on se sert dans les operations ordinaires, & l'ayant poussée jusques dans le Crystallin, nous la tournâmes & nous fîmes en même tems tourner le Crystallin qui y étoit attaché ; car il est d'une consistance assés ferme pour résister à l'effort qu'il falloit faire pour rompre le ligament ciliaire, & pour

coucher le Cryſtallin dans l'humeur vitrée ou dans l'aqueuſe : mais nous remarquâmes que l'humeur vitrée reſiſtoit toûjours au Cryſtallin & le ſoûtenoit, quoiqu'il fût couché, enſorte qu'il bouchoit la plus grande partie de la prunelle ; & quand nous voulûmes retirer l'aiguille, le Cryſtallin qui y étoit attaché ſuivoit en même tems, & ne quittoit point l'aiguille que par la réſiſtance que lui faiſoit la partie interieure de l'œil. Il arrive auſſi quelquefois qu'en tournant l'aiguille le ligament ciliaire ne ſe rompt pas, mais que le corps du Cryſtallin ſe ſépare de ſa membrane, & qu'il tourne au-dedans, enſorte qu'en retirant l'aiguille on déchire cette membrane où elle eſt percée, & que le Cryſtallin ſort par cette ouverture, & reſte entre le ligament ciliaire & l'uvée, & bouche toute l'ouverture de la prunelle, ou la plus grande partie.

On voit par-là qu'on ne pourroit retirer aucun avantage du Cryſtallin abatu, puiſque s'il étoit opaque il intercepteroit toûjours les raïons des objets, & il les empêcheroit d'entrer dans l'œil étant trop gros, & ne pouvant pas être aſſés abaiſſé pour être caché au-deſſous de l'ouverture de la prunelle : car l'humeur vitrée eſt mucillagineuſe & comme de la gomme Adragante fonduë dans l'eau, & de plus on ne pourroit le ranger dans l'humeur aqueuſe ſans rompre la membrane uvée.

Une des grandes objections qu'on puiſſe faire contre le ſentiment de ceux qui diſent que la Cataracte eſt formée de pellicules qui ſont ſuſpenduës dans l'humeur aqueuſe, eſt que ceux à qui on a abatu la Cataracte ſont obligés de ſe ſervir d'une loupe ou gros verre pour voir diſtinctement les objets, ce qui ne devroit pas être, ſi les trois humeurs demeuroient à leur place & dans leur entier : mais on nous a aſſûré qu'il y avoit des perſonnes qui voyoient fort bien après l'operation ſans ſe ſervir de loupe ; & il ſe peut faire que dans quelque ſujets l'humeur aqueuſe ne laiſſe pas d'être encore un peu trouble, quoique les pellicules ne ſoient plus au-devant de la prunelle, & qu'ils ſont obligés de ſe ſervir de loupe pour faire paſſer plus de

rayons dans l'œil, qui ne laissent pas de s'assembler toûjours sur la retine si l'on approche l'objet un peu plus près de l'œil.

On fait encore une autre objection contre le même sentiment, & c'est comment il se peut faire que les pellicules qui forment la Cataracte soient toûjours placées entre le Cryſtallin & l'uvée. Mais je répondrois à celle-ci que les parties de l'œil qui fournissent les matieres qui forment les pellicules de la Cataracte, sont aussi entre le Cryſtallin & l'uvée, & c'est pourquoi elles se doivent toûjours trouver dans cet endroit de l'humeur aqueuse.

Cette seconde objection a pû faire naître à quelques-uns une idée de la nature de la Cataracte fort differente des premieres. Ils disent que la Cataracte n'est qu'un épaississement des premieres enveloppes du Cryſtallin qui est formé par plusieurs de ces enveloppes à peu près comme un oignon, & que dans l'operation on arrache cette peau opaque de dessus la surface du Criſtallin, & qu'alors le Criſtallin étant devenu plus mince, il faut suppléer au défaut de sa convexité par celle d'un verre placé entre l'objet & l'œil.

Il est vrai que le Cryſtallin ayant été seché à l'air, paroît composé de plusieurs peaux qui enveloppent au milieu une espece de noyau d'une consistance un peu plus dure que le reste : mais quelle main assez adroite & quels outils faudroit-il avoir pour arracher cette peau opaque de dessus le Cryſtallin ? Et quand cela se pourroit faire, on romproit necessairement le ligament ciliaire qui seroit attaché à cette peau, & par consequent tout le corps du Cryſtallin tomberoit en quelque endroit dans l'humeur aqueuse, & en s'y plaçant de côté détourneroit les rayons & empêcheroit la vision.

On a remarqué que plusieurs personnes à qui on avoit abbatu la Cataracte voyoient très-bien les objets aussi-tôt après que l'operation avoit été faite ; mais que quelques jours après que l'on commençoit à leur débander les yeux, ils ne voyoient plus rien, & qu'ils avoient entierement

perdu la vûë, quoiqu'il ne parût point au dehors que la Cataracte fut remontée. Voici comme il me semble qu'on peut rendre raison de cet accident.

Il est trés-difficile qu'en abbattant les pellicules qui forment la Cataracte, surtout si elles sont fort adherantes au dedans de l'œil, que le tranchant de la pointe de l'aiguille ne touche la surface anterieure du Crystallin à cause de sa convexité ; & si l'on ouvre un peu la membrane du Crystallin, tout le Crystallin se plisse & se ride, & à cause de ces plis les rayons des objets lumineux ne passent plus directement vers la retine ; mais ils s'écartent d'un côté & d'autre, & l'œil ne peut rien appercevoir. Mais le Crystallin touchant l'humeur aqueuse par l'endroit où sa membrane aura été blessée, ce plissement n'arrivera pas subitement aprés le coup, mais quelque tems apres : c'est-pourquoi on peut voir les objets aussi-tôt aprés l'operation, & dans la suite on ne les verra plus.

OBSERVATIONS

Sur les Methodes de Maximis & Minimis, *où l'on fait voir l'identité & la difference de celle de* l'Analyse des Infiniment petits avec celles de Mrs Fermat & Hude.

PAR M. GUISNE'E.

1706. 10 Fevrier. UN de mes amis qui demeure en Province, habile homme dans l'ancienne Geometrie & dans l'Algebre ordinaire, à qui j'envoïai il y a quelque tems le Livre des l'*Analyse des Infiniment petits*, m'a prié par une de ses Lettres de lui donner des éclaircissemens sur quelques difficultés qu'il trouve dans la troisiéme Section, où *M. le Marquis de l'Hôpital*, l'illustre Auteur de cet Ouvrage, enseigne la methode de résoudre, par le calcul differentiel, les questions *de Maximis & Minimis.*

Voici

Voici ses difficultés dans les termes qu'il les propose.

Premiere difficulté. Lorsque la supposition de $dy = o$, & celle de $dy = \infty$, donnent chacune une valeur de x; pourquoi doit on préferer celle qui est tirée de la supposition de $dy = o$ à celle qui est tirée de la supposition de $dy = \infty$? Ce qu'observe toûjours l'Auteur. Dans le premier Exemple art. 48. où il cherche la plus grande appliquée de la Courbe dont la nature est exprimée par cette Equation *A*

$$A.\ x^3 + y^3 = axy.$$

Ayant differentié l'Equation *A*, & tiré de la supposition de $dy = o$, $x = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{2}$; il dit que cette valeur de x résout la question, & il ne fait aucune mention ni de la supposition de $dy = \infty$, ni de la valeur de x qu'on en tire, qui est $x = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{4}$, quoique cette derniere valeur soit autant réelle que la premiere.

Seconde difficulté. Comment connoître celle des valeurs de x qu'il faut choisir, lorsque l'une ou l'autre supposition de $dy = o$, ou $= \infty$, où toutes les deux en donnent plusieurs differentes ?

Troisiéme difficulté. De quelle maniere doit-on s'assurer, si l'appliquée qui répond à une valeur de x tirée ou de la supposition de $dy = o$, ou de celle de $dy = \infty$, est un *Maximum* ou un *Minimum*, lorsque la Courbe n'est point décrite & qu'on n'en connoît point la figure, ce que je suppose toûjours ?

Quatriéme difficulté. Lorsqu'une appliquée, qui répond à une valeur de x tirée de l'une ou de l'autre supposition de $dy = o$ ou $= \infty$, rencontre une Courbe en deux ou plusieurs points; comment déterminer celui d'entre ces pointes où la tangente est parallele à l'axe ? Car ce n'est qu'en ce cas qu'une appliquée est un *Maximum* ou un *Minimum*.

Cinquiéme difficulté. Lorsqu'une appliquée, qui répond à une valeur de x tirée de la supposition de $dy = o$, ou $= \infty$, rencontre une Courbe en un point où la tangente n'est parallele à aucun des axes conjugués; cette appli-

„ quée n'est alors ni un *Maximum* ni un *Minimum*, puisque „ d'un côté il y en a de moindres, & de l'autre de plus gran- „ des. De quelle adresse doit-on user pour le remarquer?

Quoique ces difficultés ne soient point insurmontables à ceux qui entendent l'Algebre commune, & les principes des infiniment petits, & qu'il y ait bien de l'apparence qu'elles ont paru si legeres à M. le Marquis de l'Hôpital, qu'il ne s'est pas voulu donner la peine de les lever; peut-être neanmoins que le nombre de ceux qui n'en sont pas capables merite qu'on leur en donne l'éclaircissement.

Je le mettrai ici à peu près de la maniere que je l'ai envoyé à nôtre Geometre, après avoir fait quelques observations sur les differens raports qui se rencontrent entre les differences (dx & dy) des coordonnées des Courbes, sur les differens *Maxima & Minima*, & sur quelques autres circonstances qui ont raport aux questions de *Maximis & Minimis*.

OBSERVATION I.

I. En supposant ce qui est démontré dans l'Analyse des infiniment petits art. 47. qu'aux points des lignes courbes où les tangentes sont paralleles aux axes conjugués des mêmes Courbes, le raport des differences de leurs coordonnées est toûjours infini. On observera.

Fig. I. 1°. Que dans toutes les Courbes comme AMB, qui rencontrent un de leurs axes AB en deux points A & B, où les tangentes AF, BG sont paralleles aux ordonnées PM (AP, x; PM, y), le raport de dx à dy croît depuis l'Infiniment petit en A, ou $x = o = y$, jusqu'à devenir Infiniment grand en D, où la tangente DF est parallele à AB, & ou x (AE) & y (ED) sont toutes deux réelles; & diminuë ensuite depuis l'infiniment grand en D, jusqu'à devenir Infiniment petit en B, où x (AB) est réelle & finie, & $y = o$.

Fig. II. 2°. Que dans les Courbes HMI qui ont deux asymptotes AH, AI, & dont les coordonnées sont AP, x; PM, y; le raport de dx à dy croît depuis l'infiniment petit du

côté de *H*, où *AP* devient nulle ou $=o$, & *PM* devient *AH* infinie, jusqu'à devenir Infiniment grand du côté de *I*, où *AP* devient *AI* infinie, & $PM=o$.

3°. Que dans les Courbes *AMI* qui touchent un de leurs axes en *A*, qui ont une asymptote *BI*, parallele à l'autre, & dont les coordonnées sont *AP*, x; *PM*, y; le raport de dx à dy diminuë depuis l'Infiniment grand en *A*, ou $x=o$ & $y=o$, jusqu'à l'Infiniment petit du côté de *I*, ou *AP* (x) devient *AB* finie, & *PM* (y) devient *BI* infinie, étant asymptote à la Courbe, c'est à dire, une tangente infinie. Fig. III.

4°. Qu'entre les Courbes *AMI* qui s'étendent à l'infini vers *I*, en s'éloignant toûjours de leur axe *APB*, il y en a où les tangentes infinies sont paralleles à leur axe *APB* (telles sont toutes les paraboles), & où par consequent le raport de dx à dy croît depuis l'Infiniment petit en *A*, où *AP* & *PM* deviennent nulles ou $=o$, jusqu'à l'Infiniment grand du côté de *I*, ou *AP* & *PM* deviennent toutes deux infinies. Fig. IV. V. Fig. IV.

Il y en a d'autres où les tangentes infinies *CDI* rencontrent leur axe *AP* en un point *C*, qui n'est éloigné de leur sommet *A* que d'une distance finie *AC* (telles sont les hyperboles) & où par consequent le raport dx à dy croît depuis l'Infiniment petit en *A*, où *AP* & *PM* deviennent nulles, jusqu'à devenir égal (ayant mené *AD* parallele à *PM* qui rencontre la tangente infinie *CDI* en *D*) au raport de *CA* à *AD*, au point touchant, ou *AP* & *PM* deviennent infinies. Fig. V.

OBSERVATION II.

II. En nommant toujours les coordonnées des Courbes x & y, & partant leurs differences dx & dy, l'on observera que, quoique les raports qui se rencontrent entre dx & dy, dans tous les differens points des Courbes puissent varier à l'infini, l'on n'en peut neanmoins distinguer que de trois genres differens dans toutes les suppositions

poſſibles ; de finis, d'infinis, & d'indéterminés : car ſoit en general $dx. dy :: m. n$, ou $\frac{dx}{dy} = \frac{m}{n}$

1°. Si l'on ſuppoſe que m & n ſoient des grandeurs finies, le rapport de dx à dy ſera un rapport fini.

2°. Si l'on ſuppoſe $m = o$, & que par la ſuppoſition n ne devienne point auſſi $= o$, ce qui arrive quelquefois, l'on aura $\frac{dx}{dy} = \frac{o}{n}$, c'eſt à dire, que le rapport de dx à dy ſera Infiniment petit.

3°. Si l'on ſuppoſe $n = o$, & que par la ſuppoſition m ne devienne point auſſi $= o$, l'on aura $\frac{dx}{dy} = \frac{m}{o}$, c'eſt à dire que le raport de dx à dy ſera Infiniment grand.

4°. Si l'on ſuppoſe $m = o$, & que par la ſuppoſition n devienne auſſi $= o$, ou au contraire, l'on aura $\frac{dx}{dy} = \frac{o}{o}$, c'eſt à dire, que le raport de dx à dy ſera indéterminé : car $\frac{o}{o}$ peut être égal à une quantité quelconque p, puiſque p multipliée par le denominateur zero produit le numerateur zero.

Perſonne n'ignore qu'il ne ſe rencontre entre les differences (dx & dy) des coordonnées des Courbes, des raports finis & infinis dans differens points des mêmes Courbes : mais on ne ſçait peut être pas ſi generalement qu'il s'y rencontre quelquefois certains points où le raport de dx à dy eſt indéterminé ; c'eſt-pourquoi j'ai jugé à propos de le démontrer ici.

THEOREME.

III. *Le raport des differentes* (dx *&* dy) *des coordonnées des Courbes eſt indéterminé dans tous les points d'interſection* (*qui ſeront dans la ſuite appellés* Nœuds) *de deux rameaux, où les tangentes ne ſont point paralleles aux coordonnées, ou, ce qui eſt la même choſe, aux axes conjugués, ſoit que l'on ſuppoſe* dx *ou* dy = o.

FIG. VI. Soit la Courbe $KADBL$ qui a un nœud en D, dont les axes conjugués ſont AB, AC, & les coordonnées AP ou AQ, x ; PM ou QN, y

Il faut démontrer que, si les tangentes au point *D* ne sont point paralleles aux axes conjugués *AB*, *AC*; les differences *dx* & *dy* deviendront toutes deux égales à zero au point *D*, par la supposition de l'une des deux $=o$.

DE'MONSTRATION.

Par un point quelconque *M* pris sur le rameau *AD*, soient menées les droites *FMN* parallele à *AB*, qui rencontrera le rameau *BD* en *N*; *MP*, *NQ* & *DE* paralleles à *AC*. Si l'on suppose presentement que le point *M* s'approche de plus en plus à l'infini du point *D*, $MN = PQ$ deviendra enfin *dx*, & *OD*, *dy*; de sorte que, lorsque par la supposition de *MN*, ou $OD = o$, le point *M* tombera en *D*, les points *O* & *N* tomberont aussi en *D*, & par consequent *MN* & *OD* (*dx* & *dy*) seront nulles ou $=o$; parceque le point d'intersection *D* est un point Mathematique, l'angle *MDN* étant d'une grandeur finie. Ce qui n'arriveroit pas de même si les rameaux *AD*, *BD* se touchoient en *D*: car *MN* devenant nulle, *OD* demeureroit égale au petit côté de l'attouchement, & par consequent infinie par raport à *MN*. Il est donc constant que dans les nœuds le raport de *dx* à *dy* est indéterminé ou $=\frac{o}{o}$, par la supposition de *dx* ou de $dy = o$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

IV. Il est clair que *ED* n'est ni un *maximum* ni un *minimum*, puisque $PS > ED$, & $PN < ED$; & que *GD* n'est aussi ni un *maximum* ni un *minimum*, puisque $FN > GD$, & $FN < GD$.

PROBLEME.

V. *L'Equation qui exprime la nature d'une Courbe dont les coordonnées sont* x *&* y, *& l'une de ces trois choses* $\frac{dx}{dy}$, x, *ou* y *étant exprimée en termes connus, par supposition ou autrement, exprimer les deux autres aussi en termes connus, ou montrer que la supposition est impossible.*

SOLUTION.

L'on a par l'hypotefe l'équation qui exprime la nature de la Courbe, que je nomme *A*; en differentiant l'équation *A*, il en vient une autre, que je nomme *B*, dont un des membres eſt $\frac{dx}{dy}$, & l'autre une fraction qui renferme au moins une partie des conſtantes, & au moins une des variables (x ou y) de l'équation *A*. Or puiſque l'on ſuppoſe que l'une de ces trois choſes $\frac{dx}{dy}$, x, ou y, eſt exprimée en termes connus; cette expreſſion étant ſubſtituée dans l'une ou dans toutes les deux équations *A* & *B*, il n'y reſtera que deux choſes inconnuës: c'eſt pouquoi, par les regles de l'Algebre commune, on aura en termes connus l'expreſſion de l'une & de l'autre. *Ce qu'il falloit premierement démontrer.*

Si l'une ou l'autre de ces expreſſions renferme quelque quantité imaginaire, ou quelque contradiction; le problême ſera impoſſible dans la ſuppoſition que l'on aura faite. *Ce qu'il falloit en ſecond lieu démontrer.*

VI. Si l'on ſuppoſe $dx = o$, l'équation *A* & le numerateur de l'équation *B* fourniront les valeurs cherchées de x & de y.

VII. Si l'on ſuppoſe $dx = \infty$, ou ce qui revient au même, $dy = o$, l'équation *A* & le dénominateur de *B* donneront les valeurs de x & de y. Ces deux articles ſont expliqués dans l'Analyſe des Infiniment petits ſect. 3.

VIII. Si l'on ſuppoſe $\frac{dx}{dy} = \frac{o}{o}$, l'équation *A* & le numerateur, ou le dénominateur de *B*, indifferemment, donneront (*art.* 6. & 7.) les valeurs cherchées de x & de y. Les exemples que nous allons apporter, & ceux qu'on trouvera dans la ſuite éclairciront ce que nous venons de dire.

EXEMPLE I.

IX. Soit ſuppoſé $\frac{dx}{dy} = \frac{b}{c}$, & l'équation *A*.

A $2ax + xx = yy.$

qui ſe raporte à l'hyperbole équilatere AMI, dont le centre eſt C, le demi-axe traverſant $CA = a$, les coordonnées $AP = x$, $PM = y$; il faut trouver en termes connus les valeurs de x & de y. Fig. V.

L'on a, en prenant les differences de l'équation A, l'équation B,

$$B.\ \frac{dx}{dy} = \frac{y}{a+x} = (hyp.)\ \frac{b}{c},$$

d'où l'on tire l'équation C,

$$C.\ y = \frac{ba+bx}{c},$$

& mettant cette valeur de y dans l'équation A, l'on en tirera (en ſuppoſant $c > b$), l'équation D,

$$D.\ x = -a \pm \frac{aa}{\sqrt{cc-bb}} = AP.$$

& ſubſtituant encore la valeur de x priſe en D, dans A, ou dans C, l'on aura l'équation E,

$$E.\ y = \pm \frac{ba}{\sqrt{cc-bb}}.$$

Les deux équations D & E font connoître que le raport de dx à dy eſt réel & fini ſi $c > b$; que c'eſt un raport d'égalité, ſi $c = b$, enfin qu'il eſt imaginaire ou impoſſible, ſi $c < b$, c'eſt à dire que dans l'hperbole équilatere dx ne ſurpaſſe jamais dy.

Si l'on veut $\frac{c}{b} = \frac{5}{4}$, les équations D & E deviendront celles-ci F & G

$$F.\ x = -a \pm \frac{5}{3}a$$

$$G.\ y = \pm \frac{4}{3}a.$$

EXEMPLE II.

X. Soit ſuppoſé $y = \frac{3}{10}a$, & l'équation A,

$$A.\ ax - xx = yy,$$

qui ſe raporte au cercle AMB, dont le centre eſt E, le diametre $AB = a$, les coordonnées $AP = x$, $PM = y$; il s'agit de trouver la valeur de x, & le raport de dx à dy en termes connus. Fig. I.

L'on a en prenant les differences de l'équation *A*, celle-ci *B*,

$$B.\ \frac{dx}{dy} = \frac{2y}{a - 2x},$$

& mettant pour y dans l'équation *A* sa valeur $\frac{3}{10}a$, l'on aura l'équation *C*,

$$C.\ x = \frac{1}{2}a \pm \frac{2}{5}a = AP,$$

& substituant encore pour y dans l'équation *B* sa valeur $\frac{3}{10}a$, & celle de x prise en *C*, l'on en tirera $\frac{dx}{dy} = \frac{3}{4}$.

On trouvera dans la suite des Exemples pour le cas ou le raport de dx à dy est infini ou indéterminé, outre que les questions résoluës dans la troisiéme Section de l Analyse des Infiniment petits, sont autant d'exemples particuliers pour les cas où le raport de dx à dy est infini.

XI. *Usage des trois differens genres de raports qui se trouvent entre les differences des coordonnées des Courbes.*

Les raports finis de dx à dy ne servent pas seulement à trouver en general les tangentes dans tous les points des lignes Courbes, comme il est enseigné dans la seconde Section de l'Analyse des Infiniment petits; mais encore en particulier les tangentes dans tel point déterminé qu'on voudra, soit que ce point soit déterminé par l'expression connuë de l'une ou de toutes les deux coordonnées, ou par le raport donné de dx à dy.

Soit proposé, par exemple, de trouver une tangente au cercle, au point où $y = \frac{3}{10}a$, l'équation au cercle $ax - xx = yy$ se changera en celle-ci $x = \frac{1}{10}a$, en mettant pour y sa valeur $\frac{3}{10}a$. Or (Anal. des Infin. petits Sect. 2.) en nommant la soûtangente s, l'on a $s = \frac{2yy}{a-2x}$; mettant donc dans cette équation pour y sa valeur $\frac{3}{10}a$, & pour x $\frac{1}{10}a$, il viendra $s = \frac{9}{40}a$ pour la soûtangente cherchée.

Si

Si au lieu de $y = \frac{3}{10}a$ l'on avoit $\frac{dx}{dy} = \frac{3}{4}$, l'expreſſion génerale de la ſoûtangente $s = \frac{ydx}{dy}$ deviendroit $s = \frac{3}{4}y$, d'où l'on tire $y = \frac{4s}{3}$. L'on a auſſi l'équation au cercle $ax - xx = yy$, & en prenant les differences, & mettant pour dx & pour dy leurs proportionnelles 3. & 4, il viendra $y = \frac{3a - 6x}{8}$. L'on a donc trois équations $y = \frac{4s}{3}$, $ax - xx = yy$, & $y = \frac{3a - 6x}{8}$, d'où ayant fait évanoüir les inconnuës x & y, l'on en tirera $s = \frac{9}{40}a$ pour la ſoûtangente cherchée au point où $dx . dy :: 3 . 4$.

XII. Les raports infiniment petits de dx à dy, c'eſt-à-dire, la ſuppoſition de $dx = o$, ou de $dy = \infty$, ſervent à trouver tous les points des Courbes où les tangentes ſont paralles à l'axe des y, ou, ce qui revient au même, à trouver tous les *Maxima & Minima* de x.

XIII. Les raports infiniment grands de dx à dy, c'eſt-à-dire, la ſuppoſition de $dx = \infty$, ou de $dy = o$, ſervent à trouver tous les points des Courbes où les tangentes ſont paralleles à l'axe des x, ou, ce qui revient au même, tous les *Maxima & Minima* de y. Ces deux derniers articles ſont démontrés dans l'Analyſe des Infiniment petits Section 3.

XIV. Les raports indéterminés de dx à dy, c'eſt-à-dire, $\frac{dx}{dy} = \frac{o}{o}$, ſervent à trouver les nœuds des Courbes, ou les points d'interſection de deux rameaux, où les tangentes ne ſont paralleles à aucun des axes conjugués ; & en même tems à diſtinguer ces nœuds d'avec les points où les tangentes ſont paralleles aux axes conjugés : car, comme (*art.* 8.) les uns & les autres ſe trouvent de la même maniere, c'eſt-à-dire, ou par la ſuppoſition de $dx = o$, ou par celle de $dy = o$, on pourroit aiſément les confondre & prendre, comme on a déja fait, pour des *Maxima* ou *Minima*, les cordonnées qui déterminent un nœud, quoique (*art.* 4. elles ne ſoient ni *Maxima*, ni *Minima*,

& pour cette raiſon nous les appellerons dans ſa ſuite *faux Maxima* ou *faux Minima*, à cauſe qu'ils ſé trouvent de la même maniere que les autres que nous appellerons *vrais Maxima & Minima*.

Il ne s'agit donc plus que de donner une regle pour ne ſe point méprendre dans la diſtinction des faux *Maxima* ou *Minima* d'avec les vrais. La voici, & perſonne, que je ſçache, ne s'en eſt encore aviſé.

Regle pour diſtinguer les faux Maxima & Minima *d'avec les vrais.*

XV. Lorſque dans l'une & dans l'autre ſuppoſition de $dx = o$ (qui eſt la même choſe que $dy = \infty$), & de $dx - \infty$ (qui eſt la même choſe que $dy = o$, l'on trouvera, pour chacune des deux coordonnées x & y, les mêmes valeurs en termes finis ou nuls; on ſera aſſûré que la Courbe, dont la nature eſt exprimée par l'équation ſur laquelle on opere, à un nœud au point où les coordonnées ont les valeurs trouvées. Ce qui eſt évident : car puiſque dx & dy ſont (*art.* 3. dans les nœuds toutes deux $= o$; la ſuppoſition de $dx = o$ & celle de $dx = \infty$, qui eſt la même que $dy = o$, doivent également donner des valeurs de x & de y pour les déterminer.

Lorſque l'une de ces ſuppoſitions donne des valeurs pour x & pour y finies (*Obſerv. I.*) nulles, ou infinies, differentes de celles que donne l'autre ſuppoſition; ces valeurs exprimeront alors de veritables *Maxima* & *Minima*,

On trouvera des Exemples qui éclairciront la Regle.

OBSERVATION III.

XVI. On peut, ou plûtôt on doit diſtinguer deux ſortes de queſtions de *Maximis* & *Minimis*. La premiere où il s'agit de trouver tous les points des Courbes où les tangentes ſont paralleles aux axes conjugués; & alors les valeurs correſpondantes des coordonnées peuvent être (*Obſerv. I.*), finies, nulles, ou infinies.

La ſeconde où il s'agit de trouver le plus grand ou le

moindre état où se puissent trouver certaines grandeurs, qui dans de certaines circonstances croissent ou diminuënt jusqu'à un certain point, après quoi elles commencent à diminuer si elles alloient en augmentant, ou à croître si elles alloient en diminuant. Comme lorsqu'on cherche le point où il faut couper une ligne droite afin que le rectangle des deux parties soit plus grand que si on la coupoit en tout autre point.

De même lorsqu'on cherche qu'elle doit être la situation du gouvernail d'un Vaisseau afin que l'eau fasse sur lui un plus grand effort que dans toute autre situation, & qu'en vertu de cet effort le Vaisseau puisse virer le plus promptement qu'il soit possible.

REMARQUE.

XVII. Il semble que M. le Marquis de l'Hôpital n'a eu en vûë que les questions de *Maximis & Minimis* de la seconde sorte : car dans les exemples qu'il apporte, ou il ne propose que des questions de cette sorte, ou il ne cherche que la position des plus grandes & des moindres appliquées réelles & finies, qui déterminent la plus grande ou la moindre largeur des Courbes.

OBSERVATION IV.

XVIII. Toutes les questions de *Maximis* & *Minimis*, sont des problêmes déterminés, comme ceux de la Geometrie ordinaire, que l'on résout avec deux inconnuës : car dans les premiers il s'agit de trouver sur les Courbes certains points fixes, où le raport de dx à dy est infini, c'est-à-dire, de trouver les valeurs des coordonnées qui déterminent ces points. Dans les seconds il s'agit de trouver les points d'interséction de deux lignes droites ou Courbes qui ont une axe commun, c'est-à-dire, les valeurs des coordonnées communes à ces deux lignes qui déterminent ces points.

Or quand, dans la recherche des *Maxima* & des *Minima*, l'on a supposé dx ou $dy = o$, la question est réduite

à l'état où est un problême déterminé de la Geometrie commune, où l'on a employé deux inconnuës, & qu'on a trouvé les deux équations qui en doivent donner la solution : car on a aussi deux équations, celle qui exprime la nature de la Courbe, & celle qu'on tire de la supposition de dx ou de $dy = o$: ces deux équations renferment deux inconnuës ; il ne s'agit donc plus pour achever de résoudre la question, que de trouver, par les regles de l'Algebre commune, toutes les valeurs de ces deux inconnuës de la même maniere que si c'étoit un problême déterminé de la Geometrie commune.

Toute la difference qu'il y a entre ces deux sortes de problêmes, c'est que dans ceux de la Geometrie ordinaire on n'admet que des valeurs finies & réelles des deux inconnuës qu'on a employées pour les résoudre : au lieu que les questions de *Maximis & Minimis*, & particulierement celle de la premiere sorte, sont (*Observ. I.*) également résoluës, soit que les valeurs des inconnuës soient finies, nulles, ou infinies.

Les imaginaires, ou les contradictions font connoître l'impossibilité, ou absoluë, ou en partie, des uns & des autes.

Eclaircissemens sur les methodes de Maximis & Minimis.

XIX. Il suit en general de tout ce que nous venons de dire, que l'on n'est point assûré d'avoir un veritable *Maximum* ou un veritable *Minimum* de la premiere sorte (on suppose que les Courbes ne sont point décrites.)

1°. Que l'on n'ait les valeurs des deux coordonnées (x & y) qui le déterminent, en termes finis, nuls, ou infinis, soit dans la supposition de $dy = o$, ou dans celle de $dx = o$, qui est le même que $dy = \infty$.

2°. Que ces deux valeurs ne soient tirées que de la supposition de $dy = o$, ou que de celle de $dy = \infty$; car si on les pouvoit tirer de l'une & de l'autre supposition, elles détermineroient (*art.* 15.) un nœud, ou un faux *Maximum* ou *Minimum*.

Voyez une addition à cet article à

XX. Lorsqu'on trouvera plusieurs differentes valeurs

de l'une des coordonnées (x ou y) finies, nulles, ou infinies dans chacune des suppositions de $dy = o$ ou $= \infty$, & que les valeurs correspondantes de l'autre ne renfermeront ni imaginaires ni contradictions ; il y aura autant de *Maxima* ou *Minima* vrais ou faux que l'on aura trouvé de valeurs differentes pour chacune des coordonnées. On distinguera les vrais d'avec les faux par la regle que nous avons donnée art. 15. la fin des Mem. de 1707.

XXI. Il y a un certains cas qui sert à reconnoître certains *Maxima* infinis, que personne que je sçache n'a encore remarqué ; c'est lorsque l'un des termes de la fraction $= \frac{dx}{dy}$ ne renferme aucune inconnuë, on peut être divisé par un viseur constant : car alors dans la supposition de dx ou $dy = o$, ce terme de la fraction $= \frac{dx}{dy}$ qui ne renferme aucune inconnuë, ou ce diviseur constant devient $= o$. Or une grandeur constante, & par consequent finie, ne peut être égale à zero ou prise pour zero, que lorsqu'elle est comparée à des grandeurs infinies ; il faut donc que lorsque, dans l'une ou l'autre de ces suppositions, l'on trouve une grandeur constante $= o$, il y ait un *Maximum* infini, pourvû que la substitution ne donne ni imaginaires ni contradictions. On en trouvera des Exemples parmi ceux que nous allons apporter.

XXII. Il n'en est pas tout-à-fait de même des questions *de Maximis & Minimis* de la seconde sorte, que de celles de la premiere. Ce sont des problêmes déterminés qui ne peuvent avoir qu'une seule solution, une même grandeur ne pouvant être un *Maximum* ou un *Minimum* dans differens états, & dans les mêmes circonstances ; il faut donc necessairement que les expressions de ces sortes de grandeurs, qui ne doivent renfermer qu'une seule inconnuë, que je nomme x, étant égalées à une autre inconnuë, que je nomme y, deviennent des équations à des Courbes tellement situées à l'égard de l'axe des x, qu'il ne s'y puisse trouver qu'un seul point où le raport de dx à dy étant infini, l'appliquée y qui le détermine soit réelle

& finie. De sorte que si l'on trouve dans la supposition de $dy = o$ une valeur de x nulle ou finie, & que la valeur correspondante de y soit réelle & finie; cette valeur de x résoudra necessairement le problême, & alors il sera inutile de passer à la supposition de $dy = \infty$. Mais si dans la supposition de $dy = o$, on ne trouve pour y aucune valeur réelle & finie qui réponde aux valeurs de x, ce qui arrive rarement, il faudra passer à la supposition de $dy = \infty$. Ce que M. le Marquis de l'Hôpital a toûjours observé, & qui fait voir qu'il n'a consideré que les questions *de Maximis & Minimis* de la seconde sorte, comme on a déja remarqué.

Voici les Exemples dont nous avons déja parlé. Ils serviront à éclaircir tout ce que nous avons dit des questions *de Maximis & Minimis* de l'une & de l'autre sorte.

EXEMPLES.

Pour les questions de Maximis & Minimis *de la premiere sorte.*

I.

XXIII. Soit l'équation A,

Fig. V. $$A.\ yy = 2ax + xx,$$

qui se rapporte à l'hyperbole équilatere AMI, dont le centre est C, le demi-axe traversant $CA = a$, l'abscisse $AP = x$, l'appliquée $PM = y$, & dont il faut trouver tous les *Maxima* & *Minima*, ou plûtôt tous les points où les tangentes sont paralleles aux axes conjugués.

L'on a en prenant les differences l'équation B,

$$B.\ \frac{dy}{dx} = \frac{x+a}{y}.$$

Et en supposant $dy = o$, l'on a $x + a = o$, d'où l'on tire $x = -a$, qui (*art.* 19.) ne fait encore rien connoître: mais en mettant cette valeur de x dans l'équation A, l'on en tire $y = \sqrt{-aa}$, qui est une valeur imaginaire. Et parce qu'il ne s'est trouvé aucun diviseur qui ait pû donner une autre valeur de x, il suit que dans l'hyperbole équilatere il n'y a aucun point où la tangente soit paral-

lele à l'axe des x. Ce qui eſt évident d'ailleurs (*art.* 1. *num.* 4.) La ſuppoſition de $dy = \infty$, ou de $dx = o$ donne $y = o$, qui ne fait encore rien connoître : mais en mettant cette valeur de y dans l'équation A, l'en en tirera $x = o$ & $x = -2a$, pour les valeurs de x qui répondent à celle de $y = o$. Et comme ces valeurs ont les qualités requiſes (*art.* 19.), il ſuit que les tangentes aux points A, ou $x = o = y$, & B, ou $y = o$ & $x = -2a$, ſont paralleles aux ordonnées PM.

II.

XXIV. Soit l'équation A.

$$A.\ y - a = a^{\frac{1}{3}} \times \overline{a - x}^{\frac{2}{3}}.$$

qui exprime la nature de la Courbe MDM, dont les coordonnées ſont AP, x & PM, y ; $AE = ED$, a ; il faut trouver tous les points de cette Courbe où les tangentes ſont paralleles aux coordonnées AP & PM. Fig. VII.

L'on a en prenant les differences l'équation B,

$$B.\ \frac{dy}{dx} = \frac{2\sqrt[3]{a}}{3\sqrt[3]{a - x}}.$$

La ſuppoſition de $dy = o$ donne $2\sqrt[3]{a} = o$, d'où l'on tire $a = o$, qui montre (*art.* 21.) qu'il y a deux *Maxima* infinis de y, ou deux tangentes infinies paralleles à l'axe AP des x : car en mettant pour a dans l'équation A ſa valeur zero, elle deviendra $axx = y$, qui contient les deux termes où x & y ont le plus de dimenſions, les autres étant nuls par rapport à eux, à cauſe de la multiplication par a, que l'on regarde comme zero, qui y a un plus grand nombre de dimenſions que dans le terme axx. Or l'on tire de cette derniere équation $x = \pm \frac{\sqrt{y^3}}{a}$, ou $x = \pm \frac{\sqrt{y^3}}{o}$ dans la ſuppoſition preſente de $a = o$, qui montre que x & y ſont infinies, qualités convenables (*Obſerv. I.*) aux *Maxima* de la premiere ſorte), & qu'il y a deux *Maxima* de y.

La ſuppoſition de $dy = \infty$ donne $x = a = AE$, qui ne fait encore rien connoître : mais en mettant pour x dans l'équation A ſa valeur a, l'on en tire $y = a = ED$, qui montre (*art.* 19.) que ED eſt tangente au point D.

Cet exemple eſt celui de l'article 49 de l'Analyſe des Infiniment petits, d'où l'on doit neceſſairement conclure que M. le Marquis de l'Hôpital ne regardoit que les *Maxima* & *Minima* de la ſeconde ſorte : car quoiqu'il ſçût bien que la Courbe *MDM*, qui eſt une ſeconde parabole cubique, avoit une tangente infinie parallele à l'axe *AP*; il a neanmoins dit que l'on ne pouvoit rien tirer de $2dx\sqrt[3]{a}=0$, d'où nous venons de tirer cette tangente infinie : parce qu'il comptoit ne rien tirer, quand il ne tiroit pas un *Maximum* ou un *Minimum* réel & fini, tel que ſont ceux de la ſeconde ſorte.

III.

XXV. Soit l'équation *A*,

$A.\ x^4 - 4ax^3 + 4aaxx - 6ayxx + 12aayx - 8a^3y + aayy = 0,$

Fig. IV. qui exprime la nature de la Courbe *KADBL*, dont les coordonnées ſont $AP=x$, $PM=y$, $AB=2a$; il s'agit de trouver tous les *Maxima* & *Minima* de cette Courbe.

L'on a en prenant les differences l'équation.

$$B.\ \frac{dy}{dx}=\frac{2x^3-6axx+4aax-6ayx+6aay}{3axx-6aax+4a^3-aay}$$

La ſuppoſition de $dy=0$ donne $y=\frac{x^3-3axx+2aax}{3ax-3aa}$, d'où l'on tire, en diviſant par $x-a=0$, les deux équations *C* & *D*.

$C.\ x=a=\frac{1}{2}AB.$

$D.\ y=\frac{xx-2ax}{3a}.$

La valeur de *x* priſe dans l'équation *C*, étant ſubſtituée dans l'équation *A*, donnera l'équation *E*,

$E.\ y=a=\frac{1}{2}AB.$

Et la valeur de *y* priſe dans l'équation *D*, & ſubſtituée dans *A*, donnera $x^4-4ax^3+7aax-6a^3x=0$, qui étant diviſée, 1°. par $x=0$; 2°. par $x-2a=0$, l'on aura les équations *F* & *G*.

$F.\ x=0$, en *A*.

$G,\ x=2a=AB.$

Et le quotient ſera $xx-2ax+3aa$, qui ne donne que des imaginaires.

Mais

Mais la valeur de x priſe en F étant miſe dans l'équation A, donne les équations H & I,

$H.\ y = o$ en A.

$I.\ y = 8a = 4AB$.

Et la valeur de x priſe en G & ſubſtituée dans A, donne K & L.

$K.\ y = o$ en A.

$L.\ y = 8a = 4AB$.

En ſuppoſant preſentement $dy = \infty$, ou $dx = o$, l'on aura $3axx - 6aax + 4a^3 - aay = o$, ou, en diviſant par $a = o$, $3xx - 6ax + 4aa - ay = o$, d'où l'on tire $y = \frac{3xx - 6ax + 4aa}{a}$, qui étant ſubſtituée dans A, l'on en tirera, outre les imaginaires, l'équation N,

$N.\ x = a = \frac{1}{2}AB$.

Et par conſequent l'équation O,

$O.\ y = a = \frac{1}{2}AB$.

Le diviſeur conſtans $a = o$ indique deux *Max.* infinis.

Voilà tout ce qu'on peut tirer de l'équation propoſée. Il n'y a plus qu'à diſtinguer les faux *Maxima* & *Ninima* d'avec les vrais; & les uns & les autres d'avec ceux qui ne ſont ni de l'une ni de l'autre eſpece.

Les équations C & E tirées de la ſuppoſition de $dy = o$, & les équations N & O tirées de la ſuppoſition de $dx = o$, font connoître (*art.* 15.) qu'il y a un nœud ou un faux *Maximum* ou *Minimum* dans la Courbe propoſée au point D, qui eſt déterminé par $x = a = y = \frac{1}{2}AB = ED$.

XXVI. Si les ſubſtitutions des valeurs de x priſes dans les équations F & G n'avoient donné chacune qu'une ſeule valeur de y, elles n'auroient determiné que des *Maxima* ou des *Minima*: mais parceque chacune en a donné deux H & I, K & L; il ſuit qu'il y a deux appliquées qui rencontrent la Courbe en deux points, l'une en A où $x = o$, & l'autre en B où $x = 2a$, & ces appliquées ſont en chaque point $= o$ & $= 8a$; c'eſt-pourquoi pour s'aſſurer ſi c'eſt au point A ou B où $y = o$, ou aux points où $y = 8a$ que le raport de dy à dx eſt infini, ou s'il eſt par

tout infini ; il faut chercher (*art.* 5. & 10.) le raport de dy à dx aux points où ces appliquées rencontrent la Courbe, & l'on trouvera qu'il est infini au point A, où $x = o = y$, & au point B, où $x = 2a$ & $y = o$, & qu'il est comme 12 à 1, tant au point où $x = o$ & $y = 8a$, qu'au point où $x = 2a$ & $y = 8a$; ce qui fait voir que l'axe AB touche la Courbe aux points A & B, & que $y = 8a$ n'est ni un *Maximum* ni un *Minimum*.

Si l'on substituë les valeurs de x & de y prises dans les équations C & E, qui déterminent le nœud D, dans l'équation B ; elle se changera en celle-ci, $\frac{dx}{dy} = \frac{o}{o}$, qui est un raport indéterminé.

Si pour le déterminer on y applique l'article 163. de l'Analyse des Infiniment petits, on trouvera $\frac{dy}{dx} = \frac{2\sqrt{2}}{1}$.

XXVII. L'équation A étant proposée sous la forme P,

$$P.\ x = a + \sqrt{2ay} \pm \sqrt{aa + ay},$$

exprimera le rameau KAD, s'il y a $-\sqrt{aa+ay}$; elle exprimera le rameau DBL, s'il y a $+\sqrt{aa+ay}$; de sorte que si l'on veut trouver en particulier les *Maxima* & *Minima* de chaque rameau, l'on aura en differentiant l'équation P, celle-ci Q,

$$Q.\ \frac{dy}{dx} = \frac{2\sqrt{2ay+2yy}}{2\sqrt{aa+ay} \pm \sqrt{2ay}}.$$

Et la supposition de $dy = o$ donnera $y = o$ & $y = -a$, & mettant zero premiere valeur de y dans l'équation P, l'on en tirera $x = o$ pour le rameau KAD, & $x = 2a$ pour le rameau DBL, qui sont les mêmes valeurs qu'on a trouvées par le moyen de l'équation generale. Mais si l'on substituë $-a$ seconde valeur de y dans l'équation P, l'on ne trouvera que des imaginaires.

La supposition de $dy = \infty$ donne $a = o$, qui indique deux *Maxima* infinis, & $y = -2a$ qui rend la valeur correspondante de x imaginaire.

IV.

XXVIII. Soit l'équation A,

$$A.\ y = \frac{\overline{a-x}\sqrt{x}}{\sqrt{2a-x}},$$

qui exprime la nature de la Courbe $KBCAMBL$, dont les coordonnées sont $AP = x$, $PM = y$, & l'axe $AB = a$. Il est question de trouver tous les *Maxima* & *Minima* de cette Courbe. FIG. VIII

L'on aura, en prenant les differences, cette équation, $\frac{dy}{dx} = \frac{a^3 - 4aax + 4axx - x^3}{2a - x \times \sqrt{2a - x \times a - x \times \sqrt{x}}}$, & en divisant le numerateur & le dénominateur par léur commun diviseur $a - x = 0$, il viendra l'équation B;

$$B.\ \frac{dy}{dx} = \frac{aa - 3ax + xx}{2a - x \times \sqrt{2ax - xx}}.$$

Mais le commun diviseur $a - x = 0$ donne C,

$$C.\ x = a.$$

Et mettant cette valeur de x dans l'équation A, l'on en tire l'équation D,

$$D.\ y = 0,$$

Or il est clair, à cause du commun diviseur, que l'on auroit trouvé dans l'une & l'autre supposition de $dy = 0$ & de $dx = 0$ les valeurs de x & de y qui sont en C & D; c'est-pourquoy (*art.* 15.) il y a un nœud en B, où $x = a$ & $y = 0$.

En substituant a & 0 valeurs de x & de y dans l'équation B, l'on trouvera $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1}$, qui est un raport d'égalité. Si l'on suppose $dy = 0$ dans l'équation B, l'on en tirera E.

$$E.\ x = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}a\sqrt{5}.$$

Et substituant cette valeur de x dans l'équation A, l'on en tirera l'équation F,

$$F.\ y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{10\sqrt{5} - 22}.$$

Et parceque la supposition de $dy = 0$ ne donne aucune autre valeur de x, il suit qu'il n'y a dans toute la Courbe que les points D & C déterminés par $x = \frac{3}{2}a - \frac{1}{2}a\sqrt{5} = AE$, & par $y = \pm\frac{1}{2}a\sqrt{10\sqrt{5} - 22} = ED = EC$, où les tangentes soient paralleles à l'axe AB des x.

La supposition de $dy = \infty$ donne les deux équations G & H,

$$G.\ x = 0.$$

$$H.\ x = 2a.$$

Et mettant ces deux valeurs de x dans l'équation A, l'on aura les deux valeurs correſpondantes de y I & K,

$I.\ y = o.$

$K.\ y = \infty.$

Les équations correſpondantes G & I montrent que la tangente en A eſt parallele aux ordonnées PM. Et les équations H & K font voir qu'ayant prolongé AB en G enſorte que $BG = AB$, la ligne IGH menée par G parallele à PM ſera aſymptote aux rameaux BK; BL.

L'équation E s'eſt preſentée dans cet état $x = \frac{1}{2}x \pm \frac{1}{2}aV5$: mais parceque $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}aV5$ excede $2a$, & que l'on voit par l'équation A que lorſque x excede $2a$, y eſt imaginaire, on l'a miſe dans l'état où elle eſt en E, qui eſt le ſeul qui répond à l'équation F.

EXEMPLES.

Pour les queſtions de Maximis & Minimis *de la ſeconde ſorte.*

I.

PROBLEME.

Fig. IX.

XXIX. *Une ligne* AB *étant coupée par le milieu en* C, *il la faut couper au un autre point* D, *enſorte que le rectangle* AD×DB *ſoit plus grand que tous ſes ſemblables.*

SOLUTION.

Ayant ſuppoſé le Problême reſolu & nommé la donnée AC, ou CB, a; & l'inconnuë CD, x AD ſera $a + x$; & DB, $a - x$; & les qualités du Problême donneront $aa - xx$ qui doit être un *maximum*. En égalant cette expreſſion à ay, l'on a $aa - xx = ay$; donc en prenant les differences l'on a $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{a}$, & ſuppoſant $dy = o$, l'on a $x = o$, qui étant ſubſtitué dans l'équation primitive donne $y = a$; & partant (*art.* 22.) $x = o$ réſout le Problême.

II.

PROBLEME.

XXX. *Trouver quelle doit être la situation du gouvernail d'un Vaisseau, afin que l'eau agisse sur ce gouvernail avec plus de force que dans toute autre situation, & que par consequent le Vaisseau puisse virer le plus promptement qu'il soit possible.*

SOLUTION.

Soit AB, la quille du Vaisseau; BD, le gouvernail dans une situation quelconque; EC, un filet d'eau parallele à AB. Il est clair que l'eau fera le même effort contre le gouvernail BD, soit que l'eau étant en repos, le Vaisseau se meuve de B vers A avec une certaine vitesse, ou que le Vaisseau étant en repos, l'eau se meuve de E vers C avec la même vitesse. Fig. X.

Supposons donc que le vaisseau étant en repos le filet d'eau EC frape le gouvernail BD avec une vitesse constante & uniforme que je nomme a.

Soient menées par C les lignes CH perpendiculaires au gouvernail BD, qui rencontre en H la quille AB prolongée; CI perpendiculaire à AB.

En prenant BC, que je nomme aussi a, pour le sinus total; IC sera le sinus de l'angle d'incidence BCE, ou CBI du filet d'eau EC sur le gouvernail BD; & BI le sinus de l'angle $BCI = IHC$. Nommant donc IC, x; & BI, z; il est clair que la somme des efforts de tous les filets d'eau comme EC, qui pousseroient CI qui leur est perpendiculaire sera ax; & nommant encore fg la somme des forces dont le gouvernail est poussé selon CH en vertu de ax; & ay la somme des forces dont la quille est poussée selon CI en vertu de fg, qui est ce que l'on cherche; l'on aura par les loix de la Mechanique $ax.fg$ ($::BC.IC$) $::a.x$, & $fg.ay$ ($::CH.CI::CB.BI$)$::a.z$: & en multipliant terme par terme ces deux analogies, l'on aura $fgax$.

$fg\,ay :: aa.\,xy$, d'où l'on tire $\frac{xxz}{a} = ay$, ou $\frac{\sqrt{aax^4 - x^6}}{a} = ay$, en mettant pour z sa valeur $\sqrt{aa - xx}$: Et parceque ay doit être un *Maximum*, il faut prendre les differences de cette équation, d'où l'on tirera $\frac{dy}{dx} = \frac{2aax^3 - 3x^5}{aa\sqrt{aax^4 - x^6}}$. Et supposant $dy = o$, l'on a $2aax^3 - 3x^5 = o$, d'où l'on tire $x = o$, & $x = a\sqrt{\frac{2}{3}}$. Et mettant zero premiere valeur de x dans l'équation primitive, l'on en tire $y = o$; d'où il suit (*art.* 22.) que $x = o$ ne résout point le problême; mais si l'on substituë $a\sqrt{\frac{2}{3}}$ seconde valeur de x dans la même équation primitive, l'on en tirera $y = {}_{3}\, a\sqrt{\frac{1}{3}}$, qui fait voir (*art.* 22.) que $x = a\sqrt{\frac{2}{3}}$ résout la question; & il est inutile de passer à la supposition de $dy = \infty$.

AVERTISSEMENT.

Il me semble en avoir dit assez pour qu'il ne se rencontre plus de difficultés sur ce qui regarde les questions *de maximis & minimis*, soit que les équations soient affectées de signes radicaux, ou qu'elles en soient delivrées; & partant que les difficultés proposées par nôtre Geometre ne doivent plus passer pour telles après le détail que je viens de faire sur toute cette matiere. Voici neanmoins en peu de mots les réponses qu'on y peut faire. L'on remarquera qu'elles appartiennent aux question de *Maximis & Minimis* de la premiere sorte: car il n'y en a point à faire sur celles de la seconde sorte après ce que nous avons dit.

Reponse à la premiére difficulté. Si c'est un *maximum* que l'on cherche, on choisira la valeur de x qui répond à la plus grande valeur de y, soit qu'elle soit tirée de la supposition de $dy = o$, ou de celle de $dy = \infty$. Au contraire, si l'on cherche un *Minimum*.

Réponse à la seconde difficulté. Elle est la même que la réponse à la difficulté précedente.

Réponse à la troisiéme difficulté. Elle est quelquefois aisée à lever par la seule inspection des termes de l'équation. Autrement il faut assigner à x une valeur un peu plus gran-

de ou moindre que celle qui répond au *Maximum* ou *Minimum* dont il s'agit, & la valeur correspondante de y decidera la question.

Réponse à la quatriéme difficulté. Elle résoluë, *art.* 26.

Réponse à la cinquiéme difficulté. C'est alors un nœud, ou un faux *Maximum* ou *Minimum.* On s'en assurera par l'article 15.

REMARQUES.

XXXI. On pourroit encore trouver les *Maxima* & *Minima* des Courbes, ou en faisant les soûtangentes, ou les soûperpendiculaires infinies ou nulles, pourvû qu'en ce dernier cas les coordonnées fussent à angles droits : mais parce que ces methodes allongent plûtôt le calcul que de l'abreger, on ne s'y arrête point.

XXXII. Il y a une methode qui seroit, sans contredit, la plus simple de toutes, si elle étoit generale : mais elle ne s'étend facilement qu'aux équations ou les deux inconnuës x & y, ou au moins l'une des deux à deux dimensions. Si les deux inconnuës sont au second degré, l'on trouvera tous les *Maxima* & *Minima* de l'une & ne l'autre : mais s'il n'y en a qu'une, on ne trouvera que les *Maxima* & *Minina* de l'autre.

La methode est d'extraire les racines de l'équation qui exprime la nature de la Courbe, de la maniere qu'on extrait les racines des équations du second degré, & d'égaler à zero la quantité qui se trouve affectée des signes $\pm$.

Soit, par exemple, l'équation $xx = ax - yy$. L'on a en extrayant les racines $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa - yy}$, & faisant $\sqrt{\frac{1}{4}aa - yy} = o$, l'on a $x = \frac{1}{2}a$, qui détermine un *Maximum* de y : car en substituant $\frac{1}{2}a$ valeur de x dans l'équation primitive, ou en se servant de $\sqrt{\frac{1}{4}aa - yy} = o$, l'on aura $y = \frac{1}{2}a$.

Si l'on met presentement l'équation primitive en cet état $yy = ax - xx$, l'on en tirera $y = \pm\sqrt{ax - xx}$, ou en supposant $\sqrt{ax - xx} = o$, $y = o$; & substituant cette valeur de y dans l'équation primitive, ou se servant de

$\sqrt{ax-xx}=o$, parceque x n'y excede pas deux dimenſions, l'on en tirera $x=o$ & $x=a$, pour les valeurs de x qui répondent à $y=o$, & ces valeurs ſont les mêmes que celles que l'on trouveroit par les methodes ordinaires.

Soit encore l'équation $yy=\frac{aax-2axx+x^3}{2a-x}$; l'on a en extrayant les racines $y=\pm\frac{\overline{a-x}\sqrt{x}}{\sqrt{2a-x}}$, & par la ſuppoſition de $\frac{\overline{a-x}\sqrt{x}}{\sqrt{2a-x}}=o$, l'on a $y=o$. Et ſubſtituant o valeur de y dans l'équation primitive, ou ſe ſervant de $\frac{\overline{a-x}\sqrt{x}}{\sqrt{2a-x}}=o$ l'on en tire $x=o$ & $x=a$ qui répondent à $y=o$, pour les *Maxima* & *Minima* de x. Il en eſt ainſi des autres.

Il eſt vrai qu'il n'eſt pas facile par cette methode de diſtinguer les *Maxima* d'avec les *Minima*, ni les vrais d'avec les faux.

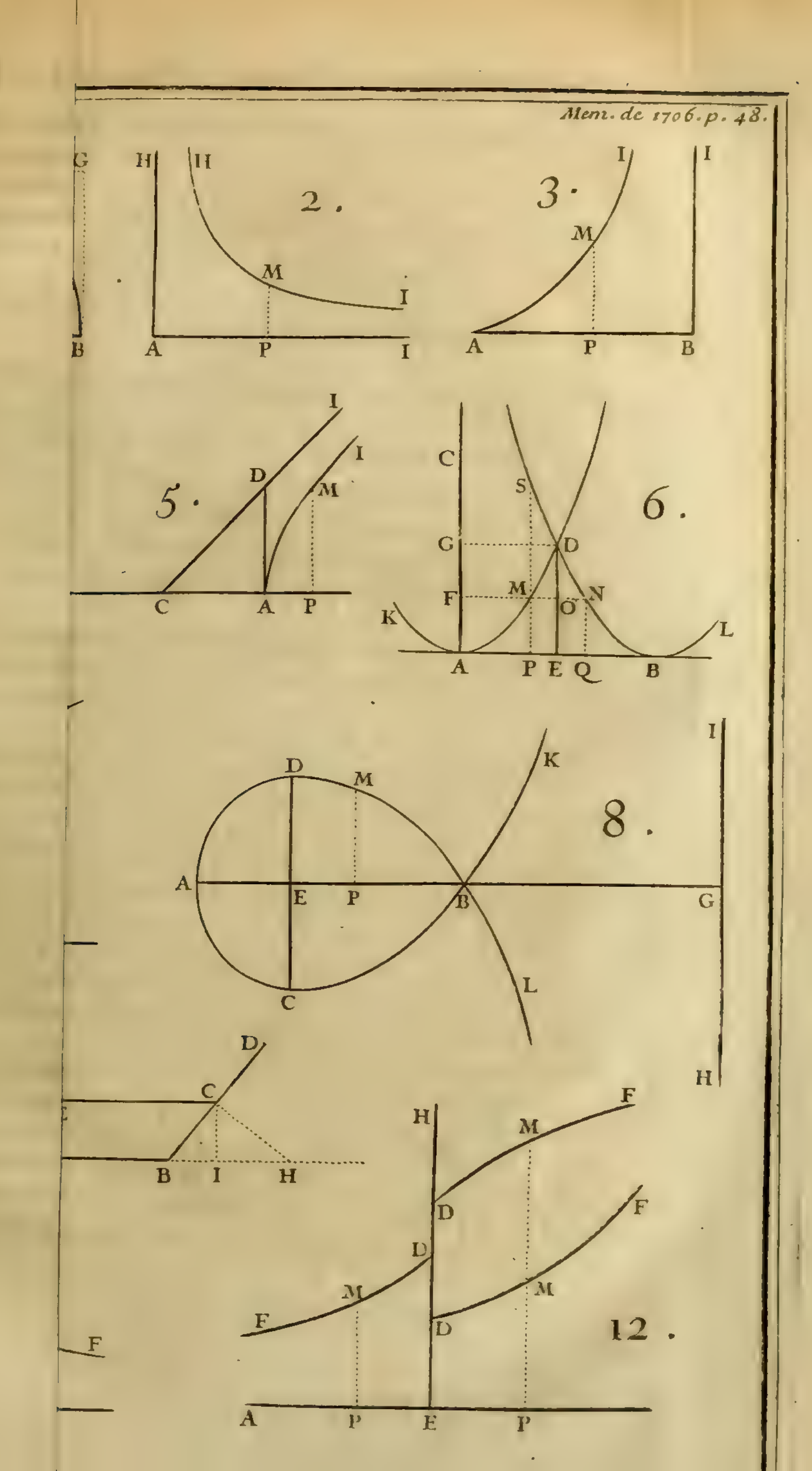
La verité de cette methode eſt facile à démontrer: car les racines d'une équation ſont égales, lorſque leur difference eſt nulle; & le rapport de dx à dy eſt (*art.* 3.) infini ou indéterminé au point où il y a égalité de racines.

XXXIII. Il y auſſi des Geometres qui prennent pour *Maxima* & *Minima* les plus grandes & les moindres appliquées des Courbes, quoiqu'aux pointe où ces appliquées rencontrent ces Courbes, le raport de dx à dy ne ſoit point infini; & que par conſequent les tangentes en ces points ne ſoient point paralleles aux coordonnées. Telle eſt l'appliquée ED, qui rencontre la Courbe AMF au point de rebrouſſement E, & ainſi des autres de cette ſorte. On trouvera donc ces ſortes d'appliquées de la même maniere que l'on trouve les points de rebrouſſement.

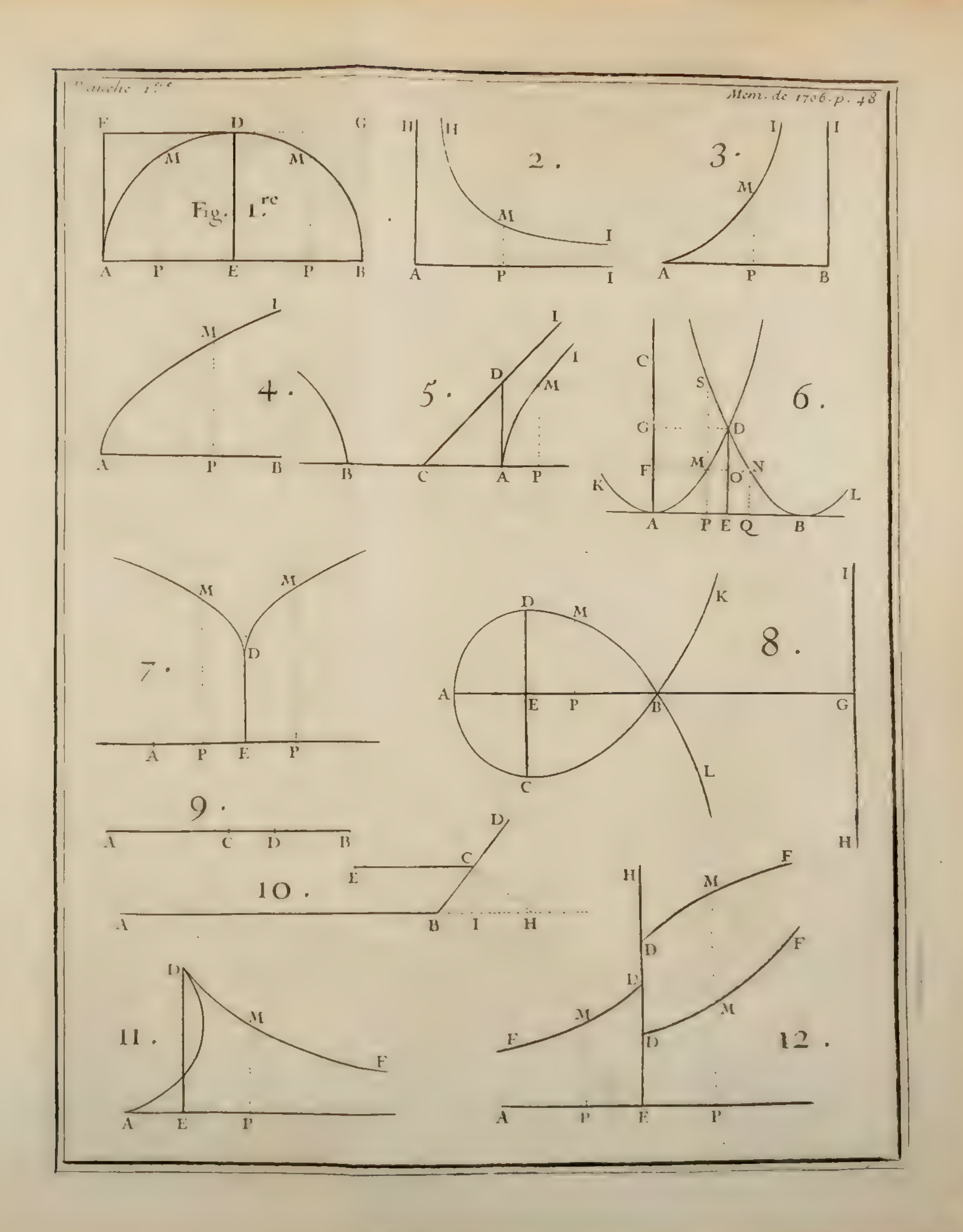
Fig. XI.

Fig. XII. Telle eſt auſſi l'appliquée ED, qui rencontre la Courbe DF au point D, de la ligne DH, qui termine la Courbe, & qui fait avec elle un angle oblique en D. L'on déterminera ces ſortes de *Maxima* & *Minima*, en cherchant ſur l'axe AP le point E, qui ſépare les ordonnées réelles PM d'avec les imaginaires qui ſont au-delà de EH par raport à P.

Il



2.
H
H
M
I
A
P
I
3.
I
I
M
A
P
B
5.
I
I
D
M
C
A
P
6.
C
S
G
D
F
M
N
O
K
L
A
P
E
Q
B
8.
D
M
K
I
A
E
P
B
G
C
L
H
D
C
B
I
H
12.
H
F
M
D
F
D
M
F
M
D
A
P
E
P
G
B
F


Fig. 1.re
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.

Il ne nous reste plus qu'à démontrer l'identité de la methode de l'Analyse des Infiniment petits avec celles de *Messieurs Fermat & Hude*; ce qui est facile. En voici la démonstration.

DEMONSTRATION.

De l'identité de la methode de l'Analyse des Infiniment petits avec celle de M. Hude.

XXXIV. Il est clair, 1°. que le numerateur de la fraction $= \frac{dy}{dx}$, que l'on trouve en prenant la difference d'une équation, contient tous les termes de cette équation où l'inconnuë x se trouve, & n'en contient aucun de ceux où x ne se trouve point.

2°. Que chacun des termes de ce numerateur y est multiplié, en vertu de la differentiation, par l'exposant de la puissance de x, où cette inconnuë est élevée dans chacun de ceux de l'équation primitive d'où il est tiré.

3°. Que les puissances de x, dans ce numerateur, sont plus basses de l'unité que dans l'équation primitive, à cause du changement de x en dx, & de la division par dx.

Or il n'est pas moins évident, 1°. que lorsqu'on applique la methode de M. Hude à une équation regardée par raport à l'inconnuë x; celle qui en résulte & qui doit être égalée à zero, contient tous les termes de l'équation proposée où l'inconnuë x se trouve, & n'en contient aucun de ceux où x ne se rencontre point.

2°. Que chacun des termes de cette équation résultante est multiplié, en vertu de la methode, par l'exposant de x, où cette inconnuë est élevée dans chacun de ceux de l'équation proposée d'où il est tiré.

3°. Que les puissances de x, dans l'équation résultante, sont plus basses de l'unité que dans l'équation proposée, à cause de la division par x ordonnée par la methode.

Donc il n'y a nulle difference entre le numerateur de la fraction $= \frac{dy}{dx}$ trouvée en prenant les differences de l'é-

quation proposée, & l'équation $= o$ tirée par la methode de M. Hude de la même équation proposée, regardée par raport à l'inconnuë x, & particulierement après qu'on a supposé $dy = o$.

On fera tous les mêmes raisonnemens sur le denominateur de la fraction $= \frac{dy}{dx}$, & sur l'équation $= o$, l'un & l'autre tirés de la même équation, regardée par raport à l'inconnuë y, & l'on trouvera le dénominateur entierement semblable à cette équation.

EXEMPLES.

Soit l'équation A,

$$A.\ x^4 - 2ax^3 + aaxx - 2aayx + aayy = o$$
$$-2ayxx$$

L'on aura en prenant les differences de l'équation B,

$$B.\ \frac{dy}{dx} = \frac{4x^3 - 6axx + 2aax - 4ayx - 2aay}{2axx + 2aax - 2aay}.$$

En appliquant la methode de *M. Hude* aux puissances de x dans l'équation A, il en résulte l'équation C; qui est le numerateur de B. Et en appliquant la même methode aux puissances de y, l'on en tire l'équation D, qui est le dénominateur de B.

$$x^4 - 2x^3 + aaxx - 2aayx + aayy = o$$
$$-2ayxx$$
$$4. \quad 3. \quad 2. \quad 1. \quad o.$$

$$C.\ 4x^3 - 6axx + 2aax - 2aay = o$$
$$-4ayx$$

$$aayy - 2aaxy + x^4 = o$$
$$-2axxy - 2ax^3$$
$$+aaxx$$
$$2. \quad 1. \quad o.$$

$$D.\ 2aay - 2aax = o$$
$$-2axx$$

L'identité de la methode de *N. Fermat*, avec celle de l'Analyse des Infiniment petits, est par elle même assez

manifeste pour qu'il ne soit point besoin de s'arrêter à la démontrer.

Il est donc évident que toutes ces methodes doivent necessairement produire le même effet pour les Courbes Geometriques, & seulement lorsque les équations sont délivrées des signes radicaux.

Difference des mêmes methodes.

Mais il faut demeurer d'accord que la methode de l'Analyse des infiniment petits a bien des avantages par dessus les autres. Elle n'est point arrêtée par les signes radicaux, où les autres n'ont point de prise: elle s'étend aux lignes Mechaniques avec la même facilité qu'aux Geometriques, & fournit des solutions generales où les autres methodes n'en donnent que de particulieres, &c.

Fautes à corriger dans les Memoires de 1704.

Pag. 29. *lig.* 19. & 20. au lieu de *y*, lisez *z*.
Dans la Figure qui appartient à ce Memoire effacez la ligne *HA*, & lisez *HC*.

REMARQUES

Sur les Coquillages à deux coquilles, & premierement sur les Moules.

PAR M. POUPART.

LES Moules sont des especes de petits poissons renfermés entre deux coquilles, qui sont ordinairement convexes & concaves. 1706. 20 Fevrier.

Il y a des Moules de Mer & des Moules de riviere. Celles-cy sont divisées en differentes especes; & il sera parlé dans la suite de quelques-unes, à mesure que l'occasion s'en presentera.

Les unes & les autres s'ouvrent, se ferment, marchent & il y en a qui voltigent sur l'eau. Elles sortent toutes à moitié de leurs coquilles, elles y rentrent, elle- répandent leur lait, elles respirent ou plutôt elles puissent l'eau avec leurs oüies, & se cachent dans la sable, ou dans la glaise des rivieres.

De la maniere dont les coquilles.

Il y a de l'apparence que les Coquillages sont les premiers poissons que les hommes ont connu, & se sont avisez de manger ; car il s'est passé beaucoup de tems avant qu'on ait inventé la ligne, l'hameçon, les retz, les nances, & tous les instrumens necessaires à la pêche des autres poissons. Mais pour ce qui est des coquilles, la mer les jette sur le bord, ainsi il n'a fallu dés le commencement du monde que se baisser pour les prendre. Cependant l'on n'a point encore sçû de quelle maniere elles s'ouvrent, quoique même un habile Anatomiste de Hollande l'ait cherchée avec beaucoup de soin, comme il paroît dans un Traité qu'il a donné l'Anatomie de la Moule. Cela fait voir que les choses les plus simples & les moins cachées sont quelquefois les plus difficiles à découvrir. Voici comme la chose arrive.

Toutes especes de Moules, & même tous les Coquillages à deux coquilles, ont un ligament coriasse qui tient liées les deux coquilles ensemble à la partie posterieure & plus épaisse, qu'on appelle talon ; & c'est par le moyen du ressort que fait ce ligament que les deux coquilles s'ouvrent. Ce ligament est d'autant plus admirable, qu'il a deux effets qui paroissent d'abord fort opposez ; car c'est lui qui joint & affermit les deux coquilles ensemble, & qui les fait aussi ouvrir par son ressort. Cela se fait ainsi.

Lorsque les Moules ou autres Goquillages ferment leurs coquilles par la contraction de leurs muscles, le ligament qui est entre les bords de ce qu'on appelle talon est comprimé & reste en cet état pendant que les muscles sont racourcis : mais quoique ce ligament soit assez dur, il a

pourtant quelque chose de spongieux ; de sorte qu'il arrive qu'en se gonflant il pousse les deux coquilles, & les fait un peu ouvrir quand les muscles se relâchent.

Plusieurs coquilles de differentes especes ont des ligamens differens. Le ligament des Moucles de riviere est une espece de charuiere qui est attachée par le derriere sur le bord des deux coquilles, & passe au dehors. S'il étoit renfermé entre les bords des coquilles, il couvriroit & rendroit inutile le ginglime des coquilles qui en ont un, & dont nous parlerons bien-tôt ; & celles qui n'ont point de ginglime ont les bords trops minces pour pourvoir contenir tout entier ce ligament.

Le ligament à ressort des Moules de mer est different de celui des Moules de riviere, en ce qu'il n'est pas attaché au derriere des coquilles, mais en partie entre les bords, & qu'il ne paroît nullement au dehors, mais il excede un peu au dedans de la cavité de la coquille, d'autant que les bords ne sont pas assez épais pour le renfermer tout entier. Pour suppléer un peu à ce défaut, il est entouré de deux cordons qui sont fottement attachez sur les bords interieurs de la coquille à laquelle ils donnent de l'épaisseur. Ces cordons sont durs, trouez, & ils paroissent ajoûtez à la coquille, & d'une matiere differente. Apparemment que les routes qui sont gravées dans ces cordons ne sont pas inutiles, mais je ne sçai point encore leur usage. Celui des cordons est de donner de l'épaisseur aux bords de la coquille, afin qu'ils puissent mieux comprimer le ligament à ressort qui est entre-deux ; ce que ne pourroient pas si bien faire les bords de la coquille, parce qu'ils sont trop minces, & la compression étant foible il ne se feroit point de ressort, ou bien il s'en feroit si peu qu'il ne seroit pas suffisant pour faire ouvrir la Moule.

Le ligament à ressort qui fait ouvrir les coquilles de l'huître, est fort different de celui des Moules de mer & de riviere ; il n'entre pas dans la cavité de la coquille comme fait celui des Moules de mer, & il ne s'étend pas en dehors comme celui des Moules de riviere ; mais il est ren-

fermé dans le talon entre les deux coquilles, où il y a assez d'espace pour le contenir.

Sa figure est propre à faire ressort; c'est une espece de croissant dont le dos qui est la partie la plus épaisse est tourné du côté de la cavité de la coquille : la plus mince qui sont ses cornes regarde le dehors, & le milieu du croissant est rempli d'une matiere fongueuse. Les coquilles trouvant plus de résistance en pressant sur la partie la plus épaisse, le ressort en doit être plus grand du côté que les coquilles se doivent ouvrir.

Il est bon de remarquer que ce ligament ne va pas jusqu'à la pointe du talon; il laisse un petit vuide en cet endroit, afin que les coquilles ayent la liberté de s'ouvrir.

La matiere du ligament à ressort des huîtres n'est pas tout à fait la même que celle des Moules de mer & de riviere, elle est plus coriasse & moins séche. Le ligament de celles de mer & de riviere est roide, sec, & si fragile que si on le laisse quelque tems hors de l'eau, il se casse pour peu qu'on ouvre ou qu'on ferme la Moule,

Il est necessaire que ce ligament soit sec; car étant toûjours dans l'eau, il se seroit si fort amoli qu'il auroit entierement perdu son ressort. Mais il ne s'amolit que comme un cuir fort, de sorte qu'il se courbe & se redresse sans se casser dans le tems de l'accourcissement & du relâchement des muscles, & même alors on peut ouvrir la Moule toute entiere sans que le ligament se casse.

Ce seroit une chose curieuse d'examiner les ligamens qui font ouvrir toutes les differentes especes de coquilles; je ne doute point qu'on ne trouvât en plusieurs quelque choses de particulier. Je dis cela en faveur de ceux qui aiment à déveloper les moindres mysteres de la nature, à la curiosité desquels il est juste de laisser quelques choses à observer.

De la maniere dont les Moules se ferment.

Toutes les Moules se ferment par la contraction de deux gros muscles fibreux qui sont enterieurement atta-

chez à chaque bout des coquilles ; mais ces muſcles ſont trop connus pour en parler davantage. J'ajoûterai ſeulement ici que les coquilles ſe ferment ſi exactement, qu'à peine l'eau en peut ſortir. Voici comme cela ſe fait.

Toutes les eſpeces de Moules ont leurs coquilles bordées tout-au-tour d'une membrane qu'on pourroit appeller épyderme, parceque c'eſt une continuité de la couche exterieure des coquilles. Ces membranes s'appliquent ſi exactement l'une contre l'autre quand elles ſont mouillées, que la moindre goute d'eau ne ſçauroit ſortir de la Moule.

Il auroit été difficile que les bords des coquilles qui ſont durs, minces, tranchans, fragiles & d'une matiere ſeche euſſent été travaillés ſi uniment qu'ils euſſent pû empêcher l'eau de ſortir ſans cette petite précaution.

Outre cette membrane il y a tout-au-tour du bord interieur de chaque coquille un ligament. Ces ligamens ; qui portent l'un contre l'autre que les coquilles ſe ferment, empêchent encore que l'eau ne ſorte, & même que les coquilles ne ſe caſſent ſur les bords pendant la grande contraction des muſcles.

Les coquilles de quelques eſpeces de moules ne ſont pas ſeulement affermie enſemble par la contraction des muſcles, ni par le ligament à reſſort dont avons parlé ; elles le ſont encore par de longues rainure ou canelures qui reçoivent des languettes tranchantes dans toute leur longueur. Il y a au bout de ces rainures, immediatement ſous le talon, une cheville dentelée qui entre dans une cavité auſſi dentelée de l'autre coquille, & cette cavité a ſur ſes bords deux petites éminences dentelées qui entrent en deux petites cavitez de l'autre coquille qui ſont auſſi dentelées ; de ſorte que les dentelures des épiphеſes & des cavitez ſe reçoivent mutuellement comme celles des os du crane.

Mais ce ginglime ne ſe trouve pas dans toutes les eſpeces de Moules. Celles de mer, la grande eſpece qui naît dans les étangs, & qui croît juſqu'à un pied de long: celle

que j'appelle crêtée, à cause qu'elle a exterieurement une éminence vers le talon en forme de crête, n'ont point cette articulation.

Du mouvement progressif des Moules.

La structure des Moules est telle, qu'il semble qu'elles ne devroient avoir de mouvement que celui qu'elles reçoivent de l'agitation des eaux. Cependant elles marchent toutes, & quelques-unes voltigent sur la superficie de l'eau. Voici comme elles marchent. Etant couchées sur le plat de leurs coquilles, elles en sortent en partie en forme de langue, avec laquelle elles font de petits mouvemens à droit & à gauche pour creuser le sable ou la glaise des rivieres. En creusant de la sorte elle baissent insensiblement d'un côté, & se trouvent sur le tranchant de leurs coquilles le dos ou talon en haut. Elles avancent ensuite peu à peu leur tête pendant une ou deux minutes, & ensuite elles l'appuïent pour attirer leurs coquilles à elles, comme font quelquefois les limaçons aquatiques. Elles réïterent ce mouvement tant qu'elles veulent marcher, & de cette maniere elles font des traces irregulieres qui ont quelquefois jusqu'à trois ou quatre aunes de long, dans lesquelles elles sont à moitié cachées.

On voit pendant l'esté plusieurs de ces traces dans les rivieres où il y a beaucoup de Moules, & l'on ne manque jamais de trouver une Moule au bout de chaque route. C'est ainsi que ces petits poissons cherchent leur vie, & qu'ils se promenent çà & là en labourant la terre avec le tranchant de leurs coquilles, marchant toûjours le talon en devant.

Ces routes creuses servent d'appui aux Moules pour les soûtenir sur le coupant de leurs coquilles, & en foüillant la terre çà & là, elles attrappent apparemment quelques frayes de poisson, ou autres petits alimens dont elles vivent.

Il semble qu'il auroit mieux été que la pointe de la coquille eût marchée avant le talon, parce qu'étant mince

& tranchante elle étoit plus propre à fendre la terre, comme fait le soc de la charuë dont la pointe marche toûjours devant.

Je n'ay pas remarqué qu'il y ait de muscles qui attirent les Moules hors de leurs coquilles : cela me fait croire qu'elles n'en sortent qu'en se gonflant d'eau. Elles s'en remplissent en si grande quantité, que j'en ay tiré une demie-verrée de la grande espece qui croît dans les étangs.

Ce que je trouve de bien considerable dans la marche des Moules, c'est que par son moïen elles peuvent se rencontrer & fraïer ensemble.

Je n'ay point trouvé d'œufs dans les Moules ; mais on trouve pendant l'esté beaucoup de lait & de glaire dans une même Moule : cela me fait conjecturer qu'elles pourroient bien être androgines.

La grosse glande de la Moule crêtée est toute remplie d'un lait fort blanc au mois de Septembre. Ce que je trouve d'admirable dans ce lait, c'est qu'il se caille aussi-tôt qu'on le jette dans l'eau. Cette coagulation me fait conjecturer que les Moules ne jettent pas leur lait dans l'eau, car il deviendroit inutile pour la generation. Je croirois donc plutôt qu'une Moule insinuë son lait dans une autre Moule dans le tems de la propagation. Il y a de l'apparence que la même chose arrive aux autres poissons, & vulgairement qu'ils le font.

Pour voir ce lait il faut couper par la moitié la grosse glande de la Moule crêtée, qui fait la meilleure & la plus solide partie de la Moule ; alors on en verra sortir une si grande quantité, qu'il semble qu'elle se fond toute entiere. Il faut cüeillir ce lait avec la lame d'un coûteau, & le jetter dans l'eau pour le voir à l'instant coaguler en petits grumeaux.

Du voltigement d'une espece de Moule.

Aristote dit qu'on lui a rapporté qu'il y a une grande espece de coquille qui voltige. Je viens de remarquer que

ce Philosophe n'a pas été trompé; car j'ay vû par hazard que la grande espece de Moule d'étang dont j'ay parlé voltigeoit sur la superficie de l'eau. Voici comme la chose peut arriver.

Ces grandes especes de Moules ont des coquilles qui sont fort legeres, très-minces, & si grandes qu'elles en peuvent battre la superficie de l'eau, comme les oiseaux font l'air avec leurs aîles. Il y a au dos de ces coquilles un grand ligament à ressort en maniere de charniere, & au dedans deux gros muscles qui les ferment. C'en est assez pour voltiger, car il suffit pour cela que ces ressorts agissent promptement l'un après l'autre, & qu'elles frappent l'eau avec assez de force & de vîtesse. Ce qui favorise encore ce mouvement; c'est que le ginglime qui se trouve dans les autres coquilles qui ne voltigent point, ne se rencontre pas dans celles-ci, il seroit embarrassant.

De la maniere dont les Moules s'enterrent dans le sable.

Lorsque les Moules sentent le froid, elles s'enterrent dans le sable. Pour cela elles sortent en partie de leurs coquilles en forment de langue, qu'elles traînent lentement à droit & à gauche pour remuer le sable, dont elles se trouvent toutes couvertes en moin d'une demie-heure de tems.

De la maniere dont les Moules rentrent dans leurs coquilles.

Les Moules peuvent rentrer dans leurs coquilles, par le moïen d'une membrane musculeuse dont la grosse glande que nous avons dit sortir de la coquille en forme de langue est toute envelopée. Quand cette membrane se contracte, la glande qui de sa nature est molle & flasque, devient une petite masse dure & ridée aprés qu'on l'a maniée, comme il arrive aux limaçons après qu'on les a touchez.

De l'éjaculation du lait.

Il y a de l'apparence que c'est par la contraction de la

membrane muſculeuſe, dont nous venons de parler, que le lait ſort de la groſſe glande par de petits trous ou canaux qu'on y remarque lorſqu'elle eſt gonflée d'eau; car ſi on la comprime, on en voit ſortir l'eau qui darde fort loin par petits filets.

De la ſortie des excremens.

Pour ce qui eſt de la ſortie des excremens, je croy qu'elle ſe fait par la contraction des muſcles circulaires de l'inteſtin, qui ſont en grand nombre & par pacquets. Pour les voir il faut couper l'inteſtin tout du long, ôter ſes excremens, & le bien déploïer. On remarquera vers la baſe de la glande, à laquelle l'inteſtin eſt attaché, pluſieurs gros trouſſeaux de fibres qui vont tout-au-tour de l'inteſtin, toûjours en diminuant de leur groſſeur à meſure qu'ils s'éloignent de leur origine.

De la reſpiration des Moules.

Les Moules reſpirent l'eau à peu prés comme font les poiſſons: cela paroît par un petit mouvement circulaire qui ſe fait dans l'eau proche le talon de la coquille. Mais elles ne rejettent pas l'eau à chaque fois qu'elles la puiſſent comme font les poiſſons: elles s'en rempliſſent pendant une minute ou deux, & puis elles la rejettent tout-d'un coup par l'autre bout de la coquille. Elles recommencent à puiſer l'eau pendant quelque tems, elles la rejettent comme auparavant, & elles continuent toûjours de la même maniere. On voit par-là que les Moules reſpirent l'eau un peu d'une autre maniere que les poiſſons; car ceux-ci la rejettent à chaque fois qu'ils la puiſſent. C'eſt dans les Moules crêtées que j'ay remarqué cette reſpiration.

Elles étoient couchées à plat à moitié dans l'eau ſur un beau ſable. Si elles étoient toutes cachées dans l'eau, on ne pourroit obſerver ni la petite circulation de l'eau qui ſe fait proche le talon, ni l'expulſion de l'eau qui ſe fait tout d'un coup par l'autre bout de la coquille, parceque ces mouvemens ne ſe pourroient faire ſur la ſuperficie de l'eau.

Il y a de l'apparence que ces poiſſons s'étant tous remplis d'eau, ils contractent ſubitement leurs muſcles pour rapprocher leurs coquilles l'une de l'autre afin de comprimer leur corps, & en chaſſer l'eau tout d'un coup. Il ſemble que les Moules ne reſpirent pas toûjours; car j'en avois mis dans de grands baſſins pour les obſerver ſouvent & plus commodément que dans la riviere; elles s'ouvroient de tems en tems, mais je n'appercevois point qu'elles reſpiraſſent l'eau.

Des maladies des Moules.

J'ay remarqué que les Moules de riviere ſont ſujettes à diverſes maladies, comme ſont la mouſſe, la gale, la gangrene, & même la ſphacelle.

Lorſque les moules vieilliſſent, il s'amaſſent inſenſiblement ſur leurs coquilles une eſpece de chagrin, qui eſt une mouſſe courte ſemblable à celle qui naît ſur les pierres. Cette mouſſe pourroit bien être la premiere cauſe des maladies qui arrivent aux Moules; parceque ſes racines entrant peut-être dans la ſubſtance des coquilles ces petites ouvertures donnent iſſuë à l'eau qui les diſſout peu à peu.

On voit quelquefois ſur les coquilles certaines longues plantes filamenteuſes & fines comme de la ſoye. Cette chevelure, que les Botaniſtes appellent Alga, peut cauſer les mêmes maladies que la mouſſe. Outre cela elles incommodent beaucoup les Moules, parcequ'elles les empêchent de marcher facilement; & quand ces plantes s'attachent aux coquilles par un bout, & à quelques pierres par l'autre, les Moules ne peuvent plus marcher.

Il forme des tubercules ſur la ſuperficie interieure de la coquille, qu'on pourroit appeller des gales. Elles naiſſent apparemment de la diſſolution de la coquille, qui venant à ſe gonfler, ſouleve & détache la feuille interieure, comme font les chairs qui naiſſent ſous la lame exterieure de l'os alteré & la font exfolier. On trouve quelquefois de ces tubercules qui ſont auſſi gros que des pois, qu'on prendroit pour des perles.

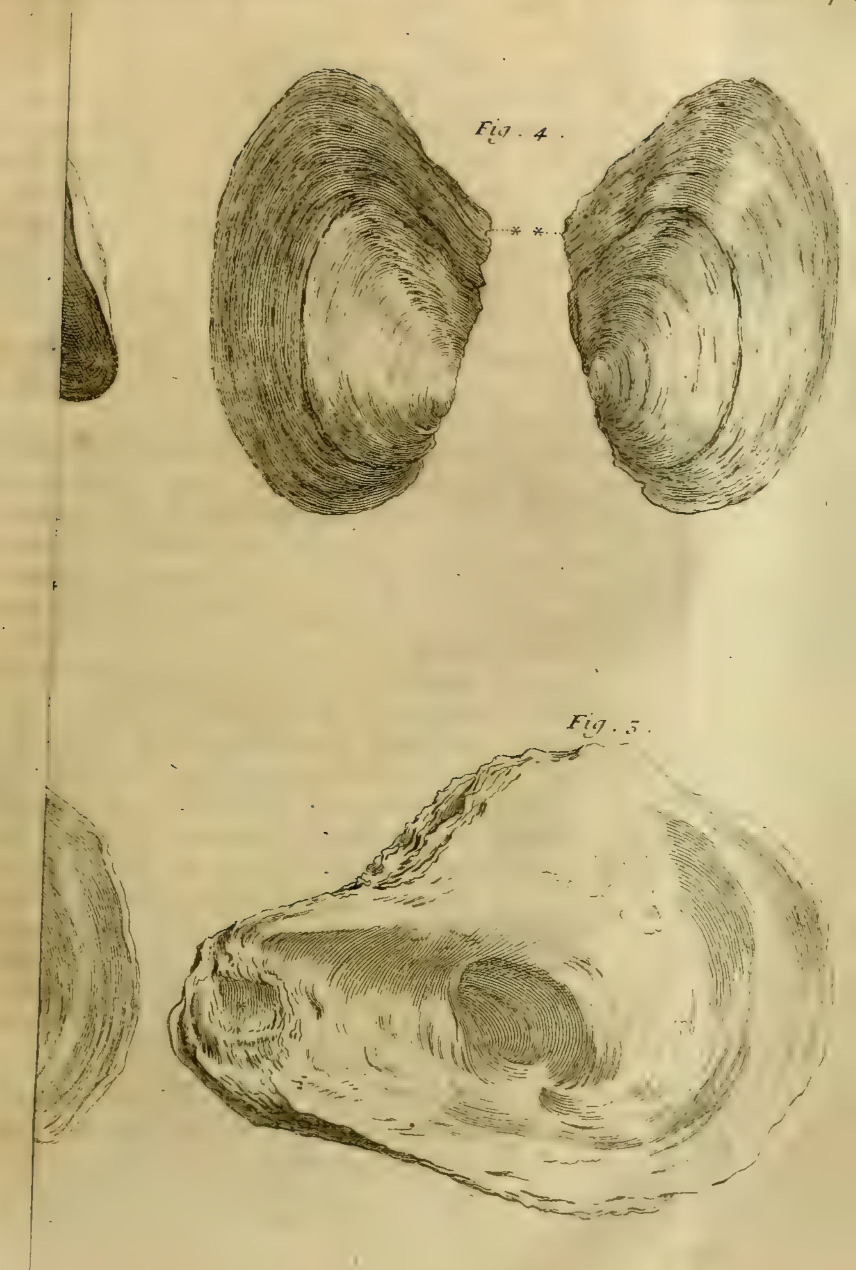

Fig. 4.
Fig. 5.



Figure 1
Fig. 2
Fig. 4

Figure 5.

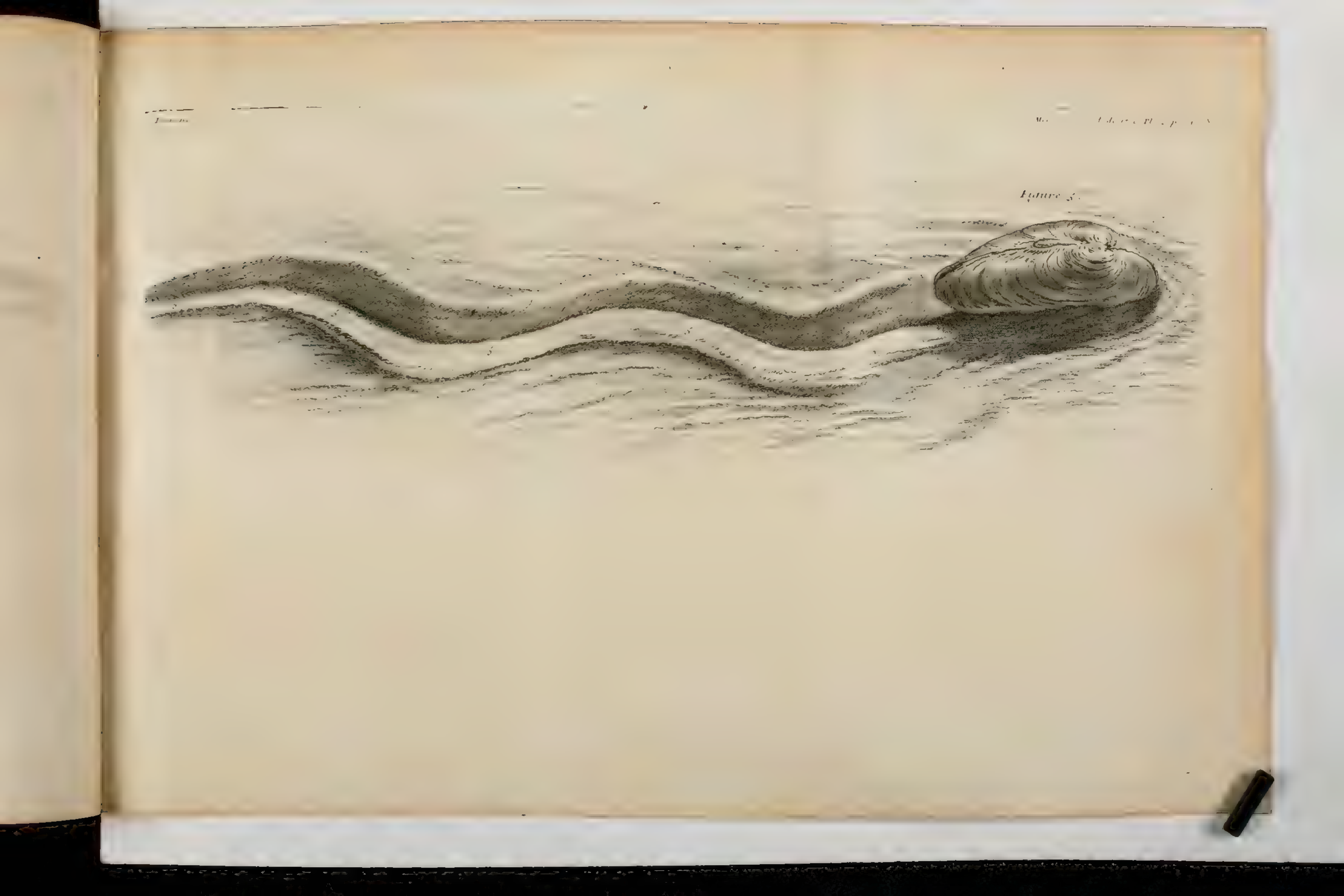


Figure 5.

Les coquilles se dissolvent quelquefois peu à peu, & deviennent molles comme des membranes qu'on peut arracher par pieces. Cela pourroit faire croire que les coquilles sont des membranes endurcies, comme sont les os qui en certaines maladies deviennent aussi mous que du drap.

EXPLICATION DES FIGURES.

1. Moule de riviere, dont le ligament a ressort *, qui fait ouvrir la Moule, est attaché exterieurement au talon de la coquille.
2. Moule de mer, dont le ligament a ressort *, qui fait ouvrir la coquille, ne paroît qu'interieurement vers son talon.
3. Huître, dont le ligament a ressort *, qui la fait ouvrir, est caché entre les deux coquilles de l'Huître.
4. Moule, que j'ay appellée crêtée, parcequ'elle a une avance * au talon en forme de crête.
5. Routes que font les Moules, & qu'elles laissent après elles quand elles font leur mouvement progressif dans la glaise ou dans le sable des rivieres.

LES HYPOTHESES DU MOUVEMENT DE JUPITER.

PAR M. MARALDI.

Nous avons cherché les hypotheses du mouvement de Jupiter par la même methode que nous avons trouvé l'année derniere celles de Saturne. Nous avons calculé plusieurs observations faites dans l'opposition de Jupiter avec le Soleil, que nous avons comparées aux Tables de Kepler qui sont en usage depuis long-tems, & à celles 1706. 20 Fevrier.

de M. Boüillaud qui en a expliqué le fondement. Cette comparaison nous a fait connoître que pour bien representer ces observations, il falloit ajoûter 5 minutes & demi à l'Epoque du moyen mouvement établie par M. Boüillaud. Après cette correction nous avons examiné la situation de l'Aphelie & du Perihelie de Jupiter par des observations les plus propres qu'il est possible pour cette recherche, comme sont celles qui se rencontrent proche de ces termes, Jupiter étant en opposition avec le Soleil. Par ces sortes d'observations faites en 1673, nous avons trouvé l'Aphelie de Jupiter en 8° 48′ de Libra. Par d'autres observations faites l'an 1690 proche du Perihelie, on trouve sa situation en 9° 42′ d'Aries; & supposant l'Aphelie opposée au Perihelie, l'Aphelie sera en 9° 42′ de Libra. Les observations de l'année 1696 donnent l'Aphelie en 9° 48′ de Libra, un degré plus avancé de 24 ans auparavant; & enfin les observations de l'année 1702 montreroient seulement le Perihelie en 9° 27′ d'Aries, & par consequent l'Aphelie en 9° 27′ de Libra.

Nous n'avons pas lieu de supposer réelle toute cette variation que nous trouvons dans la situation de l'Aphelie, parcequ'elle peut venir en partie de la grande difficulté de la déterminer au juste; car une erreur de deux minutes qu'il est souvent difficile d'éviter, tant dans le choix de l'Epoque, que dans les observations, à cause du grand nombre d'elemens qu'il faut employer, peut faire varier d'un demi-degré la situation de l'Aphelie.

Parmi ces differentes déterminations, nous avons choisi celle qui résulte des observations des années 1690 & 1696, comme plus uniformes & plus propres à representer au juste la plûpart des observations. Cette détermination donne le lieu de l'Aphelie pour le commencement de l'année 1701 en 9° 53′ de Libra.

Pour déterminer la plus grande inégalité de Jupiter, nous avons comparé le calcul tiré des mémes Tables avec les observations faites proche des moyennes distances, & nous avons connu que pour bien representer ces differen-

tes observations il falloit faire la plus grande équation de Jupiter tantôt de 5° 34′ 55″, tantôt de 5° 35″ 25, & quelquefois de 5° 35′ 15″, à laquelle nous nous arrêtons, comme étant moyenne entre les extrêmes avec lesquelles elle s'accorde dans la minute ; ainsi suivant cette détermination il faudra augmenter de 3 minutes & demi la plus grande équation de Jupiter déterminée par Kepler, & d'une minute celle qui a été déterminée par M. Boüilland.

La moyenne distance de Jupiter au Soleil, en parties de l'orbe annuel, a été calculée par un grand nombre d'observations faites lorsque Jupiter étoit en quadrature avec le Soleil, qui est la conjoncture la plus favorable. Ces differentes observations faites en differentes parties de l'orbe de Jupiter, ne donnent pas toûjours pour la moyenne distance de Jupiter au Soleil la même proportion précisément, y ayant souvent des differences considerables ; mais en prenant un milieu entre ces differences, nous avons déterminé la proportion de cette moyenne distance de 519220, dont la moyenne distance du Soleil à la Terre est 100000.

Pour trouver les nœuds de Jupiter, nous avons calculé plusieurs observations faites en differentes années proche de ses nœuds, & qui sont les plus propres pour cette recherche. Par ces observations faites l'an 1681 à la fin de Septembre lorsque la latitude de Jupiter étoit meridionale, & par les observations faites vers le commencement d'Octobre lorsque sa latitude étoit Septentrionale, on trouve que Jupiter arriva à son nœud le deux d'Octobre de la même année. Ayant calculé pour ce temps-là, à l'aide des hypotheses fondées sur les observations précedentes, le lieu excentrique de Jupiter qui étoit aussi pour lors le lieu de son nœud vû du Soleil, nous le trouvons en 6°. 55′ de Cancer. Par d'autres observations de l'année 1693 faites durant plusieurs jours avant & après l'arrivée de Jupiter au nœud, on connoît qu'il s'y trouva le 14 d'Aoust au matin, lorsque Jupiter étoit en 14° 42′ de Can-

cer. Ce lieu réduit au Soleil donne le nœud de Jupiter vû du Soleil en 7 4′ de Cancer ; de sorte qu'il y a une difference de 40 minutes dans cette détermination faite par les observations de differentes années. Si on prend un milieu, on pourra déterminer le lieu du nœud boreal de Jupiter pour l'année 1693 en 7 20 de Cancer. Cette détermination s'accorde à celle qui résulte des observations faites proche de la conjonction de Jupiter avec le Soleil, de l'année 1705 Jupiter étant fort proche de son nœud. Par ces observations faites au meridien 9 jours avant & 12 jours après sa conjonction avec le Soleil, nous trouvons que Jupiter arriva au nœud le 18 Juin, d'où l'on trouve que son nœud boreal est en 7° 17′ de Cancer.

Les occasions les plus favorables pour trouver l'inclinaison de Jupiter à l'Eclipticle, sont celles qui se sont presentées les années 1673, 1690 & 1702, lorsque Jupiter étant en opposition avec le Soleil, étoit en même temps prés des limites des plus grandes latitudes. Par les observations que M. Cassini fit le 2 Avril 1673, nous avons calculé le lieu de Jupiter en 13 degrés de Libra, avec une latitude Septentrionale de 1°37′ 15″, Par la proportion des distances du Soleil à la Terre, & du Soleil à Jupiter, on trouve la parallaxe de latitude de 17′ 55″, qui étant ôtée de la latitude observée, donne la latitude réduite au Soleil de 1° 19′ 20″. Mais dans la même observation Jupiter étoit à 6 degrés de distance de ses limites, à laquelle il convient 25 secondes, qui étant ajoûtées à la latitude de Jupiter réduite au Soleil, donnent l'inclinaison de l'orbite de Jupiter à l'Ecliptique de 1° 19′ 45″.

Par les observations de l'année 1690 faites dans l'opposition de Jupiter avec le Soleil, & à 3 degrés près des limites de Jupiter avec sa latitude australe observée de 1° 39′ 40″, on calcule la même inclinaison de Jupiter de 1° 19′ 40″, comme par les observations de l'année 1673 ; ainsi cette inclinaison paroît assés bien déterminée.

Pour ce qui regarde le moyen mouvement de Jupiter & le mouvement de son Apogée, nous ne sçavons point de

de moyen plus propre pour le trouver, qu'en comparant les obſervations recentes avec les plus anciennes, & principalement celles des conjonctions de Jupiter avec les étoiles fixes qui ſont cenſées les plus exactes. Parmi ces obſervations il y en a une celebre de la conjonction de Jupiter avec une étoile fixe de la conſtellation de l'Ecreviſſe appellée *Aſinus auſtralis*, dont le temps marqué par Ptolemée ſe rapporte à l'année 241 avant l'Epoque de J. C. L'autre obſervation eſt celle que M. Boüillaud a tirée d'un manuſcrit de la Bibliotheque du Roy, & qui fut faite l'année 508 de J. C. Or on peut repreſenter ces deux obſervations avec autant de préciſion qu'on peut attendre des obſervations faites à la vûë ſimple & ſans inſtrumens, en ſe ſervant du moyen mouvement de Jupiter & du mouvement de l'Apogée comme ils ont été determinez par M. Boüillaud, & en y emploïant les autres élemens de l'Apogée & de la plus grande équation tels que nous les venons de déterminer.

Il reſtoit à trouver le mouvement des nœuds de Jupiter. Nous les avons cherchez en comparant le lieu du nœud déterminé par les obſervations recentes avec celui qui réſulte des obſervations anciennes dont nous avons examiné les circonſtances. Nous avons employé à cette recherche la conjonction rapportée cy-deſſus de Jupiter avec l'étoile de l'Ecreviſſe : mais il faut remarquer qu'au lieu de 4 minutes de latitude meridionale que tous les Catalogues donnent à cette étoile, ſuivant nos obſervations elle en a une Septentrionale de 3 minutes & demi.

La conjonction de Jupiter avec cette étoile faite à la vûë ſimple peut avoir eu quelque peu de latitude, à cauſe que les rayons de Jupiter peuvent empêcher de voir ſi ces conjonctions ſont préciſes ; mais nous ne ſçaurions mieux faire que de la ſuppoſer telle qu'elle a été rapportée : ainſi nous ſuppoſerons que Jupiter ait eû la même latitude que l'étoile. Cette latitude vûë de la Terre étant réduite au Soleil par les hypotheſes ordinaires ſera de 4' 0", laquelle jointe à l'inclinaiſon de l'orbite de Jupiter,

donne la diſtance de Jupiter au nœud dans cette obſervation de 2° 52′ : mais à cauſe que la latitude étoit Septentrionale, Jupiter avoit paſſé le nœud. C'eſt pourquoi ſi l'on ôte cette diſtance du lieu de Jupiter vû le Soleil calculé par les hypotheſes, on trouve le nœud boreal de Jupiter en 24° 43′ des Gemeaux pour l'année 241 avant J. C. Mais par les obſervations de l'année 1693, nous avons trouvé ce nœud en 7° 20′ du Cancer ; donc en 1934 ans ce nœud aura eu un mouvement ſuivant la ſuite des ſignes de 12 degrés 37 minutes. Par les Tables de M. Boüillaud on trouve le mouvement des nœuds de Jupiter dû à cet intervalle de 13 degrés 14 minutes, ſeulement 37 minutes plus grand que celui que nous venons de trouver.

Les hypotheſes du mouvement de Mars.

Les obſervations de Mars faites à l'Obſervatoire Royal par M. Caſſini confirment la plûpart des hypotheſes de cette Planete que Kepler a établies ſur les obſervations de Tycho, ce que nous avons reconnu ayant comparé un grand nombre de ces nouvelles obſervations avec les lieux de cette Planete calculez ſur ces principes ; car elles s'accordent aſſez ſouvent enſemble, les plus grandes differences que nous y avons trouvées en quelques endroits n'ayant été que de 6 à 7 minutes.

Quoyque ces differences ne ſoient pas bien conſiderables par rapport aux grandes difficultez qu'il y a à parvenir à la derniere préciſion dans des recherches qui dépendent de pluſieurs principes, nous n'avons pas laiſſé d'examiner de quelle maniere on pourroit les corriger. Nous avons commencé cette recherche en comparant les calculs avec les oppoſitions de Mars au Soleil près des moïennes longitudes de Mars ; parceque ces endroits ſont plus propres pour déterminer la plus grande équation des Planetes. Parmi ces obſervations il y en a de celles qui ſe rencontrent dans l'orbe de Mars où l'équation eſt ſouſtrative, & d'autres qui ont été faites dans des parties oppoſées

où l'équation est additive. Dans cette comparaison nous avons trouvé entre les calculs & les observations une difference de deux minutes & demi, dont les calculs retardoient à l'égard des observations, & qui étoit à peu près la même dans des situations opposées de Mars. Cette difference uniforme nous a fait juger qu'elle venoit de l'Epoque, à laquelle il falloit ajoûter ces deux minutes & demi, & qu'ainsi la plus grande équation de Mars qui en résulte n'étoit pas differente de celle qui avoit été déterminée par Kepler ; ce que nous avons ensuite verifié par diverses autres comparaisons.

Après avoir fait cette correction, on trouvoit que les Tables ne representoient pas bien encore les observations faites près de l'Aphelie & du Perihelie, & qu'il y avoit entre les Tables & les observations une difference de quelques minutes ; d'où il étoit aisé de juger que cette difference venoit de la situation qui n'étoit pas exactement déterminée dans les Tables Rudolphines pour le temps de ces observations : car on peut avancer ou reculer l'Aphelie pour ôter cette difference, sans que ce changement fasse varier sensiblement la plus grande équation.

On corrige donc cette difference en faisant l'Aphelie 20 minutes moins avancé qu'il n'est dans ces Tables.

En faisant ces corrections à l'Epoque & à l'Aphelie, nous representons à une minute près dix oppositions observées en differentes parties de l'orbe de Mars assez éloignées les unes des autres, ce qui confirme aussi la distribution de la premiere inégalité de la maniere qu'elle a été calculée par Kepler. Cela revient à peu près à l'hypothese elliptique simple, en y employant une équation qui commence de l'Aphelie & du Perihelie, & augmente de côté & d'autre jusqu'à la distance de 45 degrés, où elle est plus grande & monte à ces endroits environ à 8 minutes.

Il est fort difficile de déterminer si l'Epoque, & la situation de l'Aphelie, que nous venons de trouver un peu differentes de ce qui avoit été déterminé par Kepler, vient de quelque petite erreur des observations ou de la ma-

niere de les employer, ou enfin du moyen mouvement de Mars & de celui de son Aphelie, qui est peut-être un peu different de celui qui est supposé par Kepler, & ce n'est que par une suite d'observations de plusieurs siecles que l'on se peut éclaircir sur ce point.

Parmi les differentes observations que nous avons pour la détermination des nœuds de Mars, nous nous contenterons presentement de rapporter celle de l'année 1700. Le 2 de May à 32 minutes aprés minuit nous déterminâmes la latitude Septentrionale de Mars de 0°. 11′ 38″, & le 10 du même mois à 11ʰ 53′ la latitude meridionale de Mars se trouva de 0° 11′ 3″. Donc la variation de la latitude en 8 jours fut de 22′ 41″, & parce que proche du nœud la latitude change à peu prés à proportion du temps, comme il paroît aussi par d'autres observations faites entre le 2 & le 10 de May, nous trouvons que Mars arriva au nœud le 6 de May à 15ʰ aprés midy. L'arrivée de Mars au nœud préceda d'un jour & presque 17 heures l'opposition de la même Planete avec le Soleil, qui arriva en 8° 6′ du Scorpion; ainsi nous avons calculé le nœud austral de Mars vû du Soleil en 17° 13′ du même signe, & par consequent le nœud boreal en 17° 13′ du Taureau. Les Tables Rudolphines le donnent pour ce temps-là en 17° 50′ du même signe à 37 minutes prés de nos observations.

Nous avons cherché l'inclinaison de l'orbite de Mars à l'Ecliptique par les observations de l'année 1687, cette Planete étant en opposition avec le Soleil à un degré prés des limites de sa plus grande latitude. Par les observations que nous fîmes le 7 Aoust, on trouva que Mars avoit une latitude Meridionale de 6° 50′ 40″. Cette latitude vûë de la Terre étant réduite à la latitude vûë du Soleil par la proportion des distances du Soleil à la terre & de Mars au Soleil, donne l'inclinaison de l'orbite de Mars à l'Ecliptique de 1° 50′ 45″. Dans les Tables Rudolphines cette inclinaison a été déterminée de 1° 50′ 30″ à 15 secondes prés de celle que nous venons de déterminer, ce qui est une difference insensible.

RECHERCHE DE LA PARALLAXE de Mars.

Depuis l'année 1672 il n'y a point eu d'occasion plus favorable pour chercher la parallaxe de Mars, que celle qui s'est presentée le mois de Septembre & d'Octobre de l'année 1704. Cette Planete s'est trouvée alors en opposition avec le Soleil, prés de son Perigée periodique, & dans une situation du Ciel où on la pouvoit observer à differentes heures de la même nuit au meridien & à une distance considerable du meridien, qui sont des circonstances qui rendent plus sensible la parallaxe de Mars, qui ne monte qu'à peu de secondes.

Nous avons profité d'une observation si rare, & nous nous sommes servis d'une excellente Lunete de 12 pieds, qui avoit au foïer commun de l'objectif & de l'oculaire les fils qui se croisent à angles de 45 degrés, & qui sont trescommodes pour déterminer la difference d'ascension droite & de declinaison entre deux étoiles peu éloignées en declinaison. Nous nous sommes servis d'une Lunete de cette longueur plutôt que d'une plus courte, pour avoir à son foïer le mouvement apparent des étoiles plus sensible, ce qui sert à déterminer plus précisément le temps de leur arrivée aux fils, & nous avons placé cette Lunete sur une machine parallatique.

Premiere Observation.

Le 27 Septembre Mars s'étant trouvé prés du parallele d'une étoile fixe de la cinquiéme grandeur qui n'est point marquée dans les Cartes celestes, & qui suivant nos observations est située en 5° 50′ d'Aries avec une latitude meridionale de 8° 8′, nous observâmes le temps que Mars & cette étoile passerent par le meridien. Mars y arriva

l'horloge marquant	12h 1′ 32″
& l'étoile y fut à	12 19 47
Donc la difference du passage entre Mars & l'étoile fut de	0 18 15

ce qui fut encore verifié par d'autres obſervations.

Seconde Obſervation.

Le 28 Septembre ayant dreſſé la Lunete poſée ſur la machine parallatique, enſorte que le centre de Mars par ſon mouvement à l'Occident parcouroit préciſément un des fils qui ſont au foïer de la Lunete, ce fil repreſentoit le parallele de Mars, un autre fil qui eſt perpendiculaire au premier repreſente un cercle horaire, auquel Mars arriva l'horloge marquant 6h 58′ 35″
Ayant laiſſé la Lunete immobile dans cette ſituation, l'étoile par ſon mouvement à l'Occident arriva au premier fil oblique à 7 17 36
Elle toucha le fil perpendiculaire auquel on avoit obſervé Mars à 7 17 46
& paſſa par le ſecond fil oblique à 7 17 56
de ſorte que la difference de declinaiſon entre Mars & l'étoile, qui eſt égale au paſſage de l'étoile entre un des fils oblique & le fil perpendiculaire, étoit de 10″ de temps du parallele de l'étoile, dont Mars étoit plus Septentrional. La difference d'aſcenſion droite qu'on trouve en comparant l'arrivée de Mars & de l'étoile au même fil perpendiculaire fut de 0 19 11
à l'inſtant que Mars arriva au fil.

Troiſiéme Obſervation.

Le même jour 28. Septembre Mars arriva au meridien l'horloge marquant 11h 56′ 8″
l'étoile y arriva à 12 15 35
La difference d'aſcenſion droite en temps entre Mars & l'étoile fut de 0 19 27

Comparaiſon de la premiere & de la troiſiéme Obſervation.

En comparant la difference d'aſcenſion droite entre Mars & l'étoile obſervée au meridien le 27 Sep. de 0h 18′ 15″.

avec la difference observée le jour suivant au meridien de $0^h\ 19'\ 27''$
on trouve le mouvement retrograde de Mars en $23^h\ 55'$ de $0\ 1\ 12$

Le Ciel qui fut couvert le 29 & le 30 au passage de Mars par le meridien, ne nous permît pas de continuer ces observations pour connoître au juste les variations qui sont arrivées d'un jour à l'autre au mouvement de Mars par rapport à l'étoile fixe: mais d'autres observations faites le 29 Septembre hors du meridien & au commencement d'Octobre, nous ont fait connoître que le mouvement de Mars étoit assez uniforme, & que la variation qui lui arrivoit d'un jour à l'autre dans cette situation n'étoit pas sensible; c'est pourquoi nous pouvons supposer que le mouvement de Mars entre le 27 & le 28 Septembre étoit proportionnel au temps, & qu'en raison d'une minute & 12 secondes en $23^h\ 55'$ le mouvement retrograde de Mars en ascension droite a été 3 secondes de temps par heure.

Comparaison de la seconde & de la troisiéme Observation.

Le 28 Septembre à $11^h\ 56'$ la difference d'ascension droite entre Mars & l'étoile fut de $19'\ 27''$. Entre le temps de la seconde observation & le temps de la troisiéme faites le 28 Septembre il y eut $4^h\ 58'$, auquel intervalle il est dû 15 secondes de temps pour le mouvement retrograde de Mars en ascension droite, qui étant ôtées de $19'\ 27''$ difference d'ascension droite entre Mars & l'étoile observée au meridien, il reste $19'\ 12''$ difference d'ascension droite entre Mars & l'étoile à $6^h\ 58'$ du 28 Septembre; mais par la seconde observation nous l'avons trouvée à la même heure de $19'\ 11''$; donc la difference entre l'observation & le calcul est d'une seconde. Cette difference est causée par la parallaxe de Mars, parce que l'observation ayant été faite dans l'emisphere Oriental du Ciel, & l'étoile étant Orientale à l'égard de Mars, la parallaxe qui le fait

baisser & approcher de l'étoile doit diminuer la difference d'ascension droite, comme on la trouve par l'observation.

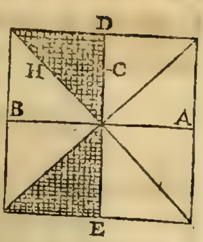
Continuation des mêmes Observations.

Le premier Octobre à 6^h 33$'$ la difference d'ascension droite en temps entre Mars & l'étoile fut observée par le moyen de la Lunette posée sur la machine parallatique de 0^h 22$'$ 41$''$
Et à 11^h 40$'$ du même jour, Mars étant au meridien, cette difference fut 0 22 57
La difference de temps entre la premiere observation faite à 6 33$'$, & la seconde faite à 11^h 40$'$ est 5^h 7$'$, pendant lesquelles nous trouvons que le mouvement de Mars retrograde a été de 0 0 15
qui étant ôtées de 0 22 57
donne la difference d'ascension droite qui aura été à 6^h 33$''$ entre Mars & l'étoile, s'il n'y eut point eu de parallaxe de 0 22 42
l'observation donne cette difference de 0 22 41
La difference qui est dûë à la parallaxe est d'une seconde, comme nous avons trouvé par la comparaison des observations précedentes.

De cette parallaxe observée nous avons conclu la parallaxe horizontale de Mars de 24$''$ d'un grand cercle, en faisant les analogies & les calculs que M. Cassini enseigne dans le Traité de la Comete de l'année 1680.

Nous fîmes des semblables observations depuis le 26 d'Octobre jusqu'à la fin du même mois, lorsque Mars se trouva entre deux petites étoiles qui n'étoient visibles qu'avec la Lunete. Comme ces étoiles disparoissoient lorsqu'on éclairoit l'objectif pour voir les fils placés à son foïer qui servent à déterminer la difference d'ascension droite & de declinaison entre Mars & ces deux étoiles, nous rendîmes ces fils sensibles sans lumiere par le moyen de deux triangles opaques compris entre deux fils, l'un perpendiculaire, l'autre oblique, comme on voit dans cette Figure.

Ayan



Ayant placé Mars qui parcouroit le fil *AB*, on comptoit le temps que Mars & l'étoile arrivoient à la section *DE*, ce qui donnoit la difference d'ascension droite; & marquant le tems que l'étoile se cachoit en *C* & paroissoit en *H*, on avoit comme par les fils la difference de declinaison. Nous nous sommes servis de ce Micrometre pour déterminer la situation des petites étoiles qui composent les nebuleuses; & nous nous en servons aussi commodément dans plusieurs autres observations, lorsque l'air étant agité par le vent ne permet pas d'éclairer l'objectif pour voir les fils qui sont à son foïer.

Par les observations que nous fîmes au meridien depuis le 26 jusqu'à la fin d'Obobre, on trouve le mouvement apparent de Mars fort inégal, parce que cette Planete étoit près de sa station en ascension droite, laquelle par nos observations arriva le 29 Octobre. Ce mouvement inégal d'un jour à l'autre est cause qu'on ne ne le peut pas bien distribuer par les differentes heures du jour pour avoir la difference d'ascension droite à l égard de l'étoile, & la comparer à celle qui a été observée immédiatement loin du meridien; ce qui peut-être en partie cause de la differente parallaxe que nous trouvons en differens jours. Car par les observations du 26 Octobre faites avant & après le passage de Mars par le meridien à une intervalle de 9 heures 4 minutes, nous n'y trouvons qu'une seconde de tems de parallaxe, ce qui donne 12 secondes de parallaxe horizontale; & par les observations du 28 Octobre dans une intervalle semblable de 8 heures, nous trouvons environ une seconde & trois quarts de parallaxe, qui font 24 secondes d'un grand cercle de parallaxe horizontale; de sorte qu'il y a une difference de 12 secondes entre l'une & l'autre. Si on prend un milieu entre ces deux extrêmes, on aura 18 secondes de parallaxe horizontale.

Dans cette derniere observation Mars étoit plus éloigné de la terre qu'il n'étoit dans l'opposition précedente,

& le rapport de ces distances étoit comme 51 à 40. Si on réduit par leur moïen la parallaxe de 18 secondes à celle que Mars auroit eu dans l'opposition, on aura la parallaxe horizontale de Mars dans l'opposition de 23 secondes, ce qui s'accorde à une seconde prés à celle que nous observâmes deux fois differentes.

Suivant les hipotheses Astronomiques Mars dans la derniere opposition étoit un peu plus éloigné de son Perigée periodique, & par consequent plus distant de la Terre qu'il n'étoit dans l'opposition de l'année 1672. Si on a égard à cette distance, on trouvera un accord que nous n'aurions osé esperer entre la parallaxe de Mars qui a été observée dernierement, & celle qui fut déterminé l'an 1672 par M. Cassini, tant par les observations faites à Paris par cette methode, que par la comparaison des observations faites à Paris & à Cayenne; ainsi les autres connoissances que l'on a conclu de cette parallaxe, comme sont la parallaxe horizontale du Soleil, sa distance à la Terre, & la distance des autres Planetes seront les mêmes que celles qui furent déterminées par M. Cassini.

Observations des Taches dans Mars pour verifier sa révolution autour de son axe.

Dans les mêmes circonstances de la plus petite distance de Mars à la Terre, nous avons observé avec une Lunete de 34 pieds de Campani les Taches de Mars, qui nous ont servi à verifier la révolution autour de son axe, qui suivant la découverte de M. Cassini est d'environ 24^{h} $40'$.

Les Taches que l'on voit avec des grandes Lunetes sur le disque de cette Planete ne sont pas pour l'ordinaire trop bien terminées, & elles changent souvent de figure non-seulement d'une opposition de Mars avec le Soleil à l'autre, qui est le temps le plus propre pour ces observations, mais elles changent aussi d'un mois à l'autre. Nonobstant ces changemens il ne laisse pas d'y avoir des Ta-

ches d'une assez longue durée pour pouvoir être observées pendant un espace de temps suffisant à déterminer leurs révolutions.

Parmi les differentes Taches que nous avons vû dans Mars l'an 1704, nous en avons remarqué une en forme de bande vers le milieu de son disque à peu prés comme une des bandes de Jupiter. (*Fig.* 1.) Elle n'environnoit pas tout le globe de Mars, mais elle étoit interrompuë comme il arrive quelquefois aux bandes de Jupiter, & occupoit seulement un peu plus de l'émisphere de Mars; ce que l'on reconnut en observant cette Planete à differentes heures de la même nuit, & aux mêmes heures de differens jours. Cette bande n'étoit pas par tout uniforme; mais environ à 90 degrés de son extremité precedente dans la révolution de Mars, elle faisoit un coude avec une pointe tournée vers son émisphere Septentrional. C'est cette pointe assez bien terminée contre l'ordinaire des Taches de cette Planete qui nous a servi à verifier sa révolution.

Nous vîmes la bande dés les premieres observations que nous fîmes avec la grande Lunete au mois d'Aoust, lorsque le disque de Mars qui s'approchoit de la terre commençoit à paroître assez grand; cependant nous n'apperçûmes la pointe dont nous venons de parler qu'au mois d'Octobre suivant. Elle arriva au milieu du disque de Mars le 14 d'Octobre à $18^h\ 24'$. Le 15 elle y arriva à $11^h\ 9'$.

Le 16 à 7 heures du soir proche des deux poles de la révolution de Mars, on voyoit deux Taches claires (*Fig.* 3.) qui ont été observées plusieurs fois depuis cinquante ans. Outre ces deux Taches claires, on en voyoit une obscure vers le bord Oriental, qui étoit l'extremité de la bande qui commençoit à entrer dans l'émisphere de Mars exposé à la terre. Le même jour à $9^h\ 5'$ l'extremité de cette bande avoit déja passé le milieu de Mars, & la bande se voyoit continuée jusqu'au bord Oriental, (*Fig.* 2.) où l'on voyoit une marque de la Tache adherante à la bande, qui arriva ensuite au milieu de Mars à $11^h\ 38'$. On continua les jours suivans les

mêmes obſervations de la bande interrompuë, qui n'étoit pas ſi avancée dans l'émiſphere apparent aux mêmes heures que les jours précedens, & nous obſervâmes auſſi que la Tache principale arriva le 17 Octobre au milieu de Mars à 12^h $18'$. Par la comparaiſon de ces obſervations les retours de la même Tache au milieu de Mars ne paroiſſent pas préciſément égaux, & il y a quelque minute d'heure de difference, ce que nous attribuons à la difficulté de déterminer exactement le temps de ſon arrivée au milieu, dans lequel on heſite ſouvent un peu. Mais en comparant l'obſervation du 14 Octobre avec celle du 17, entre leſquelles il y a trois révolutions, on trouve le retour de la Tache au milieu de l'émiſphere apparent de Mars de 24^h $38'$.

On connoîtra mieux cette periode par la comparaiſon des obſervations de la Tache plus éloignées entr'elles, comme ſont celles que nous fîmes le 22 Novembre, auquel jour après avoir reconnu qu'à 7^h l'extremité de la bande étoit avancée dans le diſque de Mars, nous obſervâmes que la Tache arriva au milieu à 11^h $5'$.

Si on compare cette derniere obſervation avec celle qui fut faite le 14 Octobre à 10^h $24'$, on trouve entre ces deux obſervations 39 jours & 41', qui étant partagez par 38, nombre des révolutions dûës à cette intervalle, donne un jour & 39 minutes pour chacune, à une minute prés de celle qui a été determinée par M. Caſſini. Ces periodes ſont telles qu'elles réſultent des obſervations immediates, & ſont preſque les plus courtes qu'on puiſſe trouver, à cauſe que le mouvement que Mars a fait durant cette intervalle n'a pas été conſiderable. Si de ces periodes apparentes on en vouloit conclure les periodes moïennes, ces dernieres ſe trouveroient un peu plus longues que les apparentes; mais nous negligeons ces équations, auſſi-bien que la difference qu'il peut y avoir entre l'arrivée de la Tache au milieu de Mars, lorſque ſon diſque paroiſſoit rond comme dans l'obſervation du mois d'Octobre, & l'arrivée de la même Tache au milieu de Mars lorſqu'il

n'étoit plus rond, mais ſenſiblement ovale, comme dans la derniere obſervation du 22 Novembre, à cauſe de ſa diſtance à l'oppoſite du Soleil.

Nous avons crû qu'il étoit inutile de tenir compte de ces équations, parceque nous n'eſperons pas d'arriver à la préciſion qu'on peut attendre dans cette determination, à cauſe des changemens qui ſont arrivez aux Taches que nous avons obſervées. Car la pointe adherante à la bande que nous obſervâmes pendant pluſieurs jours vers le milieu d'Octobre, étoit fort diminuée le 22 Novembre; enſorte qu'on ne l'auroit pas jugée la même, ſi ſa diſtance à l'extremité de la bande qui la précedoit & qui étoit la même que dans les obſervations précedentes, ne l'avoit pas fait reconnoître. Après le 22 de Novembre nous ne pûmes pas continuer les obſervations de la Tache pour voir le changement qui lui eſt arrivé dans la ſuite, à cauſe du temps couvert qui dura prés d'un mois, après lequel temps Mars étoit trop éloigné de la terre pour pouvoir bien diſtinguer les Taches; mais les obſervations faites le mois de Septembre précedent nous donnent lieu de croire qu'il y a eu des changemens conſiderables: car en prenant pour Epoque des retours de la Tache l'obſervation du 14 Octobre, & ſuppoſant qu'avant cette Epoque ſes retours au milieu de Mars ſoient à peu prés égaux à ceux qui l'ont ſuivie, on trouve que la Tache auroit dû paroître au milieu du diſque de Mars depuis le 4 juſqu'au 10 de Septembre à peu prés aux mêmes heures que vers le milieu d'Octobre. Cependant parmi les obſervations que nous fîmes avec ſoin en ce temps-là à diverſes heures de la nuit, on ne vit aucune marque de cette Tache, quoyqu'on diſtinguât fort bien la bande à laquelle on a remarqué depuis la pointe. Dans le commencement de Septembre, au lieu de cette pointe, nous obſervâmes au milieu de Mars une autre Tache ſeparée de la bande vers le Septentrion, & cette Tache avoit diſparu lorſqu'on remarqua la pointe; ce qui nous donne lieu de croire que la Tache qui au commencement de Septembre étoit ſepa-

rée de la bande, peut avoir eu un mouvement particulier du Septentrion vers la partie meridionale de Mars, par lequel elle s'est approchée à la bande, & y a formé la pointe que nous observâmes vers le milieu d'Octobre, & le 22 de Novembre qu'elle parut diminuée. Ces changemens ont quelque ressemblance à ceux qui ont été observez par M. Cassini dans les Taches de Jupiter, & à ceux mêmes qui s'observent quelquefois dans les Taches du Soleil.

REFLEXIONS

Sur les observations envoyées à Monsieur le Comte de Pontchartrain par le Pere Laval Professeur Royal d'Hydrographie.

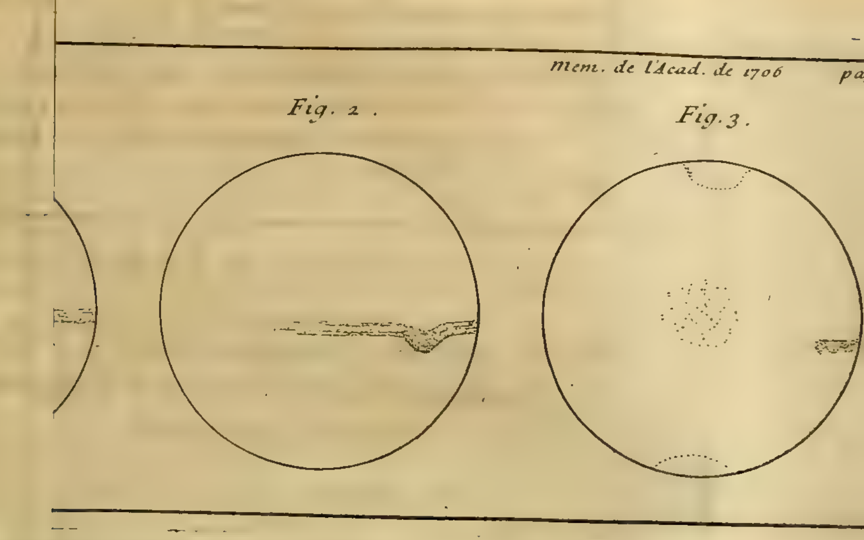
PAR M. CASSINI.

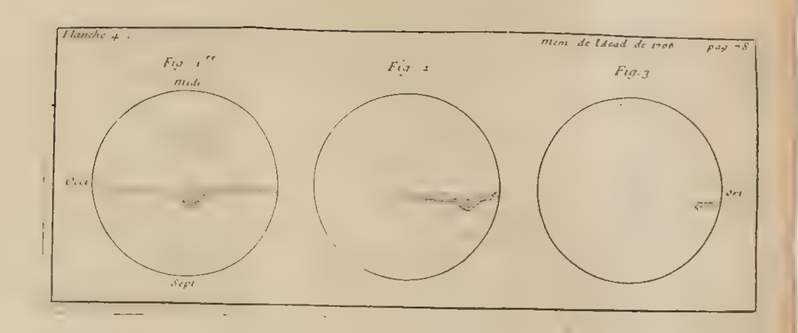
1706. 23 Mars. LA situation de l'Observatoire de Marseille en vûë de l'horizon de la mer, donne au Pere Laval la commodité d'observer les variations horizontales qu'on attribuë communément aux refractions des rayons visuels.

Celles qu'il a faites jusqu'à present étant corrigées par la regle que nous avons donnée à l'occasion des observations faites à la montagne de Nôtre-Dame de la Garde de Toulon, font voir l'une portant l'autre que l'horizon de la mer est éloigné de l'Observatoire de sept petites lieuës, & que l'Observatoire est élevé sur la surface de la mer de 175 pieds.

C'est une chose qui meriteroit d'être examinée par le nivellement fait depuis l'Observatoire jusqu'à l'eau de la mer.

Nous avons remarqué que l'horizon apparent de la mer se voit souvent plus bas que l'horizon veritable qui ne se distingue point toujours. Car il y a deçà de l'horizon ve-


Mem. de l'Acad. de 1706
pa
Fig. 2 .
Fig. 3 .


Planche 4.
Mem. de l'Acad. de 1700
pag. 78
Fig. 1re
Midi
Fig. 2
Fig. 3
Occid
Orient
Sept

ritable une lisiere de la surface de la mer qu'on ne distingue point du Ciel. On en juge par le sommet de quelques Isles que l'on découvre au-delà de l'horison, qui semblent quelquefois être élevées dans le Ciel sur l'horizon apparent de la mer, sur laquelle elles font une reflexion qui forme une image de la montagne renversée contiguë à celle de la montagne vûë directement. Ces deux images en forment une totale, qui est divisée en deux parties égales, & semblables par la veritable ligne horisontale qu'on ne distingue que par cette apparence.

La variation de la bassesse apparente de l'horizon observée jusqu'à present par le Pere Laval ne monte qu'à une minute & demie, la plus petite ayant été de 13 minutes & demie, & la plus grande de 15 minutes; ce qu'il y a de particulier est que la plus grande bassesse a été observée quand la mer étoit plus grosse. La grosse mer devroit plutôt contribuer à faire paroître l'horizon de la mer plus haut; il est vrai qu'à une si grande distance l'élevation de la mer par la tempête ne seroit point sensible: ainsi la diversité de la hauteur apparente de l'horizon se devroit attribuer plutôt aux divers temperamens de l'air qui y causent les refractions.

Nous avons vû quelquefois le matin le Soleil commencer de paroître sur l'horizon un peu élevé sur la surface de la mer, de figure ovale, longue selon la ligne horizontale: elle s'élargissoit peu à peu en haut & en bas, & se divisoit en deux par la ligne horizontale jusqu'à ce que la partie superieure se détachoit de l'inferieure, l'une & l'autre partie s'arrondissant, & formant enfin comme deux Soleils, dont l'un se détachoit de l'autre & s'en éloignoit sur la ligne commune perpendiculaire à l'horizon, jusqu'à ce que l'inferieure que nous supposons causé par la reflexion sur la mer cessoit de paroître. Le Pere Laval a observé une fois au coucher du Soleil sa figure en forme de bonet detaché de tout l'horizon apparent: cette apparence peut avoir été causée à peu prés de la même maniere que nous venons d'expliquer celles que nous avons observées autrefois.

La plus grande déclinaiſon du Soleil que le P. Laval a trouvé en eſté par les obſervations des hauteurs meridiennes du Soleil, corrigées par nos Elemens des refractions & des parallaxes, approche fort de celle que nous avions déterminée par les obſervations faites il y a 50 ans, de 23 degrés & 29 minutes. Par les obſervations d'hyver le P. Laval l'a trouvée plus petite d'une demi-minute, ce qui peut être attribué à quelque petite difference de refraction dans la hauteur meridienne du Soleil, qui pourroit être un peu plus grande ou moins reguliere en hyver. Ce ſont des obſervations très-utiles qui ne devroient jamais être négligées. Cette petite difference peut venir auſſi en partie des diviſions des inſtrumens, qui ne ſont pas ſi fines que dans une multitude de degrés on ne puiſſe douter de quelques ſecondes. Dans un inſtrument de quatre pieds de rayon, cinq ſecondes n'occupent que la 48e partie d'une ligne qui n'eſt pas bien ſenſible. Dans les plus grands inſtrumens on apperçoit dans le Soleil & dans les autres aſtres un petit tremblement qu'on peut attribuer aux divers degrés de la temperature de l'air par où ſes rayons paſſent, ce qui laiſſe quelques petits doutes dans les obſervations. Les obſervations proches de l'horizon ſont ſujettes à des variations par les diverſes temperatures de l'air comme il paroît par l'uſage des Lunetes, qui dans les grandes chaleurs font voir une apparence de boüillonnement dans les objets éloignez.

Les objets vûs enſemble par un rayon horizontal ne ſe voyent pas toûjours de même. On voit de la méme fenêtre & du même point un moulin éloigné, caché en partie derriere un bâtiment proche, quelquefois tout élevé ſur le même bâtiment, & quelquefois comme plongé au-deſſous & caché entierement. Ainſi l'épreuve que l'on fait des inſtrumens par la direction de leurs axes à un objet éloigné, n'eſt pas toûjours exempte de quelque petite erreur : un rayon viſuel qui paſſe par le même milieu n'étant pas toûjours droit ni toûjours courbe de la même maniere, ſa courbure variant ſuivant les diverſes temperatures de l'air interpoſé.

Quant

Quant aux obſervations des Eclipſes du premier Satellite de Jupiter que le Pere Laval a continué de faire le plus ſouvent que le temps lui a permis, il admire leur conformités aux calculs inſerés dans le Livre de la Connoiſſance des Temps, qu'on a pris ſoin de faire en employant les corrections que j'ai données il y a huit ans, leſquelles conſiſtent à ôter 4 minutes de temps à l'Epoque, à ôter auſſi une ſeconde à 25 révolutions du premier Satellite, & augmenter la premiere inégalité de la 30e partie. Ces corrections réduiſent très-ſouvent leurs calculs à la même minute que les obſervations le donnent, ce qui eſt une grande confirmation des Elemens ſur leſquels les calculs ſont fondés. Ces Elemens dépendent non-ſeulement du mouvement propre du Satellite, mais auſſi du mouvement de Jupiter & de ſes inegalités, du mouvement du Soleil, de la ſituation des nœuds du Satellite & de ceux de Jupiter, de l'inclinaiſon mutuelle de leurs orbites, enfin des hypotheſes qu'on employe à déterminer l'équation du temps.

Ils ſont en aſſés grand nombre pour laiſſer lieu de douter ſi quelques erreurs imperceptibles auſquels chacun d'eux eſt expoſé, comme ſont tous les Elemens de l'Aſtronomie, ne feroit pas quelque erreur aſſés conſiderable pour demander de nouvelles corrections en peu de temps. On y eſt toûjours attentif pour tâcher de perfectionner la Theorie de plus en plus; mais juſqu'à preſent on peut ſe contenter de l'état où elle eſt, n'y ayant pas d'autres Planetes ſi bien reglées, dont on puiſſe déterminer les Phenomenes long-temps avant, dans un temps ſi précis que les Eclipſes de ce premier Satellite de Jupiter dans ſon ombre.

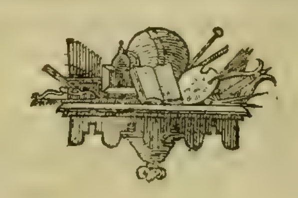
On n'eſt pas encore ſi content des hypotheſes des autres Satellites, leur ſeconde inégalité eſt fort differente de celle du premier; de ſorte qu'on ne les ſçauroit aucunement attribuer à la même cauſe, à laquelle il parut d'abord qu'on pourroit attribuer la ſeconde inegalité du premier Satellite, qui eſt que la lumiere du Soleil qui va

au Satellite & se reflechit à la terre, employe un temps considerablement plus long à faire ce chemin quand Jupiter & ses Satellites est beaucoup éloigné de la terre vers les conjonctions avec le Soleil, que quand il en est plus proche comme dans les oppositions.

Ayant comparé les observations des Eclipses du premier Satellite de Jupiter faites à Marseille avec celles que nous avons faites en même temps à Paris, la difference des meridiens qui en résulte est 12′ 10″; ayant choisi le milieu entre les differences qui se sont trouvées, qui est à quelque seconde près la même qu'on avoit trouvé les années précedentes.

Le P. Laval a fait un grand nombre d'observations de Venus à son passage par le meridien, d'où il a calculé son ascension droite & sa declinaison qui se trouvent conformes à celles que nous avons déterminées par les observations faites en même temps à Paris. Il a fait aussi quelques observations de Mercure au meridien, après que nous lui avons communiqué celles que nous y avons faites. Nous avons eu le temps favorable pour observer Venus au meridien au jour de sa conjonction avec le Soleil.

Le P. Laval a aussi observé les Taches du Soleil qui ont paru pendant l'année 1705, & il en a determiné la situation dans le disque du Soleil suivant la methode que nous pratiquons de concert.



SUITE DE L'ETABLISSEMENT DE QUELQUES NOUVEAUX GENRES DE PLANTES.

PAR M. TOURNEFORT.

GALE.

LE Piment royal est un genre de Plante dont les piés qui fleurissent ne grainent pas, & dont les piés qui grainent ne fleurissent point. Ceux qui fleurissent portent des chatons *A* composez de petites feüilles disposées sur un pivot, creusées ordinairement en bassin & coupées à quatre pointes. Parmi ces feüilles naissent les étamines *B* chargées chacune d'un sommet *C*. Les fruits naissent sur des piés differens de ceux-ci, & ces fruits sont des grapes *D* chargées de semences *E*. 1706. 17. Mars.

Les especes de Piment royal sont:

Gale frutax odoratus Septentrionalium J. B. 1. part. 2. 225.
Rhus Myrtifolia, Belgica C. B. pin. 414.

Gale Lusitanica, foliis amplioribus incanis.

OROBANCHOIDES.

L'Orobanchoides est un genre de Plante à fleur *AB* en rose, composée ordinairement de huit feüilles, dont quatre *C* sont pliées en goutiere & creusées en sabot à leur base: les autres quatre sont toutes simples *D*. Du milieu de ces feüilles s'éleve un pistile *E*, qui dans la suite devient un fruit *F* oblong, divisé en quatre loges *G*, lequel s'ouvre de la pointe à la base en autant de parties. Ces loges sont remplies d'une semence très-menuë *H*.

Les espaces de ce genre sont:

Orobanchoides nostras, flore oblongo flavescente. *Orobanche Verbasculi odore D. Plot. Raii Hist. 1229. Pluk. Phytog. Tab. 209. fig. 5.*

Orobanchoides Canadensis, flore oblongo, cernuo. *Orobanche Virginiana, flore pentapetalo cernuo D. Banister Pluk. Phytog. Tab. 209. fig. 7.*

TERNATEA.

La Ternatée est un genre de Plante à fleurs *AB* legumineuses, dont l'étendart *C* cache presque les aîles *DE* & la feüille inferieure *F*, ainsi que le pistile *G*. Ce pistile devient une gousse *H*, qui s'ouvre dans sa longueur en deux cosses *IK*, lesquelles renferment les graines *L* assez rondes. Il faut ajoûter au caractere de ce genre les feüilles rangées comme par paires sur une côte terminée par une seule feüille.

Les especes de ce genre sont :

Ternatea flore simplici cæruleo. *Flos clitoridis Ternatensibus Breyn. Cent.* 1. 76.

Ternatea flore pleno, cæruleo. *Phaseolus Indicus, Glycyrrhisæ foliis, flore amplo cæruleo, pleno H. Amstel. Tom.* 1. 47.

Ternatea flore simplici albido.

Ce genre porte le nom d'une des Isles Moluques appellée *Ternate*, d'où la graine de l'espece à fleur simple est venuë.

LUFFA.

La *Luffa* est un genre de Plante dont les fleurs sont des bassins divisez en cinq parties jusques vers leur centre. Sur la même Plante on trouve quelques unes de ces fleurs *A* qui sont noüées, & quelques-autres *B* qui ne le sont pas. Celles qui sont noüées tiennent à un embryon *C*, qui devient un fruit *D* semblable à un Concombre, mais ce fruit n'est pas charnu. On ne voit sous sa peau *EF* qu'un tissu de fibres qui forment un admirable raizeau *G*, & qui laissent trois loges dans la longueur du fruit *HIK*, lesquelles renferment plusieurs graines *L* presque ovales.

Je ne connois qu'une espece de ce genre :

Luffa Arabum. *Cucumis Egyptius reticulatus seu Luffa Arabum Vesling. in P. Alp.* 48.

DIERVILLA.

La Dierville eſt un genre de Plante dont la fleur *AB* eſt une eſpece d'entonnoir à pavillon découpé en cinq parties, & terminé par un tuyau *C*, lequel eſt articulé avec le piſtile *D*. Le calice *E* eſt oblong, chargé de cinq feüilles à ſon extremité. Lorſque la fleur eſt paſſée, il devient un fruit *F* piramidal, partagé en quatre loges *G* remplies de graines *H* aſſez menuës.

Je ne connois qu'une eſpece de ce genre, que M. Dierville Chirurgien du Pont-l'Evêque, fort éclairé dans la connoiſſance des Plantes, a apportée d'Acadie.

Diervilla Acadienſis, fruticoſa, flore luteo.

CHELONE.

La Tortuë eſt un genre de Plante à fleur en maſque *AB*, dont la levre ſuperieure *C* eſt voutée en dos de Tortuë. L'inferieure *D* eſt decoupée en trois parties. Le derriere de la fleur eſt retreci en tuyau, dont l'ouverture *E* reçoit le piſtile *F*, qui devient un fruit *G* arrondi, oblong, partagé en deux loges *H*, *I*, remplies de ſemences *K* bordées d'un petit feüillet.

Je ne connois qu'une eſpece de ce genre, qui a été apportée d'Acadie par M. Dierville.

Chelone Acadienſis, flore albo.

VALANTIA.

La *Valantia* eſt un genre de Plante dont les fleurs *AB* ſont des baſſins partagez ordinairement en quatre parties; quelquefois en trois. Le calice *C* devient un fruit *DE* membraneux, ſemblable en quelque meniere au pied d'un oiſeau qui tient dans ſes ſerres une graine *F* de la forme d'un petit rein.

Je ne connois qu'une eſpece de ce genre.

Valantia quadrifolia, verticillata. *Rubia quadrifolia, verticillato ſemine J. B.* 3. 719. *cruciata muralis, minima, Romana Col. part.* 1. 297.

Ce genre porte le nom d'un des plus habiles Botanistes de ce siecle, M. Vaillant Secretaire de M. le premier Medecin.

LAVATERA.

La *Lavatera* a la fleur tout à fait semblable à celle de la Mauve, mais le pistile devient un fruit *A* d'une structure toute differente. C'est une espece de bouclier *B* membraneux, enfoncé sur le devant, garni en dessous *C* d'un rang de semences disposées en maniere de cordon, de la forme d'un petit rein *D* sans envelope, attachées par leur échancrure à un petit filet.

Je ne connois qu'une espece de ce genre, à qui j'ai donné le nom de Messieurs Lavater Medecins de Zurich, très-habiles dans la connoissance de l'Histoire naturelle.

Lavatera Althææ folio & facie, flore rubro.

METHONICA.

La Superbe est un genre de Plante dont la fleur *A* est en lys composée de six feüilles rangées autour du même centre. Le pistile *B* devient un fruit *C* ovale, divisé dans sa longueur en trois loges *D*, qui renferment des semences *E* assez rondes. Il faut ajoûter au caractere de ce genre la racine *F* charnuë taillée en équierre, & les feüilles *G* terminées par une main *H*.

Je ne connois qu'une espece de ce genre.

Methonica Malabarorum H. L. Bat. 688. *Lilium Zeylanicum, superbum H. Amstel. Tom. 1. 69.*

CONYZOIDES.

La *Conyzoides* est un genre de Plante à fleurs à fleurons, semblables à celles de la Conyze : mais elle differe de ce genre par ses semences qui n'ont point d'aigrette.

Les especes de *Conyzoides* sont,

Conyzoides flore flavescente, cernuo. *Aster cernuus Col. part. 1. 252.*

Conyzoides Orientalis, Verbasci folio.

Gale

D

E

Orobanchoides

C

D

E

F

H

G

Ternatea

B

C

L

I

K

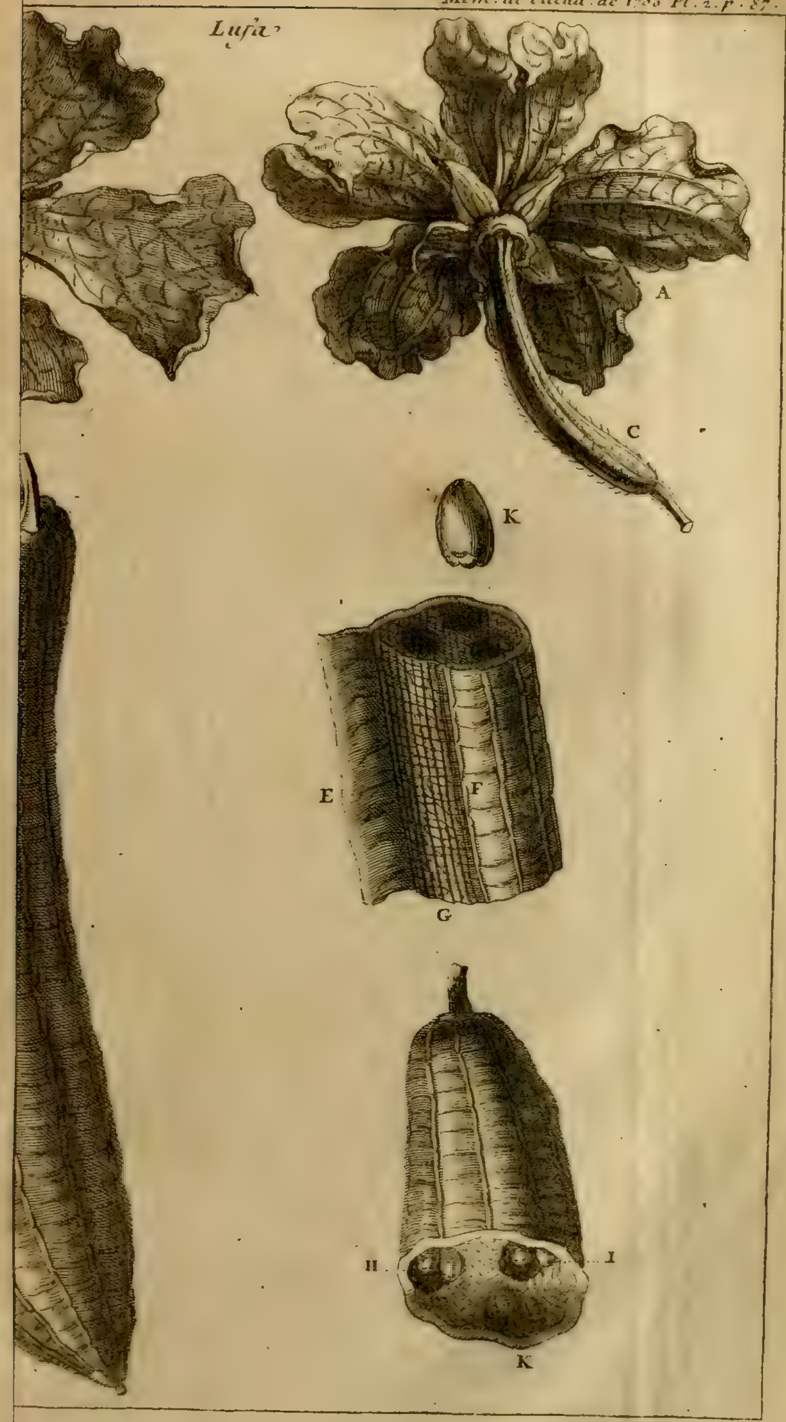
L

H

F

G




Lufa
A
C
K
E
F
G
H
I
K

Luffa


Diervilla.
B
C
F
G
H
Chelone.
G
H
I
B
E
K
F
Valantia.
A
C
D
E
F
F
B
Lavatera.
C
D
Methonica.
C
D
E
G
F
H
Solanoides.
B
D
F
E
G


Chelone
Valantia
Lavatera
Solanoides

SOLANOIDES.

La *Salanoides* eſt un genre de Plante à fleur en roſe *A*, compoſée de quelques feüilles *B*. Le piſtile *C* devient une coque *D* aſſez ronde, qui renferme un noyau *E* couverte d'une peau charnuë *F* qui lui donne l'apparence d'une baye.

Les eſpeces de ce genre ſont,

Solanoides Americana, circeæ foliis caneſcentibus. *Solanum Barbadenſe, racemoſum, minus, tinctorium, circeæ foliis mollibus & incanis Pluk. Phytog. Tab.* 112. *fig.* 2.

Solanoides Americana, circeæ foliis glabris. *Amaranthus baccifer, circeæ foliis H. Amſtel. Tom.* 2. 127.

OROBUS SYLATICUS NOSTRAS RAII Sinops. 191.

PAR M. CHOMEL.

CEtte Plante a ſa racine très groſſe à proportion de ſes tiges. Dans quelques pieds cette racine trace a quatre doigts de terre de la longueur de huit ou dix pouces : dans d'autres pieds elle pique plus avant & trace moins. Les branches de la racine qui s'enfoncent le plus ont près d'un pied de longueur. Cette racine eſt très ſolide, ligneuſe, raboteuſe & inegale vers ſon collet. Sa groſſeur eſt depuis cinq juſqu'à huit lignes de diametre. Elle eſt rouſſâtre en dehors, & jaune pâle en dedans. Le nerf en eſt plus blanchâtre, aſſez gros, & trés-dur. Le tronc pour ainſi dire, de cette racine ſe diviſe dans ſa partie inferieure en trois ou quatre branches, d'où partent à diſtances inegales des fibres qui ſe terminent en chevelu. La partie ſuperieure eſt entourée de pluſieurs bourgeons, d'où les jeunes tiges doivent naître. Je n'ai trouvé aucune ſaveur dans cette racine. M. Ray a donné dans ſon

1706. 17 Mars.

Hiſtoire une courte deſcription de la Plante ; il témoigne avoir reconnu une ſorte de ſaveur qu'il appelle legumineuſe : J'aime mieux attribuer cette ſaveur à la diverſité du terroir que de penſer qu'un auſſi habile homme ſe ſoit trompé.

Cette racine pouſſe pluſieurs tiges, dont la plûpart reſtent couchées ſur la terre ; quelques autres ſe relevent, & demeurent aſſés droites. Elles ont huit à dix pouces de hauteur, & quelquefois un pied. Elles ſont vers leur origine preſqu'entierement entourées par de petites feüilles courtes qui ſe fanent de bonne heure. Le long de ces tiges eſt répandu un duvet blanchâtre qui les rend un peu veluës, & elles en paroiſſent d'un verd plus guay & plus clair. Elles ſont ſolides, rondelettes, & tant ſoit peu anguleuſes vers les nœuds des feüilles & des rameaux, leur diametre eſt d'une ligne ou environ.

Des aiſſelles des feüilles qui naiſſent alternativement le long de la tige, partent des petits rameaux qui ne portent aucunes fleurs. Les feüilles ſont accompagnées à leur principe de deux oreilletes *III* relevées, hautes de trois à quatre lignes, & larges d'une & demie au plus. Les oreilletes qui accompagnent les feüilles ſuperieures ſont plus étroites & plus pointuës que les oreillettes des feüilles inferieures. Ces mêmes feüilles inferieures n'ont gueres plus d'un pouce de longueur : les plus élevées en ont juſqu'à deux ſur un pouce de largeur. Ces feüilles ſont compoſées de pluſieurs autres petites, rangées tantôt alternativement, tantôt d'une maniere oppoſée, le long d'une côte à laquelle elles ſont attachées par des pedicules très-courts. Les plus grandes de ces petites feüilles ont ſix à ſept lignes de long ſur deux de large. Elles ſont arondies près de la côte, & un peu pointuës vers leur extrêmité, qui eſt terminée par un petit filet ou allongement du nerf qui diviſe aſſez ſenſiblement ces petites feüilles, dont chacune eſt repliée dans les jeunes branches & au ſommet de la tige ; celles du bas ſont plus étenduës & plus plates que celles du haut.

La

La côte est d'un verd plus clair que les petites feüilles qui la garnissent. Elle est creusée en maniere de fillon du côté qu'elles regarde la tige, & arondie pardessous. Toute la feuille est veluë de ce côté, & plus lisse pardessus. La côte avance au-delà des petites feuilles, & les surpasse de la longueur d'une ligne, en formant une pointe ou queuë qui termine chaque feüille. Les feuilles des jeunes rameaux sont moins veluës & un peu luisantes. Le port exterieur du feuillage de cette Plante est assez semblable à celui de la Vesse ordinaire, comme le remarque M. Ray.

Les fleurs naissent en épis recourbez, soûtenuës sur un pedicule rond, solide, long de deux pouces, & large d'une demi-ligne vers l'aisselle de la feüille d'où il part. Ce pedicule est nud jusques vers son milieu, le reste est chargé de 8, 10, & quelquefois 12 fleurs legumineuses.

Chaque fleur *A* y est attachée par un petit pedicule *K* long d'une ligne, d'un verd glacé de couleur de chair, qui soûtient un calice d'un verd un peu plus rouge. Le calice *B* est un cornet évasé, dentelé de cinq pointes, long de deux lignes, & large d'une au plus. Il est un peu aplati, & couvert de duvet, comme le pedicule & le reste de la Plante. La fleur est composée de 4 feuilles 1, 2, 3, 4. La superieure 1. est pliée par sa partie inferieure & posterieure en dos d'âne. Elle a dans cet endroit deux lignes de large, & est d'un blanc tirant sur le pourpre. Sa partie superieure est relevée en étendart. Elle est large de 3 à 4 lignes, arondie, convexe & recoupée dans son milieu. Cet étendart est blanchâtre, semé de petites rayes purpurines & gris de lin, qui rendent cette fleur blanche, panachée de couleur de chair, gris de lin & pourpre. Cette feuille superieure a six à sept lignes de hauteur. L'inferieure 4 est pliée en bateau, dont chaque côté a une ligne de largeur. Elle est longue de 7 à 8 lignes, blanche & marquée vers sa pointe, qui forme le bout du bateau, d'un gris de lin pourpré. Les feuilles laterales 2, 3, sont acrochées à la feuille inferieure par leurs oreillettes, qui sont plissées & ondées. Ces feuilles ont 7 à 8 lignes de longueur : elles

ſont tres-étroites, blanches à leur baſe, larges vers leur milieu d'une ligne y compriſe l'oreillette, & arondies vers leur pointe qui eſt un peu courbée. Ces deux feuilles forment les deux aîles de cette fleur : elles ſont blanches rayées de pourpre clair. Le piſtile *C*, 5, qui part du centre du calice s'étend dans le fond de la feuille inferieure : il eſt envelopé d'une gaine membraneuſe *D*, 5, terminée par une frange dont chaque brin eſt une étamine chargée d'un ſommet jaune. Ce piſtile devient le fruit *E*, qui eſt une gouſſe plate & large vers le milieu avant ſa maturité, comme dans le bouquet *H*. Quand elle eſt meure *E*, elle eſt convexe des deux côtez, longue de près d'un pouce, & large de deux à trois lignes. Cette gouſſe eſt d'un rouge tanné & griſâtre : elle s'ouvre en deux coſſes *F*, qui en ſe recourbant & ſe tortillant laiſſent échaper deux ou trois ſemences *G*. Ces ſemences ſont noirâtres, rondes, un peu applaties, & ornées d'un cordon *K* verdâtre, auquel eſt attaché le petit cordon par où elles recevoient le ſuc nourricier. Elles ont prés de deux lignes de diametre.

La fleur *A*, le fruit *E* & la graine *G* ſont de grandeur naturelle.

Toute la Plante eſt aſſez inſipide, elle n'a point d'uſage dans la Medecine ; & je n'ay trouvé dans les Auteurs aucune figure qui lui convienne : c'eſt ce qui m'a engagé de la faire deſſiner le plus correctement qu'il m'a été poſſible. M. Ray eſt le premier qui l'ait décrite, & même aſſez ſuccinctement.

Cette Plante eſt commune dans les prez les plus élevez du Mont-d'or & du Cantal. On la rencontre en abondance au bord du ſentier qui conduit au ſommet du Puy de Dome, ſurtout à l'Orient & au Midy de cette Montagne.



Orobus Sylvaticus nostras Raij Syn. 191.



... nostras Ray Syn. ...

OBSERVATIONS D'UNE COMETE

Qui a commencé de paroître au mois de Mars.

PAR Mrs. CASSINI ET MARALDI.

LE Ciel qui a été couvert une grande partie de ce mois de Mars 1706, s'étant éclairci la nuit du 18 au 19, nous donna lieu de chercher s'il ne paroîtroit pas quelque nouveau phenomene. Nous en trouvâmes un proche de la Couronne Septentrionale en forme d'une petite étoile nebuleuse, semblable à celle qui est dans la ceinture d'Andromede. Nous marquâmes sa situation à l'égard des étoiles prochaines, pour reconnoître dans la suite s'il n'auroit point quelque mouvement particulier. Il se trouva un peu vers le Septentrion à l'égard de la ligne droite qui passe par trois étoiles marquées par Bayer μ, ζ, de Bootes & κ de la Couronne, autant éloigné vers l'Orient de cette derniere étoile, que celle-cy l'est de la moïenne des trois.

1706. 24 Mars.

A 11h 35′ ayant regardé la Comete par la Lunete de 18 pieds, nous la trouvâmes entre deux petites étoiles qui ne se voient point à la vûë simple, étant à égale distance de l'une & de l'autre. Elle s'éloigna ensuite de la plus Septentrionale, en s'approchant de l'autre qui lui étoit au Sud-Oüest.

A minuit 45′ ayant de nouveau regardé la Comete avec la Lunete de 18 pieds, nous ne pûmes plus voir l'étoile la plus meridionale qui étoit cachée par la Comete, ce qui nous assura de son mouvement propre vers le Sud-Ouest, quoyqu'il ne nous parût pas encore sensible une heure après à la vûë simple. Le Ciel s'étant ensuite broüillé ne nous permit pas de faire d'autres observations. Le jour suivant le Ciel fut entierement couvert.

La 20 au ſoir, quoyque le Ciel fut ſerein, on ne put voir la Comete que lorſqu'elle fut fort élevée ſur l'horizon, la clarté de la Lune ayant peut-être contribué a la rendre moins ſenſible ; nous la vîmes un peu à l'Occident de l'étoile de la troiſiéme grandeur qui eſt dans l'épaule occidentale de Bootes, étant éloignée du lieu de la premiere obſervation d'environ 8 degrés.

A $11^h\ 30'$ nous déterminâmes par le moyen des fils qui ſont au foyer d'une Lunete poſée ſur la machine parallatique, la difference d'aſcenſion droite entre cette étoile & la Comete qui la ſuivoit, de 9 minutes & $34''$, & la difference de declinaiſon de $27''$ de temps, dont la Comete étoit plus meridionale.

Dans cette derniere obſervation la Comete paroiſſoit un peu plus petite que dans la premiere, ce qui peut venir en partie de la clarté de la Lune, qui ſe trouvoit alors ſur l'horizon, & ne s'y trouvoit pas dans les premieres obſervations.

Le ſoir du 21 le Ciel fut couvert. On la vit pourtant un peu le matin ſuivant à 2^h & demi dans une ouverture des nuages. Elle étoit autant meridionale à l'égard de l'épaule occidentale de Bootes, que cette étoile eſt éloignée de l'étoile plus prochaine de la Couronne marquée ν, étant en même temps un peu à l'Occident de la ligne tirée par les deux étoiles δ & ϵ de Bootes. Le Ciel qui ſe couvrit preſque auſſi-tôt ne nous donna pas le temps de continuer ces obſervations.

Depuis ce temps-là le Ciel a été couvert juſqu'au 24.

Ayant poſé ces obſervations ſur le Globe, nous avons trouvé qu'elles ſe rencontroient ſur un grand cercle, qui coupe l'Ecliptique vers le 12e degré de la Vierge & des Poiſſons avec une declinaiſon de 55 dégrés; que ce mouvement à l'égard de l'Ecliptique étoit contre la ſuite des ſignes avec une grande diminution de latitude Septentrionale, & que depuis la premiere obſervation du 18 Mars, la Comete a parcouru en trois jours un arc de 12 degrés environ, ce qui pourra ſervir à la trouver dans la ſuite,

en cas que le clair de la Lune qui va vers son plein & s'approche plus de la Comete, ne la fasse perdre de vûë.

Aprés avoir fait le rapport de ces observations à l'Academie Royale des Sciences le 24 Mars, le soir du même jour nous eûmes le Ciel assez beau pour pouvoir observer la Comete ; mais nous ne pûmes pas la distinguer avant les 11^{h}. du soir, à cause de la clarté de la Lune qui jusqu'alors avoit été assez élevée sur l'horizon. Elle se trouva sur la route que nous avions décrite par les observations précedentes, c'est-à-dire dans la circonference du même grand cercle, sur lequel elle s'étoit avancée vers le Sud-Oüest depuis l'observation précedente, un peu moins qu'à proportion de ce qu'elle avoit fait dans l'intervalle entre les premieres observations : ce qui donna lieu de juger qu'elle avoit passé son Perigée, quoyque l'inégalité de ce mouvement ne parût pas encore assez grande pour en tirer geometriquement le lieu de son Perigée avec assez de précision. Neanmoins on trouva par le calcul qu'elle avoit été à peu prés dans son Perigée à la premiere observation qu'on en fit le 18 de Mars. 1706. 27 Mars.

Ayant élevé le Pole du Globe celeste, & l'ayant tourné de sorte que la route de la Comete qui y étoit marquée concourroit avec l'horizon, le Pole Septentrionale se trouva élevé sur l'horizon de 55 degrés ; ce fut par consequent la moindre distance que la route de la Comete pût avoir du Pole Septentrional.

En cet état le lieu de la premiere observation de la Comete se trouva au point Septentrional de l'horizon, & par consequent elle fut alors plus proche du Pole qu'en tout autre endroit de sa route.

Dans le même état du Globe le premier degré des Gemeaux étoit au meridien où étoit aussi le 58 degré de l'Equinoxial, ce qui sert à replacer la route de la Comete sur la circonference de l'horizon du Globe.

Pour trouver assez précisément sur la trace du mouve-

ment de la Comete les lieux où il la faut chercher d'un jour à l'autre, nous nous servons de l'hypothese qui nous a servi heureusement dans l'apparition des autres Cometes pour les trouver long-temps aprés qu'elles avoient disparu à la vûë simple.

Nous supposons que dans le temps que la Comete paroît, elle décrit un arc d'une très-grande circonference peu different d'une ligne droite, & qu'elle parcourt cette ligne droite par un mouvement égal. Le point de cette ligne le plus proche de la terre est le Perigée de la Comete.

A l'intervalle de la Comete à la terre nous décrivons un cercle concentrique à la terre, & nous emploïons la methode exposée dans le Traité de la Comete de l'année 1664 pour trouver, par le moïen de deux arcs observés entre trois jours differens, les distances de la Comete au Périgée prises sur la tangente à proportion de la plus petite distance de la Comete à la terre.

Ayant supposé la plus petite distance de la Comete à la terre divisée en 100 parties, nous avons trouvé que le mouvement journalier de cette Comete rapporté sur cette tangente est de 7 de ces parties, ce qui suffit pour trouver à chaque jour proposé la distance apparente de la Comete à son Perigée, & les mouvemens journaliers apparens de la Comete, qui sont inégaux entr'eux, & qui diminuent de plus en plus à mesure qu'elle s'éloigne de son Perigée.

Ayant donc placé sur la route de la Comete marquée sur le Globe le point du Perigée, & ayant trouvé le jour auquel la Comete est arrivée à ce point, qui fut le 18 Mars, on aura les points où elle s'est trouvée chaque jour, & où elle se pourroit trouver dans la suite.

Ayant cherché parmi les Cometes qui ont parû depuis plus d'un Siecle, s'il n'y en avoit pas quelqu'une qui ait décrit parmi les étoiles fixes une route approchante de celle que décrit nôtre Comete avec un semblale degré de vîtesse, nous en avons trouvé une qui fut observée l'an

1580 par Gramineus, par Haggecius & par Meſtlin, dont la trace décrite par ces Auteurs approche de la route de celle que nous venons d'obſerver, autant que la Lune approche des mêmes étoiles fixes en differentes révolutions.

OBSERVATIONS DE MERCURE DANS LE MERIDIEN *Comparées avec nos Tables.*

PAR M. DE LA HIRE le fils.

ENtre toutes les Planetes il n'y en a point qui ait donné plus d'exercice aux Aſtronomes que celle de Mercure pour en déterminer les mouvemens; car étant fort proche du Soleil, on ne peut pas en faire toutes les obſervations neceſſaires pour leur détermination, mais encore ſa petiteſſe ne permet pas qu'on le puiſſe voir dans le Crepuſcule où il eſt toûjours quand il eſt viſible à la vûë ſimple. Il y a même quelques Aſtronomes celebres qui n'ont jamais pû le voir, peut-être par quelques cauſes particulieres, ſoit du lieu où ils obſervoient, ſoit par la foibleſſe de leur vûë. 1706. 27 Mars.

Cependant les obſervations de cette Planete qu'on a vûë pluſieurs fois ſur le Soleil dans le Siecle paſſé, auroient pû ſervir beaucoup à faire des Tables juſtes, ſi toutes ces obſervations avoient été faites avec toute l'exactitude qu'on auroit ſouhaité: mais il y a eu dans la plûpart des circonſtances particulieres qui en ont diminué la valeur. Celles qu'on a faites proche de la ligne en pluſieurs endroits auroient été fort avantageuſes, ſi on en avoit eu un aſſez grand nombre, & qu'elles euſſent été juſtes; car on y peut voir cette Planete bien plus proche du Soleil que dans les autres endroits de la terre.

C'étoit peut-être en partie par la faute des Tables qu'on avoit de cette Planete, que nous n'avions pû voir Mercure dans le meridien aprés l'avoir cherché long-tems. Car aprés que mon Pere eut construit les siennes sur un trés-grand nombre d'observations qu'il en avoit faites le matin & le soir par plusieurs methodes tres-exactes, & sur ce qu'on avoit de son passage dans le Soleil, nous eûmes la position de Mercure plus exacte qu'on ne l'avoit auparavant, ce qui fut cause que nous l'apperçûmes pour la premiere fois dans le meridien le 22. Octobre 1699. Cette découverte nous donna beaucoup de satisfaction ; mais nous en eûmes encore une plus grande, en voyant que les observations s'accordoient autant exactement avec les Tables, qu'on le pouvoit esperer dans cette Planete. Nous l'observâmes plusieurs jours de suite, & nous avons continué en differens tems jusqu'à present. Nous l'avons vû même beaucoup plus proche du Soleil qu'on ne le peut voir le matin & le soir, à cause des vapeurs qui sont vers l'horizon.

Mais si nous n'avons pas publié ces premieres observations aussi tôt qu'elles ont été faites, ce n'a été que pour être plus assurés de la justesse des Tables qui avoient été construites sur des observations faites dans des verticaux. Cependant pour prendre datte de cette nouvelle observation, mon Pere a marqué expressément dans la Preface de ses Tables publiées en 1702, qu'il avoit observé toutes les Planetes dans le meridien, sans en excepter Mercure, comme il avoit fait en 1686 dans l'édition de la premiere partie de ses Tables.

Nous avons remarqué plusieurs fois que nous n'avons pû voir cette Planete dans le meridien, quoyqu'elle fut beaucoup plus éloignée du Soleil que lorsque nous l'y avions observée ; & pour nous assurer si ce n'étoit point par le défaut des Tables, nous avons pris alors toutes les mesures necessaires pour reconnoître sa veritable position, par des observations faites dans le même tems le matin ou le soir. C'est ce qui nous a fait penser que cette

Planete

Planete pouvoit avoir plusieurs taches, qui étant tournées vers la terre dans certains tems, lui ôtoient en partie sa clarté, & empéchoient qu'on ne la pût appercevoir.

Comme il faut assez de précautions pour faire ces sortes d'observations dans le meridien, nous avons choisi celles qui nous ont paru les plus sûres entre un assez grand nombre de celles que nous avons faites pour les rapporter icy, & comparer les positions qui sont données par les observations avec celles qui sont tirées de nos Tables.

Nous en rapporterons même plusieurs qui ont été faites de suite, afin de faire mieux connoître la difficulté qu'il y a de faire convenir exactement le calcul avec l'observation, dont on ne peut s'assurer qu'à quelques secondes près, qui peuvent porter loin dans cette Planete.

En 1699 le 22 Octobre le centre de Mercure passa par le meridien à $10^h\ 58'\ 56''$ du matin; sa hauteur meridienne vraïe étoit de $38°\ 19'\ 35''$.

Nous tirons de cette observation par nos suppositions & par le vrai lieu du Soleil tiré de nos Tables, que la longitude de Mercure étoit de $6^s\ 12°\ 5'\ 58''$, & sa latitude boreale de $2\ 7'\ 9''$. Par nos Tables nous trouvons la longitude de $6^s\ 12\ 6'\ 23''$, & la latitude boreale de $2°\ 4'\ 4''$. Donc la difference de la longitude observée avec celle qui est calculée est de $25''$, & la difference de la latitude observée avec celle qui est calculée, de $3'\ 5''$.

Le 23 suivant Mercure passa par le meridien à $11^h\ 0'\ 20''\frac{1}{2}$ du matin, & sa hauteur meridienne vraïe étoit de $37°\ 44'\ 55''$.

Nous tirons de l'observation sa longitude de $6^s\ 13°\ 31'\ 44''$, & sa latitude boreale de $2°\ 5'\ 32''$. Par le calcul des Tables la longitude est de $6^s\ 13\ 31'\ 51$, & la latitude boreale de $2°\ 3'\ 36''$. Donc la difference des longitudes est $7''$, & celles des latitudes $1'\ 56''$.

Le 24 Mercure passa par le meridien à $11^h\ 1'\ 53''\frac{1}{4}$ & sa hauteur meridienne vraye étoit de $37°\ 10'\ 15''$.

Nous tirons de l'observation la longitude de $6^s\ 14°\ 59'$

22″, & sa latitude boreale de 2° 4′ 54″. Et par le calcul la longitude de 6^s 15° 0′ 3″, & sa latitude boreale de 2° 2′ 25″. La difference des longitudes est de 41″, & celle des latitudes est de 2′ 29″.

Le 27 Mercure passa par le meridien à 11^h 7′ 9″ $\frac{3}{4}$, & sa hauteur meridienne vraye étoit de 35° 17′ 35″. Cette observation donne sa longitude de 6^s 19° 34′ 52″, & sa latitude boreale de 1° 56′ 43″; & le calcul donne sa longitude de 6^s 19° 37′ 51″ $\frac{1}{2}$, & sa latitude boreale de 1° 54′ 33″. La difference des longitudes est de 2′ 59″ $\frac{1}{2}$, & celle des latitudes est de 2′ 10″.

En 1701 le 12 Septembre Mercure passa par le meridien à 10^h 54′ 56″ du matin, sa hauteur meridienne vraïe étoit de 52° 4′ 0″, d'où l'on tire sa longitude de 5^s 1° 54′ 53″ $\frac{1}{2}$ & sa latitude boreale de 0° 5′ 25″. Le calcul donne sa longitude de 5^s 1° 54′ 36″ $\frac{1}{2}$, & sa latitude de 0° 2′ 41″. La difference des longitudes est de 17″, & celle des latitudes est de 2′ 44″.

Le 20 suivant Mercure passa par le meridien à 11^h 2′ 12″, & sa hauteur meridienne vraye étoit de 50° 11′ 0″, d'où l'on tire sa longitude de 5^s 10° 50′ 43″, & sa latitude boreale de 1° 37′ 33″. Le calcul donne sa longitude de 5^s 10° 55′ 8″ $\frac{1}{2}$ & sa latitude boreale de 1° 31′ 48″ $\frac{1}{2}$. La difference des longitudes est de 4′ 25″ $\frac{1}{2}$, & celle des latitudes est de 5′ 44″ $\frac{1}{2}$.

Le 21 Mercure passa par le meridien à 11^h 4′ 29″ $\frac{3}{4}$, sa hauteur meridienne vraïe étoit de 49° 36′ 40″, d'où l'on tire sa longitude de 5^s 12° 24′ 48″ $\frac{1}{2}$, & sa latitude boreale de 1° 39′ 31″ $\frac{1}{2}$. Le calcul donne sa longitude de 5^s 12° 27′ 46″, & sa latitude boreale de 1° 37′ 41″. La difference des longitudes est de 2′ 58″ $\frac{1}{2}$, & celle des latitudes de 1′ 50″ $\frac{1}{2}$.

Le 24 Mercure passa par le meridien à 11^h 12′ 18″, sa hauteur meridienne vraïe étoit de 47° 52′ 55″, d'où l'on tire sa longitude de 5^s 17° 20′ 13″, & sa latitude boreale de 1° 51′ 4″. Le calcul donne sa longitude de 5^s 17° 24′ 28″, & sa latitude boreale de 1° 48′ 49″. La difference des longitudes est de 4′ 15″, & celle des latitudes est de 2′ 15″.

Le 25 Mercure passa par le meridien à 11^h 15′ 1″ ¾, sa hauteur meridienne vraïe étoit de 47° 13′ 55″, d'où l'on tire sa longitude de 5^s 19° 2′ 21″ ½, & sa latitude boreale de 1° 52′ 13″. Le calcul donne sa longitude de 5^s 19° 7′ 31″ ½, & sa latitude boreale de 1° 50′ 39″. La difference des longitudes est de 5′ 10″, & celle des latitudes est de 1′ 34″.

Le 26 Mercure passa par le Meridien à 11^h 17′ 56″, sa hauteur meridienne vraïe étoit de 46° 33′ 30″, d'où l'on tire sa longitude de 5^s 20° 47′ 50″ ½, & sa latitude boreale de 1° 53′ 29″. Le calcul des Tables donne sa latitude boreale de 5^s 20° 53′ 0″ ½ & sa latitude boreale de 1° 51′ 31″. La difference des longitudes est de 5′ 10″, & celle des latitudes est de 1′ 58″.

En 1705 le 18 Juillet Mercure passa par le meridien à 10^h 47′ 5″, sa hauteur meridienne vraïe étoit de 63° 53′ 35″, d'où l'on tire sa longitude de 3^s 8° 27′ 48″, & sa latitude australe de 0° 29′ 15″ ½, & par le calcul de nos Tables la longitude est de 3^s 8° 26′ 15″ ½, & sa latitude australe de 0° 29′ 23″. La difference des longitudes est de 1′ 32″ ½ & celle des latitudes est de 7″ ½.

Le 25 suivant Mercure passa par le meridien à 11^h 16′ 8″ du matin, sa hauteur meridienne vraïe étoit de 63° 45′ 35″, d'où l'on conclut sa longitude de 3^s 21° 33′ 33″, & sa latitude boreale de 0° 51′ 2″. Par nos Tables la longitude est de 3^s 21° 35′ 54″ ½, & sa latitude boreale est de 0° 50′ 8″. La difference des longitudes est de 2′ 21″ ½, & celle des latitudes est de 54″.

Le 27 Mercure passa par le meridien à 11h 25′ 49″, & sa hauteur meridienne vraïe étoit de 63° 20′ 35″, d'où l'on tire sa longitude de 3^s 25° 38′ 27″, & sa latitude boreale de 1° 8′ 32″. Le calcul donne sa longitude de 3^s 25° 42′ 13″, & sa latitude boreale de 1° 7′ 9″. La difference des longitudes est de 3′ 46″, & celle des latitudes de 1′ 23″.

Ces observations n'ont point été choisies comme celles qui convenoient le mieux avec les Tables; mais nous avons pris seulement celles que nous croyons les meilleures & les plus éxactes.

N ij

On voit par-là que les Tables donnent la position de Mercure en plusieurs points & en differens tems dans la même minute de longitude que par l'observation, ce qu'on n'auroit jamais osé esperer dans une Planete dont le mouvement est si prompt & si irregulier à cause de la grande excentricité de son orbite & de sa figure qui nous est inconnuë. Pour les autres points Mercure n'est que peu écarté des Tables ; & en examinant les observations de suite, on peut conjecturer que la difficulté de l'observation avec tous les Elemens qu'il faut y employer pour en tirer son vrai lieu, auroient pû contribuer en partie à la difference qui se trouve entre le Ciel & les Tables.

Pour la latitude tirée des Tables, elle ne répond pas avec autant de justesse à l'observation dans plusieurs points que la longitude, quoiqu'elle ne soit que peu écartée, comme on le peu voir, & c'est ce qui nous avoit fait penser qu'il auroit fallu faire quelque correction au nœud, comme d'augmenter l'inclinaison de 5′ à 6′ & de retirer un peu le nœud : mais ces corrections qui pourroient rectifier quelques positions en gâteroient d'autres, & c'est ce qui a fait que nous n'avons encore rien déterminé sur cela, nous contentant jusqu'icy d'avoir approché si près du vrai dans une chose aussi difficile que celle-cy, & réservant à faire ces corrections quand nous aurons un plus grand nombre de ces sortes d'observations.

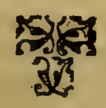
Pour faire la comparaison de nos Tables avec les Rudolphines de Kepler, qu'on a toûjours regardé comme les plus justes de toutes celles qui avoient paru jusqu'à notre tems, & principalement pour cette Planete, nous avons calculé le lieu de Mercure suivant ces Tables pour le tems de quelques-unes des observations précedentes, comme celle de 1699 du 22 Octobre, y ayant corrigé le lieu du Soleil, & nous avons trouvé la longitude de Mercure de $6^s\ 12^\circ\ 14'\ 20''$ que l'observation a donné de $6^s\ 12^\circ\ 5'\ 58''$; donc ces Tables s'écartent du vrai dans ce point de $8'22''$, & les notres ne sont éloignées du vrai que de $25''$. Pour la latitude nous la trouvons par les Rudolphines de

2° 3′ 16″, & l'obſervation eſt de 2° 7′ 9″; donc elles ſont de 3′ 35″, & les nôtres de 3′ 5″.

L'obſervation de 1701 du 10 Septembre, calculée par les Rudolphines, donne la longitude de Mercure de 5ˢ 1° 59′ 2″, & l'obſervation la donne de 5ˢ 1° 54′ 53″ ½, donc la difference eſt de 4′ 0″ ½. La même calculée par nos Tables ne s'écarte de l'obſervation que de 17″. La latitude par les Rudolphines ſe trouve de 33″, l'obſervation la donne de 5′ 25″, & par les nôtres de 2′ 41″. Les Tables Rudolphines ſont donc éloignées du Ciel de 4′ 52″, & les nôtres de 2′ 44″.

Une autre obſervation de 1701 du 21 Septembre, calculée par les Rudolphines, donne la longitude de 5ˢ 12° 26′ 24″, l'obſervation de 5ˢ 12° 24′ 48″ ½, les nôtres de 5ˢ 12° 27′ 46″; donc dans ce point les Rudolphines ſont écartées de 1′ 35″ ½, & les nôtres de 2′ 57″ ½. La latitude dans ce même point par les Rudolphines eſt de 1° 36′ 36″, l'obſervation eſt de 1° 39′ 31″ ½, & par nos Tables de 1° 37′ 41″: les Rudolphines ſont donc écartées du Ciel de 2′ 55″ ½ & les nôtres de 1′ 50″ ½.

Une autre obſervation du 18 Juillet 1705, calculée par les Rudolphines, donne ſa longitude de Mercure de 3ˢ 8° 13′ 21″. L'obſervation de 3ˢ 8° 27′ 48″, & par nos Tables de 3ˢ 8° 26′ 15″. Les Rudolphines s'écartent donc du Ciel de 14′ 27″, & les nôtres de 1′ 33″ ½. La latitude par les Rudolphines eſt de 31′ 56″, l'obſervation de 29′ 15″, & par nos Tables de 29′ 23″; donc les Rudolphines s'écartent de l'obſervation de 2′ 41″, & les nôtres de 7″ ½.



OBSERVATIONS

Sur une dissolution de l'Argent.

PAR M. HOMBERG.

1706. 14 Avril.

PArmi les liqueurs qui dissolvent les métaux, il y en a qui les dissolvent tous, & d'autres qui n'en dissolvent qu'une partie. L'eau commune dissout tous les métaux par la simple attrition : le mercure ne dissout pas aisément le fer, mais il dissout tous les autres métaux. Les acides en general les dissolvent tous aussi ; mais ces acides étant de differente nature, les uns dissolvent seulement certains métaux que les autres ne dissolvent pas. On divise ordinairement ces acides en eaux-fortes, en eaux-regales & en simples esprits acides, qui ne sont ni eaux-fortes ni eaux-regales. Les eaux-regales sont l'esprit de sel marin, & tous les autres acides dans lesquels on a mêlé du sel marin ou de l'esprit de sel marin. Les eaux-fortes sont l'esprit de nitre, & tous les autres acides dans lesquels on a mêlé de l'esprit de nitre, pourvû qu'il n'y ait pas de sel marin mêlé, ou de l'esprit de sel marin. Les simples acides sont tous les autres esprits acides, soit des vegetaux ou des mineraux, dans lesquels il n'y a ni esprit de nitre ni esprit de sel marin mêlé.

Les eaux-regales dissolvent l'or sans dissoudre l'argent ; & les eaux-fortes dissolvent l'argent sans dissoudre l'or : mais les autres esprits acides, aussi-bien que les eaux-fortes & les eaux-regales, dissolvent tous les moindres métaux, pourvû qu'on les emploïe dans le degré de force qui convienne à chacun de ces métaux.

On a crû pendant long-tems que le mercure ne se dissolvoit que par les seules eaux-fortes. J'ay donné des preuves dans nos Memoires de l'année 1700, qu'il se dissout aussi par les eaux-regales. J'ay fait quelques operations

depuis qui m'ont de même parû montrer que non-seulement l'argent se dissout par les eaux-fortes, mais qu'il se dissout aussi par les eaux-regales en observant certaines circonstances: ce qui seroit un paradoxe en Chimie. Voici le cas qui me l'a fait observer.

Je fais souvent mon eau-regale en distillant ensemble deux parties de salpetre, trois parties de vitriol & cinq parties de sel marin. Le flegme qui vient le premier, je le garde à part dans une fiole, & l'esprit qui vient le dernier, je le garde à part aussi.

Un jour voulant dissoudre de l'or, je pris par mégarde la fiole où étoit le flegme de cette eau-regale ; j'en versay sur de l'or pour le dissoudre ; je le laissay dans une chaleur convenable pendant deux heures : la liqueur devint un peu jaunâtre, mais il ne se fit point de dissolution ; ce qui me fit croire que j'avois pris de l'eau-forte au lieu de l'eau-regale. Pour m'en éclaircir j'en retiray l'or & je le pesay. Il parut n'avoir rien perdu de son poids ; & j'y mis à la place un morceau d'argent. Je remis le vaisseau sur le feu ; & après quelque tems je trouvay mon argent dissous en une bouë noire, sans m'être apperçû d'aucune ébullition, laquelle se voit d'ordinaire très-sensiblement dans la dissolution de l'argent: ce qui m'ayant parû extraordinaire, je voulus refaire avec plus d'attention une pareille operation sur l'argent. Je versay donc de la même fiole sur d'autre argent, que je mis en digestion comme devant: mais je fus fort étonné de ce qu'il ne se fit pas de dissolution comme il s'en étoit fait quelques heures devant dans des circonstances à peu près égales. J'examinay avec soin quelle pouvoit être la difference essentielle qui avoit fait réüssir la premiere dissolution, & qui avoit fait manquer la seconde.

Je m'apperçûs d'abord que je ne m'étois pas servi d'eau-forte, comme je l'avois crû ; mais que c'étoit du flegme de mon eau-regale, qui selon les observations connuës ne devoit pas dissoudre l'argent. Cependant l'ayant vû réüssir, je l'ai tenté une troisiéme fois en mettant d'abord ce

flegme en digestion pendant quelque tems avec l'or, comme j'avois fait la premiere fois. Il s'y est teint de même legerement en jaune. J'en ai retiré le morceau d'or, & j'ay mis de l'argent à la place : il s'y est dissous sans ébullition en une bouë noire, comme il avoit fait la premiere fois.

J'ay voulu refaire cette operation avec la même liqueur environ un an après. Elle a fait précisément le contraire de ce qu'elle avoit fait en premier lieu ; c'est-à-dire qu'elle a dissous l'or fort sensiblement & avec ébullition, & elle n'a rien fait sur l'argent. J'ai refait de nouvelle liqueur semblable à la premiere, qui a dissous l'argent. J'ay laissé vieillir cette liqueur, & elle n'a plus dissous l'argent, mais elle a dissous l'or : de sorte que les circonstances qui m'ont parû necessaires pour faire dissoudre l'argent dans ce flegme de l'eau-regale, sont, qu'il soit premierement foible, qu'en second lieu il ait été auparavant en digestion avec l'or, & que troisiemement il soit nouveau distilé.

Il faut observer ici que ce flegme d'eau-regale est clair & sans couleur comme de l'eau de riviere, avant que d'avoir été mis sur l'or ; qu'il devient jaune pendant qu'il est sur l'or ; & qu'il se noircit comme de l'encre pendant qu'il est sur l'argent. Il faut encore observer qu'il ne dissout l'argent qu'après avoir été pendant quelque tems en digestion avec l'or : Que l'argent ne paroît pas se dissoudre dans cette liqueur de la même maniere qu'il fait dans l'eau-forte, dans laquelle il devient liquide & transparent comme de l'eau ; au lieu que dans le cas dont il s'agit icy, il paroît se desunir seulement & devient comme une bouë noire : Que tout cecy n'arrive que lorsque ce flegme est nouveau fait : Enfin que quand il a été gardé sept ou huit mois dans un lieu un peu chaud, il produit des effets tout-à-fait contraires ; c'est à dire qu'il dissout sensiblement l'or qu'il ne paroissoit pas dissoudre auparavant, & qu'il ne dissout point du tout l'argent qu'il dissolvoit auparavant.

Ces effets qui paroissent bizarres & extraordinaires, se peuvent réduire à deux observations principales. L'une est, que cette liqueur ne dissout l'argent qu'après avoir été en digestion

digestion avec l'or : l'autre est qu'elle dissout l'argent quand elle est nouvellement faite, sans qu'elle paroisse dissoudre l'or ; & qu'elle dissout l'or quand elle est vieille, sans dissoudre l'argent.

Pour concevoir la raison de la premiere, sçavoir pourquoy le flegme de notre eau-regale ne dissout l'argent qu'après avoir été en digestion sur l'or ; il faut considerer que ce flegme est une vraie eau-regale, mais fort foible, qui ne laisse pas de dissoudre une petite quantité d'or, quoiqu'il paroisse n'en point dissoudre ; ce qui est assez marqué par la couleur jaune qu'il acquiert quand il a été pendant quelque temps sur l'or & qu'il teint les doigts en rouge brun. Il faut encore considerer que ce flegme ne consiste qu'en une très-petite quantité d'esprit de sel & en autant à peu près d'esprit de nitre, qui nagent & qui sont dispersez en une grande quantité d'eau ; & que ce peu d'esprit de sel & ce peu d'esprit de nitre ne se sont pas encore penetrez & mis en une seule matiere, & que par consequent ils peuvent encore agir chacun separément sur le métail qui lui convient, c'est-à-dire, l'esprit de sel sur l'or, & l'esprit de nitre sur l'argent.

Et comme la presence de l'esprit de sel empêche l'esprit de nitre de dissoudre l'argent, & qu'au contraire la presence de l'esprit de nitre n'empêche pas l'esprit de sel de dissoudre l'or ; cette liqueur qui contient en même temps ces deux esprits, ne sçauroit dissoudre l'argent que l'esprit de sel n'en ait été separé, ou qu'il soit occupé de maniere qu'il ne puisse empêcher l'esprit de nitre d'agir sur l'argent : ce qui arrive precisément quand on met cette liqueur pendant quelque temps en digestion sur l'or, parce que tout l'esprit de sel qu'elle contient est pour lors occupé & chargé d'autant d'or que ce peu d'esprit de sel est capable d'en dissoudre ; de sorte que le reste de la liqueur devient à l'égard de l'argent comme s'il n'y avoit point d'esprit de sel, c'est-à-dire qu'elle devient une simple eau-forte, qui est le dissolvant ordinaire de l'argent. Mais ce peu d'or qui avoit été dissous auparavant par l'es-

prit de sel, & qui reste dans cette liqueur, se précipite lorsqu'on y met l'argent en une poudre noire, laquelle est capable de teindre toute la liqueur en noir : cette noirceur s'augmente à mesure que l'argent s'y dissout, parce que l'or ne se précipite qu'à mesure que la dissolution de l'argent se fait, cette dissolution étant la cause unique de la précipitation de l'or.

La dissolution de l'argent y est d'abord veritable, c'est à dire qu'elle s'y fait en liqueur transparente & claire, comme elle se fait ordinairement par l'eau-forte. Mais comme elle se mêle à mesure avec celle de l'or qui avoit été faite par l'esprit de sel, & dont la confusion se précipite toûjours reciproquement; il en résulte un melange d'une chaux d'argent & d'une chaux d'or precipitées l'une par l'autre, qui produisent cette bouë noire qui paroît après la dissolution de l'argent.

Il sera facile de trouver maintenant la raison de la seconde observation; sçavoir, pourquoi le flegme de notre eau-regale dissout l'argent quand il est fraîchement fait, sans qu'il paroisse disoudre l'or; & qu'il dissout l'or quand il est vieux gardé, sans dissoudre l'argent. On n'a qu'à se souvenir de ce qui a été dit cy-dessus, sçavoir, que ce flegme est une vraie eau-regale, mais fort foible, dans laquelle l'esprit de sel & l'esprit de nitre nagent pêle-mêle, mais separément & sans se penetrer dans le tems qu'il est nouveau fait; & qu'alors ces deux esprits sont encore capables d'agir separément l'un sur l'argent, & l'autre sur l'or, comme nous l'avons vû dans l explication précedente.

Mais ce flegme ayant été gardé pendant cinq ou six mois ou davantage dans un lieu non froid, les deux esprits acides qu'il contient, sçavoir, l'esprit de sel & l'esprit de nitre, se penetrant & s'unissant peu à peu ensemble, ils produisent uue eau-regale inseparable; de sorte que mettant cette liqueur sur l'or, les deux acides qu'elle contient n'agissant plus separément, l'un comme esprit de sel & l'autre comme esprit de nitre, mais de concert comme

une simple eau-regale, ils dissolvent ensemble autant d'or qu'ils sont capables d'en dissoudre, sans toucher jamais à l'argent, soit devant ou après la dissolution de l'or.

Et comme par l'union de ces deux esprits, celui du nitre est devenu aussi un dissolvant de l'or, ce qu'il n'étoit pas auparavant, nôtre liqueur étant vieille doit dissoudre le double de l'or de ce qu'elle étoit capable d'en dissoudre étant nouvellement faite : ce qui a été la cause de l'apparence qu'elle ne dissolvoit point l'or étant nouvelle, & qu'elle en dissolvoit étant vieille.

Cette operation a séduit un des plus grands Chimistes de l'Europe. Il a crû voir dans cette bouë noire non-seulement une dissolution de l'argent par l'eau-regale, mais de plus une veritable transmutation de l'argent en or. Mais en l'examinant avec un peu d'attention, on découvre sans peine que dans toute cette operation il n'y a rien d'extraordinaire, & que bien loin d'y trouver une vraïe transmutation de l'argent en or, il n'y a qu'une fausse apparence d'une dissolution de l'argent par l'eau-regale, toutes les observations y étant communes & ordinaires, pourvû qu'on en éclaircisse les causes & les circonstances comme nous venons de le faire.

REFLEXIONS.

Sur les apparences du corps de la Lune.

PAR M. DE LA HIRE.

LEs premiers hommes qui s'appliquerent à la contemplation des corps celestes, considererent d'abord leurs mouvemens pour en tirer quelque utilité par rapport à la vie. Le Soleil fut le premier qui reglant le cours de la journée & divisant les saisons, leur fournissoit ce qui étoit necessaire pour la culture de la terre, qui étoit la principale occupation de ces temps-là. Cet astre leur mar-

1706. 14 Avril.

quoit la durée des tems par sa révolution entiere sur les étoiles du firmament, & c'est ce qu'ils appellerent une année. Mais cette année composée de 365 jours étoit de trop longue durée pour déterminer les differens accidens de la vie qui arrivent chaque jour: c'est pourquoy ils eurent recours au second luminaire qui est la Lune, & qui parcouroit tout le Ciel en moins de 30 jours. Cet espace de tems leur servit à partager l'année en 12 parties à peu prés qu'ils appellerent *Lunes* ou *Lunaisons*, & c'est par le moyen de ces deux divisions du tems que les faits de l'antiquité la plus reculée & l'ordre dans lequel ils sont arrivés, sont parvenus jusqu'à nous, sans qu'on pût y remarquer aucune erreur, si nous n'étions dans l'incertitude des Epoques differentes dont ils se sont servis, & s'ils n'avoient supposé plusieurs connoissances trés-communes dans leurs tems, dont ils ne pensoient pas que la memoire pût jamais être éteinte.

C'en étoit assez pour l'utilité de la vie, & même en quelque façon pour la curiosité, si l'esprit de l'homme qui n'est jamais content de ce qu'il possede, ne s'étoit porté à contempler avec attention les corps mêmes de ces astres. Le Soleil étoit trop lumineux pour le regarder, & si on le voyoit quelquefois au travers d'un broüillard épais, on ne remarquoit aucune inégalité sur son corps; toutes les étoiles étoient trop petites, il ne restoit donc que la Lune qu'on pût voir très-facilement avec toutes les taches qui paroissent sur son disque.

Cet astre fit d'abord leur admiration, en considerant qu'il ne tournoit jamais vers la terre qu'un même côté de son globe, ce qu'on remarquoit par le moyen des taches qui y sont si sensibles & si bien distinguées.

Ce sont ces mêmes Astronomes qui considerant attentivement les phases de la Lune, jugerent bien-tôt qu'elle recevoit sa lumiere du Soleil, & qu'elle devoit être d'une matiere solide, puisque tout ce qu'ils pouvoient y appercevoir ne leur paroissoit sujet à aucun changement. Cependant l'attention qu'ils apportoient à observer la

Lune fit bien-tôt naître entr'eux plusieurs disputes. Ils remarquoient quand la Lune étoit dans son croissant ou dans son décours, qu'on ne laissoit pas de voir dans un tems serein tout le corps de l'astre & même ses taches ; d'où quelques-uns avancerent que la Lune avoit en elle-même un principe de lumiere foible qui la faisoit paroître, quoiqu'elle ne fût point éclairée du Soleil : d'autres soûtenoient que son corps quoique solide, étoit d'une matiere un peu transparente, & que quelques rayons du Soleil passant au travers communiquoient une foible lumiere à la partie obscure. Mais Tycho n'étant pas content de ces hypotheses, s'imaginoit que cette lumiere venoit de Venus, ce qui étoit bien moins vrai-semblable que les anciennes suppositions. Enfin Mœsthlinus maître de Kepler termina toutes ces disputes, en donnant une raison de ce Phenomene que tous les Sçavans ont embrassée, comme Kepler le rapporte dans ses Paralipomenes sur Vitellion pag. 254, où il dit qu'il ne faut point chercher ailleurs cette seconde lumiere de la Lune, que des rayons du Soleil reflechis sur la terre vers la Lune, qui l'éclairent assez pour la faire paroître de la terre, comme il arriveroit si de la Lune on regardoit la terre qui seroit éclairée par la Lune, lorsqu'elle y paroît pleine ou aux environs.

Aussi l'on avoit remarqué que cette seconde lumiere de la Lune étoit bien plus forte & plus vive lorsque la Lune étoit encore proche du Soleil, que quand elle en étoit éloignée, & c'est ce qui confirme cette hypothese. Car quand la Lune n'est que peu éloignée du Soleil, la partie obscure reçoit par reflexion la lumiere de toute la surface de la terre qui lui est opposée, & qui est toute éclairée à son égard : mais quand la Lune est dans les quartiers, il n'y a plus que la moitié de cette surface de la terre tournée vers la Lune laquelle soit éclairée, & par consequent elle renvoye vers la Lune une lumiere bien plus foible qu'auparavant.

Mais on étoit encore peu avancé dans la connoissance du corps de la Lune avant la découverte des Lunetes

d'approche. Galilée ayant fait au commencement du ſiecle paſſé les plus grandes qu'on vît alors, publia en 1610 dans ſon *Nuntius ſidereus*, les merveilles qu'il avoit découvertes ſur le corps de cet aſtre. Il apperçut que c'étoit un corps fort raboteux, & couvert en partie d'une infinité de montagnes qui étoient beaucoup plus hautes que celles de la terre, quoique la Lune fût beaucoup plus petite, & il en donne une démonſtration, & que ces montagnes environnoient pour la plûpart une infinité de lacunes & les grandes taches obſcures qu'on voyoit à la vûë ſimple, & enfin que c'étoit une verité dont on ne pouvoit pas douter, puiſqu'on voyoit l'ombre de ces montagnes les unes ſur les autres, & ſur les endroits les plus unis qui ſont les grandes taches obſcures.

Les Lunetes de Galilée étoient aſſez bonnes pour découvrir une partie de ce qu'on peut voir ſur le corps de la Lune; mais celles qu'on a faites depuis, qui ſont bien meilleures & beaucoup plus grandes, nous ont donné pluſieurs connoiſſances qu'il n'avoit pas: auſſi ne pouvoit-il pas donner toute ſon attention à chaque objet en particulier, à cauſe de la grande quantité de nouveautés qu'il découvroit de tous côtés dans le Ciel.

L'une des plus conſiderables remarques qu'on puiſſe faire ſur les apparences du corps de la Lune, c'eſt que ſi l'on compare toutes les montagnes & les cavités qu'on y voit diſtinctement dans les endroits où la partie éclairée ſe termine avec l'obſcure, avec ces mêmes parties lorſque le Soleil les éclaire en face, à peine peut-on les reconnoître. Pluſieurs de ces montagnes & cavités diſparoiſſent entierement, & pluſieurs parties lumineuſes & brillantes s'y découvrent, qu'on n'y voyoit point auparavant. Cependant il eſt certain que ces parties lumineuſes ne le ſont point d'elles-mêmes. Par exemple, on voit dans la pleine Lune de grands rayons lumineux tout autour de la cavité ou tache qu'on appelle *Tycho*, qui ne paroiſſent point ſur les montagnes & ſur les taches par où ils paſſent, lorſque ces parties ſont éclairées de côté, & qu'elles ſe rencon-

trent sur le bord de l'ombre. Cette même tache qui paroît fort claire quand elle est éclairée en face, n'est qu'une petite cavité avec une montagne au milieu, qui n'est point differente d'une infinité d'autres qui sont aux environs. De même la petite tache qu'on appelle *Aristarque*, qui est si brillante que quelques-uns ont crû que c'étoit un Volcan, & qu'elle avoit une lumiere particuliere qui la rendoit plus claire que tout le reste de la Lune, n'est pourtant qu'une petite cavité qu'on ne peut distinguer qu'à peine des autres qui l'environnent quand elle est sur le bord de l'ombre.

Il me semble qu'on ne peut pas dire que toutes ces parties lumineuses soient des especes de Phosphores qui s'allument à proportion que le Soleil les éclaire directement, & qui paroissent sans lumiere quand le Soleil les éclaire de biais ou par le côté, puisqu'elles font encore le même effet dans l'obscurité quand la Lune n'est plus éclairée que de la terre par reflexion. Il semble bien plus naturel d'en rechercher la cause dans la figure de ces parties & dans la reflexion des rayons du Soleil, qui y rencontrant une espece de miroir concave qui ne seroit pas parfaitement poli, & dont la superficie seroit fort blanche, frapperoit l'œil comme une veritable lumiere : car si ces cavités étoient polies, on n'y appercevroit qu'un petit point lumineux, ce qui est connu de tous ceux qui sçavent l'Optique.

Pour m'en éclaircir par l'experience, j'ay fait autrefois en relief une petite partie de quelques taches qui sont sur le corps de la Lune ; & l'ayant exposée au Soleil en differentes manieres, elle rendoit à peu près la même apparence que la partie de la Lune qu'elle representoit.

Il faut remarquer que la grande blancheur de ces cavités contribuë beaucoup à cet effet : car comme la blancheur n'est qu'une reflexion toute pure des rayons du Soleil ; si ces cavités sont blanches, elles sont propres à renvoyer la lumiere, & elles la renvoyeront plus fortement vers l'œil à cause de la disposition où elles sont dans la

figure concave, enforte que cette cavité paroîtra toute brillante lorfque le Soleil l'éclairera en face: mais cette lumiere diminuëra peu à peu à proportion que les rayons y viendront de côté, lefquels ne pourront plus fe reflechir vers l'œil, ce qui lui fera perdre en partie fon éclat, outre l'ombre du bord de la cavité dans la cavité même qui l'obfcurcira beaucoup.

Il n'en eft pas tout à fait de même de ces rayons lumineux qui partent de la tache appellée Tycho. Il faut confiderer que le corps de la Lune n'eft que comme un bas relief dont on apperçoit diftinctement toutes les parties quand la lumiere l'éclaire de côté; mais fi elle l'éclaire en face, à peine peut-on en difcerner la figure à une diftance mediocre; & s'il arrive que plufieurs éminences & cavités fe trouvent également éclairées dans un certain afpect du Soleil, alors il ne paroîtra plus aucune interruption entre ces cavités & ces montagnes, & c'eft ce qui fait que la figure apparente de la pleine Lune eft fi differente de la vraye figure de la Lune. C'eft auffi la raifon de l'apparence des rayons qui fortent de Tycho; car dans les endroits où on les voit quand la Lune eft pleine, on n'apperçoit plus les éminences ni les enfoncemens qui y font, & par un hazard de leur difpofition les uns à l'égard des autres, ils forment en cet endroit ces grandes traînées de lumiere: Il faut pourtant en excepter quelques endroits où l'on voit que ces rayons font formés en partie par la figure des corps qui reflechiffent plus vivement la lumiere, & en partie par leur blancheur lorfqu'ils fe continuënt dans les grandes taches obfcures.

Au refte tout le corps de la Lune paroît d'une maniere folide contre l'opinion des Pytagoriciens, qui croyoient que la Lune étoit une feconde terre, dont la partie blanche étoit la terre & les taches obfcures les mers. C'eft en quelque façon fur ce fyftême que nous donnons à ces grandes taches des noms de mers, comme *la mer des pluyes*, *la mer des crifes*, *&c.* quoiqu'en effet il ne paroiffe fur cet aftre aucune partie qui foit liquide, puifque dans ces taches

ches obſcures on apperçoit quelques cavités ſemblables à celles qui ſont dans la partie blanche.

Nous avons auſſi reconnu dans pluſieurs rencontres ou conjonctions des étoiles & des planetes avec la Lune, qu'elle n'avoit autour d'elle aucune Atmoſphere ſenſible, puiſque ces corps ne ſouffroient aucune refraction en s'en approchant ni même en la touchant.

Mais après toutes les obſervations exactes que nous faiſons des parties du corps de la Lune, ce ne ſera que dans la ſuite des tems qu'on pourra être aſſuré que ce corps ne ſouffre aucune alteration en lui-même, au moins telle que nous puiſſions la découvrir; & il eſt certain que s'il lui arrivoit des changemens auſſi grands qu'il en eſt arrivé ſur la terre en certains tems, on pourroit très-bien s'en appercevoir, puiſqu'un eſpace auſſi grand que la ville de Paris ſur le corps de la Lune, nous paroît avec nos grandes Lunetes d'approche de 20 ou 30 piés de longueur, ſous un angle de 4 minutes & plus, ou bien en diametre de la huitiéme partie du diametre de la Lune à la vûë ſimple, puiſqu'elles augmentent de 100 fois la longueur des objets & la ſuperficie de 10000 fois: car ſi Paris étoit placé au milieu du diſque de la Lune, nous en verrions la longueur avec ces Lunetes, auſſi grande que nous voyons à la vûë ſimple une des taches du corps de la Lune, dont le diametre ſeroit égal à la huitiéme partie du diametre de cet aſtre, & une telle tache nous eſt trés-ſenſible & fort facile à bien diſtinguer à la vûë ſimple, puiſqu'elle ſeroit auſſi grande que celle que nous appellons *Mare criſium*, qu'on y voit fort diſtinctement ſans Lunetes.



DEMONSTRATION
De l'apparence d'un objet aussi grand que la ville de Paris sur le corps de la Lune avec une Lunete de vingt-cinq piés de foyer.

PAR M. DE LA HIRE.

1706. 28 Avril. UN objet vû de la terre sur la Lune, ou vû de la Lune sur la terre, paroît sur un même angle.

Or Paris contient sur la terre plus de deux minutes, & le sinus de 2' par rapport au rayon est comme 58 $\frac{1}{10}$ à 100000, prenons comme 60 à 100000, ou bien comme 6 à 10000, ou bien comme 3 à 5000.

Mais si l'on regarde de la Lune cette partie de 3 avec une Lunete de 25 piés de foyer, à qui l'on ne donneroit qu'un oculaire de 3 pouces de foyer, quoiqu'elle en puisse porter un plus fort, laquelle par consequent augmentera l'objet 100 fois, elle le fera paroître sous un angle 100 fois plus grand.

Donc Paris placé sur le milieu du disque apparent de la terre, vû de la Lune avec une de ces Lunetes de 25 piés, sera en apparence au demi-diametre de la terre, comme 300 à 5000, ou comme 3 à 50.

Mais posant le diametre de la Lune de la moitié du demi diametre de la terre comme il est à peu près, & Paris étant transporté sur le corps de la Lune au milieu, il y paroîtra en longueur par rapport au diametre de la Lune comme 3 à 25 : il y paroîtra donc à peu près d'une huitiéme partie de ce diametre, car 3 est à peu près la huitiéme partie de 25.

Et enfin la tache appellée *Mare crisium* est de cette grandeur ; c'est pourquoy Paris étant placé sur le milieu du disque de la Lune, y paroîtroit avec une Lunete de 25 piés, comme y paroît *Mare crisium* à la vûë simple. *Ce qu'il falloit démontrer.*

On ne juge pas de cette augmentation comme elle eſt en effet ; car il n'y a perſonne qui regardant la Lune avec une de ces Lunetes, puiſſe ſe perſuader qu'il voit le diametre de la Lune ſous un angle de 50 dégrés, qui ne paroit à la vûe ſimple que ſous un angle d'un demi degré, & par conſequent on voit le diſque de la Lune avec ces Lunetes 10000 fois plus grand qu'à la vûe ſimple, quoiqu'on ne le juge ordinairement que 4 ou 5 fois plus grand, à moins qu'on n'en faſſe la comparaiſon en regardant la Lune avec les deux yeux tout enſemble, dont l'un eſt appliqué à la Lunete & l'autre eſt libre ; car on peut alors faire paroître la Lune qu'on voit à la vûë ſimple ſur celle qu'on voit par la Lunete, d'où l'on peut juger de la grande augmentation par la Lunete.

DECOUVERTE

D'une nouvelle Etoile qui paroît, & qui diſparoît en divers temps.

PAR M. MARALDI.

ON avoit découvert le Siecle paſſé dans la Conſtellation de la Balene & dans celle du Cigne deux Etoiles fixes, qui paroiſſent & qui diſparoiſſent par des periodes à peu prés regulieres. Nous en avons trouvé préſentement une troiſiéme dans la Conſtellation de l'Hydre, qui ſuivant les obſervations que nous en avons faites depuis quelques années, a la même proprieté que les deux précedentes. 1706. 14 Avril.

Cette Etoile ne ſe trouve point dans les Cartes celeſtes de Bayer, ni dans les anciens Catalogues ; mais parmi les remarques manuſcrites que M. Montanari a faites ſur ces Cartes, & qui nous ont été communiquées à Rome par M. Bianchini, on trouve qu'au mois d'Avril de l'année 1672 il marqua une Etoile de la quatriéme grandeur en

ligne droite, avec les deux dernieres de la queuë de l'Hydre, autant éloignée vers l'Orient de la derniere, que celle-cy l'est de l'antepenultiéme.

En comparant ces Cartes avec le Ciel au mois d'Avril de l'année 1702, nous ne vîmes point cette Etoile à la vûë simple, & nous n'en pûmes pas voir aucun vestige avec la Lunete, quoique nous l'aïons cherchée avec toute l'attention possible.

L'habileté & l'exactitude de cet Astronome ne nous permit pas de revoquer en doute cette observation. La pensée que nous eûmes fut que cette Etoile se trouvoit alors dans le Ciel comme il l'avoit marquée sur la Carte, & qu'elle avoit depuis disparu ; ce qui nous rendit attentif à considerer cet endroit du Ciel, dans l'esperance que l'Etoile pourroit dans la suite se rendre de nouveau visible.

Près de deux ans se passerent avant que nous la puissions appercevoir ; mais enfin nous la vîmes à l'Observatoire Royal au commencement de Mars de l'année 1704, au même endroit du Ciel où elle avoit été marquée 34 ans auparavant par M. Montanari. Elle étoit égale aux Etoiles de la quatriéme grandeur, & plus belle que l'antepenultiéme de la Constellation de l'Hydre. Nous continuâmes de la voir à peu près de la même grandeur jusqu'au commencement d'Avril de la même année. Dans la suite elle alla en diminuant peu à peu, passant par divers degrés de grandeur & de lumiere, jusqu'à la fin de May de la même année qu'elle se perdit entierement à la vûë simple, ayant été visible pendant trois mois depuis la premiere fois que nous l'apperçûmes. Après que nous l'eûmes perduë à la vûë simple, nous continuâmes de la voir encore avec la Lunete durant un mois, pendant lequel-temps elle diminua toûjours jusqu'à ce qu'elle disparut entierement.

Nous avons été ensuite attentifs à chercher cette Etoile toutes les fois que le temps l'a permis, & que la partie du Ciel où elle se trouve a été dégagée des rayons du Soleil. Depuis le mois de Juin de l'année 1704 nous n'avons pû

la voir que vers la fin de Novembre de l'année derniere 1705, lorsque cette partie du Ciel commençoit à sortir le matin des rayons du Soleil. Pour lors elle etoit si foible qu'on n'auroit pas été certain de son retour, si on ne s'en fût assûré en l'observant avec la Lunete, & en déterminant sa situation par rapport aux Etoiles voisines que nous trouvâmes précisément la même que les années précedentes. Elle a depuis continué toujours à diminuer, de sorte qu'à la fin de Janvier de cette année 1706 on avoit de la peine à la voir même avec la Lunete.

On voit donc par ces observations que cette Etoile reste quelques mois visible, qu'aprés avoir disparu pendant plusieurs mois, elle commence à paroître de nouveau, & qu'elle augmente ensorte qu'elle égale les Etoiles de la quatriéme grandeur.

Il y a beaucoup d'apparence qu'elle a toûjours été sujette aux mêmes variations que nous observons depuis quelques années, quoique nous n'aïons point de connoissance que ces changemens aïent été remarquez auparavant.

Ayant examiné les observations qu'Hevelius a faites des Etoiles fixes, & qu'il a publiées dans son Ouvrage intitulé *Machina cœlestis*, nous avons trouvé que le 18 & le 19 Avril de l'année 1662, il observa les distances d'une Etoile de l'Hydre à l'égard de deux autres, dont une est dans le genou du Serpentaire, l'autre est la luisante du Serpent. Ces distances donne la situation de cette Etoile telle à peu près que nous l'avons trouvée par nos observations; ce qui fait connoître qu'elle étoit alors visible & de la cinquiéme grandeur, quoique cet Astronome n'ait point remarqué ces variations, & qu'il la regardât comme une de ces Etoiles ordinaires qui ne sont point marquées dans les Catalogues.

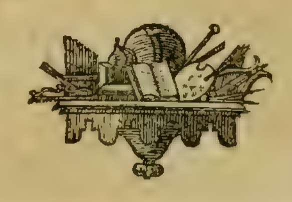
Pour representer les differens intervales de 8, de 34 & de 42 années qui sont entre les observations d'Hevelius, de Montanari & les premieres des nôtres, dans l'hypothese que l'Etoile a paru & disparu plusieurs fois durant

ces intervales, nous ne trouvons point de periode plus propre que celle de deux années.

Les obſervations que nous avons fait depuis quatre années, nous obligent en même temps à reconnoître des grandes inégalités dans cette periode, y ayant un intervale de 26 mois depuis la premiere fois que nous apperçûmes qu'elle avoit diſparu juſqu'à la ſeconde occultation, & ſeulement 18 mois depuis la ſeconde occultation juſqu'à la derniere. Des ſemblables inégalités s'obſervent auſſi dans les retours des deux Etoiles de la Balene & du Cigne, quoique la révolution de l'Etoile de la Balene ſoit pour l'ordinaire de 11 mois, & celle de l'Etoile du Cigne ſoit de 13 mois.

On peut expliquer l'apparition & l'occultation de l'Etoile de l'Hydre par la même hypotheſe que M. Bouillaud a expliqué les apparitions de l'Etoile de la Balene, en ſuppoſant qu'elle eſt un globe en partie lumineux, & en partie obſcur; qu'il tourne autour de ſon axe, & preſente à la terre tantôt la partie lumineuſe qui nous rend l'Etoile viſible, tantôt la partie obſcure qui nous la rend inviſible; que la révolution autour de ſon axe s'acheve dans l'intervale de temps qui eſt entre une apparition de l'Etoile & l'autre, & qui eſt environ de deux ans dans l'Etoile de l'Hydre.

Pour ce qui eſt des inégalités que l'on obſerve dans cette révolution, on les peut expliquer ſuivant l'hypotheſe de M. Caſſini, en ſuppoſant que l'axe autour duquel ſe fait la révolution de l'Etoile s'incline diverſement à la terre en differentes années.



DIVERSES EXPERIENCES ET OBSERVATIONS CHYMIQUES ET PHYSIQUES.

Sur le Fer & sur l'Aimant.

PAR M. LEMERY le fils.

LE Fer est de tous les metaux le plus commun, & cependant celui qui merite davantage l'attention des Physiciens & des Medecins. Les Physiciens trouvent dequoi s'occuper en considerant avec quelle facilité la matiere magnetique passe au travers de ses pores, & les effets surprenans qu'elle produit sur ce metal ; & les Medecins ne peuvent assez l'étudier, puisqu'il est souvent un excellent specifique dans plusieurs maladies. D'ailleurs il entre dans la composition d'un grand nombre d'eaux minerales, non-pas sous sa forme metallique, mais sous une autre qu'il a acquise en s'unissant avec differens sels, & l'on peut dire qu'il fait la principale & peut-être la seule vertu de ces eaux. Il est donc important de s'instruire le plus qu'il est possible de la nature particuliere de ce metal, des differentes metamorphoses dont il est susceptible, & de celles qui peuvent le rendre plus ou moins propre à produire de bons effets dans nos corps. C'est dans cette vûë que j'ai fait un assez grand nombre d'experiences, dont je ne rapporterai presentement que quelques-unes, par lesquelles j'espere faire voir, 1°. Que le Fer se décompose assez facilement. 2°. Quels sont les principes dont il est composé. 3°. Que le Fer n'est soûmis à l'action de la matiere magnetique que par une partie de lui-même, qui étant separée des autres n'en reçoit ensuite que mieux

cette matiere dans ses pores ; & enfin comment on peut conjecturer que le Fer se prepare, & s'altere dans les entrailles de la terre pour devenir ensuite la matiere la plus propre à faire de bon Aimant.

En faisant les trois premieres experiences dont je vais parler dans la suite, je voulois m'éclaircir de deux choses. 1°. Si dans les matieres où l'on sçavoit certainement que le Fer avoit entré, & où il n'en restoit plus de vestige, il avoit tout à fait changé de nature, ou s'il étoit réductible dans sa premiere forme ; car quoique les autres metaux se revivifient, on avoit lieu de soupçonner qu'il pouvoit bien n'en pas être de même du Fer qui est un metal grossier, indigeste, dont on tire par la Chimie un soufre sensible, & qui semble ne devoir produire ses effets dans certaines maladies qu'en se décomposant dans nos corps.

2°. Comme l'on fait un vitriol semblable au vitriol commun avec le Fer & avec plusieurs esprits acides, je voulois sçavoir si l'on ne pourroit point trouver quelque marque de Fer dans le vitriol commun, pour me convaincre encore plus que je ne l'étois, que le vitriol naturel se forme dans les entrailles de la terre, avec les mêmes matieres, & de la même maniere que nous en faisons dans nos laboratoires.

Pour satisfaire à ces deux vûës, je pris trois sortes de matieres : la premiere étoit un vitriol de Mars que j'avois fait à la maniere ordinaire avec la limaille de fer, & avec l'esprit de vitriol. Je passai sur ce vitriol artificiel & autant sec qu'il le pouvoit être, une lame d'acier aimantée, qui n'y fit pas la moindre chose. Je le mis ensuite dans une cornuë, & je le distillai à grand feu : j'eus un esprit acide, mais qui sentoit si fort le soufre commun, qu'il étoit impossible de tenir un moment le nez dessus. Cette odeur se conserve long-tems après la distillation de ce vitriol ; car elle a duré plus de cinq mois & dure encore assez fortement. La matiere restée dans la cornuë étoit rouge, sentant aussi beaucoup le soufre commun, c'étoit un

un veritable colcotar. J'y paſſai une lame d'acier aimantée qui n'y fit rien.

Il eſt à remarquer que cette matiere s'humecte facilement à l'air, principalement quand on ne lui a pas enlevé pendant la diſtillation autant d'acides qu'on le pouvoit faire, & il ſe forme à la ſurface de ce colcotar pluſieurs floccons d'une matiere graſſe, jaunâtre, & qui reſſemble beaucoup au ſoufre commun; je mis ce colcotar dans un creuſet recuit & très-ſec, je plaçai ce creuſet dans un fourneau de fonte, & après que la matiere qui étoit dedans eut été pouſſée par un feu très-violent, & qu'elle eut jetté une forte odeur de ſoufre commun, elle devint noire, rarefiée, & fut attirée par l'Aimant du moins auſſi fortement que le fer ou l'acier.

La ſeconde matiere dont je me ſuis ſervi étoit de la roüille de fer reduite en poudre, qui étoit autant parfaite qu'elle pouvoit l'être, & ſur laquelle l'Aimant ne produiſoit preſque plus aucun effet. Cette ſeconde matiere pouſſée dans le même fourneau par un auſſi grand feu que la premiere, jetta une forte odeur de ſoufre commun, & enfin devint noire, & fut aiſément attirée par une lame d'acier aimantée, mais non pas tout-à-fait ſi bien que la précedente.

La troiſiéme matiere ſur laquelle j'ai travaillé étoit du colcotar reſtée dans la cornuë après la diſtillation du vitriol d'Angleterre, & adoucie autant qu'il avoit été poſſible avec de l'eau commune. En cet état, il n'a rien fait avec l'Aimant; mais après avoir été pouſſé par un feu ſemblable à celui des deux premieres operations, & avoir donné une forte odeur de ſoufre commun, il s'eſt réduit en une matiere noire pareille à celle qui avoit été tirée du vitriol artificiel diſtillé, & enſuite calciné par un feu de fonte. Cette derniere operation nous prouve certainement que le vitriol commun ne differe point de celui que nous faiſons; & elle nous apprend en quoi conſiſte la nature particuliere du colcotar, qui eſt un remede dont on ſe ſert beaucoup en Medecine.

En examinant les trois matieres qui m'étoient restées après les operations dont je viens de parler, je crus d'abord que le fer s'étoit revivifié en sa premiere forme; cependant cette forte odeur de soufre commun qui s'étoit fait sentir dans chacune des trois operations, me donna lieu de penser que le fer pouvoit bien avoir perdu en cette occasion une assés grande quantité de parties essentielles, pour être ensuite different de ce qu'il étoit auparavant. Je fis donc pour m'en convaincre quelques experiences sur le fer & l'acier, & en même tems sur ces trois matieres. Voici les differences que j'y remarquai.

1°. Les grains de ces trois matieres s'écrasent facilement, soit dans un mortier, soit entre deux instrumens d'acier trempez, & des grains de même volume de fer ou d'acier s'y applatissent plûtôt qne de s'y écraser.

2°. La limaille de fer, & particulierement celle d'acier étant jettée sur les charbons ardens, ou dans la flamme d'une bougie, s'y allument & petillent fortement, ce qui n'arrive point à nos trois matieres réduites en poudre.

3°. Je n'ai point remarqué que ces matieres se roüillassent à l'humidité, ni dans les eaux douces & salées, comme le fer.

4°. Plusieurs sucs doux & aigres des vegetaux qui tirent fort aisément & en assez peu de tems de fortes teintures du fer & de l'acier, ne font rien après un long-tems sur ces matieres. Cependant j'ai remarqué que la matiere tirée de la roüille donnoit avec quelques-uns de ces sucs un peu de teinture; on en verra la raison dans la suite.

5°. L'eau forte & l'esprit de nitre qui fermentent si violemment avec le fer, ne font rien du tout sur les trois matieres.

6°. L'esprit de sel qui fermente assez fortement avec le fer, & l'esprit de vitriol qui après une fermentation assez considerable réduit le fer en vitriol, demeurent tranquilles avec ces trois matieres, & ne leur causent aucune alteration sensible.

Enfin l'huile de vitriol & les esprits d'alun & de soufre

verſez ſur ces trois matieres, n'y paroiſſent pas d'abord faire aucun effet, ſi ce n'eſt l'eſprit de ſoufre qui y produit une ébullition ſi petite, & qui dure ſi peu, qu'à moins qu'on ne l'examine de près & avec attention, on a bien de la peine à s'en appercevoir. Quand les eſprits dont il a été parlé ont reſté quelque tems ſur ces matieres, il ſe forme à leur ſurface une poudre blanche & un peu graſſe qui conſerve plus ou moins de tems ſa blancheur, & qui devient ſouvent rouge brune dans la liqueur même. Ces matieres autant alterées qu'elles le peuveut être, ſeparées de la liqueur qui étoit deſſus & ſechées, ſont enſuite attirées preſqu'auſſi-bien qu'auparavant par une lame d'acier aimantée, & n'ont tout au plus ſouffert en cette occaſion qu'une roüille très-legere. A l'égard du fer & de l'acier, l'huile de vitriol & les eſprits d'alun & de ſoufre, leur cauſent des changemens bien plus conſiderables, que je rapporterai avec pluſieurs autres experiences deſtinées pour un ſecond Memoire ſur le fer. On peut donc dire en general que les liqueurs qui diſſolvent le plus parfaitement le fer, ſont à peine capables d'apporter une petite alteration aux matieres dont il s'agit.

De toutes les experiences que j'ai faites ſur le fer, je croi pouvoir conclure qu'il eſt compoſé d'une matiere terreuſe, uni intimement à une matiere huileuſe. Comme il ſe décompoſe aiſément par le ſecours des moindres acides, il ne paroît pas vrai-ſemblable qu'un principe auſſi propre à détruire ce metal, ſoit entré en grande quantité dans ſa compoſition ; je croi même que moins les principes qui ont ſervi à le faire ont contenu d'acides, plus le metal qui en eſt provenu a été malleable & parfait. On dira peut-être qu'on trouve dans le fer des marques d'une aſſez grande quantité d'acides ; mais je tâcherai de faire voir en parlant de la roüille, que ces acides ſont étrangers au fer ; qu'avant que d'avoir produit quelque effet ſur le fer, ils n'y ſont point unis intimement, qu'en les chaſſant alors de ſes pores, il n'en devient que plus pur, & s'il m'eſt permis de parler ainſi, plus fer qu'auparavant,

ce qui n'arriveroit pas si ces acides faisoient parties du fer ; qu'enfin quand on leur a donné le tems & les moïens d'agir sur ce metal & de s'y unir intimement, bien loin de servir à sa composition, ils ne servent qu'à sa destruction.

La partie huileuse dont j'ai supposé que le fer étoit composé, se manifeste par plusieurs experiences, & entr'autres, 1°. Par la promptitude avec laquelle il s'allume étant jetté en limaille sur la flamme d'une bougie. 2°. Parce que la vapeur sulphureuse qui s'éleve de sa dissolution par les esprits acides, s'enflamme aisément & produit en même tems une fulmination violente, & quelquefois brûle un espace de tems assez considerable ; enfin par l'odeur forte de soufre commun qu'on apperçoit dans la distillation, & après la distillation du vitriol naturel & du vitriol artificiel, & dans le tems qu'on pousse par un grand feu leurs colcotars & la roüille de fer. Cependant cette odeur ne prouve pas que le soufre commun, comme soufre commun entre dans la composition du fer : elle prouve seulement que le fer aïant été penetré par des acides qui lui sont étrangers, ces acides se sont unis intimement à sa partie huileuse, comme il sera expliqué dans la suite, & ont formé par cette union un soufre commun veritable qui se fait sentir en sortant par la force du feu, des pores de la partie terreuse du fer ou il étoit contenu.

Il paroît par cette explication, & par les trois operations rapportées au commencement de ce Memoire, que les acides sont necessaires pour détacher les parties huileuses du fer, & pour en priver ensuite ce metal avec l'aide du feu. En effet, le feu seul peut bien enlever quelques-unes de celles qui tiennent le moins au fer ; mais pour les autres, il faut un intermede du moins pour les emporter en moins de tems & avec plus de facilité, & cet intermede doit être capable par sa nature de se faire jour dans le corps du fer, & de s'attacher si fortement aux parties huileuses qu'il y rencontre, qu'ils ne fassent plus ensemble qu'un même corps. Or les acides ont ces qualitez, & plusieurs experiences Chimiques font connoître qu'ils fe-

mentent aiſément avec les huiles, & qu'après la fermentation il s'y uniſſent de maniere, qu'ils forment enſemble un troiſiéme corps, qui n'eſt ni ſi onctueux que l'huile, ni ſi piquant que l'acide, mais qui participe de la nature, & des effets de l'un & de l'autre.

La facilité que les huiles ont à fermenter & à s'unir avec les acides, me donne lieu de croire que le fer ne boüillonne & ne fermente avec eux que par ſa partie huileuſe penetrée par ces mêmes acides qui cherchent à ſe loger dans ſes pores, & qui par les ſecouſſes reïterées qu'ils lui cauſent, la détachent inſenſiblement de la partie terreuſe à laquelle elle étoit unie. Je prouve ce raiſonnement par deux faits. 1°. Parce que j'ai fait voir que quand le fer a été autant privé qu'il le peut être de ſa partie huileuſe, il ne fait plus rien avec les acides, excepté avec un ou deux qui lui cauſent ſeulement une ébullition très-legere, que l'on peut encore attribuer avec beaucoup de vraiſemblance à un reſte de parties huileuſes très-intimement engagées dans le corps de ſa partie terreuſe, & pour leſquelles il ne faut pas moins que des acides auſſi fort & auſſi propres à penetrer profondément ce metal. 2°. Parce que quand le fer n'a ſouffert qu'une perte mediocre de ſes parties huileuſes. Il fermente à proportion de cette perte moins qu'auparavant avec les acides, comme on le va voir par l'experience ſuivante.

J'ai fait mettre en poudre du machefer, j'en ai emporté par pluſieurs lotions ce qui pouvoit y être de craſſe & de parties étrangeres, & aprés l'avoir ſéché, j'ai paſſé deſſus une lame d'acier aimantée, qui en a enlevé avec beaucoup de facilité pluſieurs grains; j'ai mis à part une bonne quantité de ces grains, & j'y ai verſé differens acides, qui y ont tous ſenſiblement moins fermenté qu'avec les limailles de fer & d'acier. Cependant ces grains ſe réduiſent en vitriol comme le fer ordinaire: mais ce qu'il y a de plus remarquable dans le machefer, c'eſt que l'eſprit de nitre n'y fait pas le moindre effet, ſoit que le feu en ait enlevé des parties mercurieles dont l'eſprit de nitre

eſt le diſſolvant, ſoit parce que le feu en a chaſſé les parties huileuſes les plus dévelopées, qui ſont peut-être les ſeules ſur leſquelles l'eſprit de nitre produit quelque effet. Il eſt à remarquer que la limaille de fer calcinée pendant quelques heures dans un creuſet, eſt parfaitement ſemblable au machefer par les mêmes experiences.

Les parties huileuſes qui ſe trouvent naturellement dans le fer, ne rendent pas ſeulement ce metal propre à fermenter avec les acides, elles ſervent encore à retenir ces acides dans les pores de la partie terreuſe du fer, & ſans elles les acides trouvant une trop grande capacité de pores, paſſeroient au travers ſans s'y arrêter, & par conſequent ſans y produire d'alteration bien ſenſible, comme les experiences faites ſur le fer autant dépoüillé qu'il a été poſſible de ſa partie huileuſe le prouvent ſuffiſamment. La maniere dont je conçois que les parties huileuſes du fer produiſent cet effet, eſt que s'étant liées pendant la fermentation avec les acides, elles en augmentent aſſez le volume pour les rendre propres à remplir exactement la capacité des pores du fer, & pour les obliger à y reſter.

De ce qui a été dit ſur la maniere dont les acides s'engagent & s'arrêtent dans les pores du fer, on conçoit aiſément pourquoi pluſieurs liqueurs qui tirent facilement une teinture du fer ordinaire, ne tirent rien de celui qui a été privé de ſa partie huileuſe, & pourquoi le fer qui contient encore toutes ſes parties huileuſes, ſe roüille par les moindres acides, pendant que celui qui les a perduës ne reçoit pas la moindre alteration de ces acides, & même d'acides beaucoup plus forts.

Peut-être m'objectera-t'on ſur ce que j'attribuë la cauſe de la roüille à des acides, que le fer n'en a pas beſoin pour ſe roüiller, puiſqu'une liqueur purement aqueuſe, ou du moins autant privée d'acides qu'elle le peut être, & verſée de tems en tems deſſus, ſuffit pour le réduire en roüille.

Je réponds que le fer après avoir été fondu & forgé, conſerve toûjours obſtinément dans ſes pores des matie-

res étrangeres & salines,pour lesquelles il a encore besoin d'être purifié de nouveau par des alkalis fixes & volatiles, dont tout le monde sçait que le propre est d'absorber les acides. Jusques-là ces sels ne produisent aucun effet bien sensible sur le fer, faute d'être suffisamment délayez, ils bouchent seulement assez les pores de ce metal pour empêcher un peu le passage de la matiere magnetique ; aussi voit on que l'acier qui n'est qu'un fer autant pur & dégagé des parties étrangeres en question qu'il le peut être, est beaucoup plus propre que le fer ordinaire pour les experiences magnetiques; il se roüille aussi beaucoup moins, ou parce qu'il contient déja moins de parties étrangeres, ou parce que ses pores étant plus serrez, il s'y en loge moins aisément de nouvelles. Mais pour revenir au fer quand il a été humecté par une liqueur purement aqueuse, les sels que nous avons supposé s'être logez dans ses pores étant détrampez, ils acquierent enfin assez de force pour s'unir intimement aux parties huileuses du fer, & pour le roüiller. On pourroit ajoûter que comme les pores du fer sont fort ouverts, & qu'il y reçoit aisément toute sorte de sels, les acides de l'air peuvent encore s'engager dans ses pores exterieurs, & étant humectez par une quantité suffisante de parties aqueuses, concourir avec les sels qui étoient déja dans le fer à la roüille de ce metal. Les sels sont donc absolument necessaire pour roüiller le fer, & en effet quand on veut faire de la roüiller de fer plus parfaite que la précedente & en moins de tems, on n'a qu'à faire fondre un peu de sel dans l'eau dont on humecte ce metal.

Quand le fer a été réduit en vitriol, tous ses pores étant bouchez, la matiere magnetique n'y trouve plus de passage, & l'Aimant ne l'attire plus. Cependant on ne doit pas croire pour cela qu'il faille toûjours que tous les pores du fer soient aussi parfaitement bouchez pour rendre ce metal tout-à-fait hors d'état de pouvoir être attiré par l'Aimant. Nous avons une preuve du contraire dansle colcotar, sur lequel l'Aimant ne produit pas plusd'effet

que ſur le vitriol, quoiqu'il ait perdu dans la diſtillation une plus grande quantité d'acides qu'il ne lui en reſte, & qu'il ait par conſequent un grand nombre de pores qui ne ſont point dans le vitriol.

Le vitriol eſt un fer beaucoup plus chargé d'acides que n'eſt la roüille; & comme les parties huileuſes du fer ne s'en détachent qu'à proportion des acides qui s'y ſont introduits, le feu en agiſſant dans nos trois premieres operations ſur le vitriol & ſur la roüille, a dû chaſſer des pores du fer réduit en vitriol plus d'acides, & en même tems plus de parties huileuſes qu'il n'en a chaſſé de la roüille. Le fer roüillé conſerve donc après l'action du feu plus de parties huileuſes, que le fer réduit en vitriol; c'eſt-pourquoi la matiere reſtée après la calcination de la roüille, donne encore quelque teinture à de certains ſucs de vegetaux, qui ne peuvent rien faire ſur celle qui eſt venuë du vitriol, comme il a déja été remarqué.

Plus le fer a été privé de ſa partie huileuſe, plus il s'écraſe & ſe briſe enſuite facilement. A l'égard de celui qu n'a rien perdu, ou du moins qui n'en a pas perdu beaucoup, il s'applatit plûtôt que de s'écraſer. Cette difference vient de ce que les parties huileuſes qui ſe trouvent abondamment dans ce dernier, lient étroitement enſemble ſes parties terreuſes, le rendent malleable, & en un mot lui conſervent ſa qualité de metal. Dans l'autre au contraire les parties terreuſes manquant de cet intermede huileux propre à les unir enſemble, elles ſe ſéparent aiſément les unes des autres.

Le petillement qui arrive quand on jette de la limaille de fer ſur des charbons ardens ou dans la flamme d'une bougie, vient de ce que les parties huileuſes, qui ſont le moins attachées au corps du metal, ſe rarefient, s'enflamment, & ſortent avec impetuoſité des pores du fer. Le petillement eſt encore plus grand quand on ſe ſert de limaille d'acier; parce que ſes parties huileuſes étant plus dégagées des parties étrangeres, elles s'enflamment plus puiſſamment, & trouvant plus de réſiſtance dans leur ſortie

tie, parce que les pores de l'acier sont plus petits que ceux du fer, elles font un plus grand bruit. Pour le fer qui a été dépoüillé de sa partie huileuse, il n'est pas étonnant qu'il ne produise plus le même effet.

Jusqu'ici nous nous sommes suffisamment étendus sur la partie huileuse du fer, qui est celle qui appartient davantage à la Medecine. 1°. Parce que c'est elle qui rend le fer propre aux experiences Chimiques que nous avons faites sur ce metal; & en second lieu parce qu'il y a lieu de croire que c'est particulierement par cette partie que le fer produit ses effets salutaires dans plusieurs maladies où il s'agit de subtiliser le sang, & de rompre les obstructions qui se sont formées dans les visceres.

Je viens presentement à la partie terreuse du fer, qui est la seule qui le rende propre aux experiences magnetiques. En effet, plus le fer a été privé de sa partie huileuse, plus la matiere magnetique passe facilement & abondamment au travers de ses pores; & comme cette matiere traverse avec plus de facilité & en plus grande abondance les pores du bon Aimant, que ceux du fer le plus dégagé des parties étrangeres, ne pourroit-on pas conjecturer avec beaucoup de vrai-semblance que la matiere propre de l'Aiman est differente de celle du fer, parce-qu'elle contient moins de parties huileuses? soit que dans sa premiere composition la matiere huileuse ait été moins abondante que dans celle du fer; soit qu'elle ait perdu par la suite les parties huileuses qu'elle contenoit auparavant, de la même maniere que le fer en a été privé par nos trois premieres operations. Ce qui semble encore confirmer cette conjecture, c'est que les experiences Chimiques que j'ai faites sur le fer dépoüillé de sa partie huileuse, & que j'ai rapportées au commencement de ce Memoire, sont parfaitement semblables aux mêmes experiences faites sur l'Aimant réduit en poudre.

Ainsi suivant notre supposition le fer aura d'abord été penetré dans les entrailles de la terre par des acides, & ces acides s'étant unis intimement à sa partie huileuse, ils

seront ensuite sortis avec elle, soit par la simple chaleur de la terre, soit par la violence de quelques feux soûterrains ; & enfin les pores de la partie terreuse de ce métal étant devenus par ce moyen plus ouverts qu'ils n'étoient auparavant, le courant de matiere magnetique qui coule continuellement par les pores de la terre, trouvant un nouveau corps dans son chemin qui lui offre un passage très-libre, il aura continué à y couler, & aura dirigé de maniere ses pores, qu'il sera ensuite devenu propre à produire tous les effets magnetiques que nous remarquons dans l'Aimant.

Peut-être m'opposera t-on que si le fer n'étoit sujet à l'action de la matiere magnetique que par sa partie terreuse, toute terre pourroit produire le même effet, ce qui est faux.

Je réponds qu'une matiere terreuse peut être differente de toute autre matiere terreuse par la figure & la grandeur de ses pores, & que les parties huileuses qui dans la formation du fer se sont unies intimement à sa matiere terreuse, ont pû mouler de maniere ses pores, qu'ils sont ensuite devenus propres à admettre & à laisser passer librement la matiere magnetique.

Peut-être m'objectera-t-on encore, que si le fer dont nous avons enlevé presque toute la partie huileuse, étoit si semblable par sa nature à la matiere propre de l'Aimant, il auroit comme l'Aimant la qualité d'attirer.

Je réponds que pour que l'Aimant attire, il ne suffit pas que sa matiere propre ait une très-grande facilité à recevoir dans ses pores la matiere magnetique ; il faut encore 1°. Que les parties integrantes de l'Aimant soient arrangées d'une certaine maniere les unes par rapport aux autres, pour donner deux poles à toute la masse. 2°. Que ce corps ait fait une provision de matiere magnetique suffisante pour former autour un tourbillon ; & l'on va voir que sans ces deux circonstances la matiere la plus propre à faire de bon Aimant ne feroit jamais un corps qui attirât.

Quand on presente un Aimant très-fort à un autre qui ne l'est pas tant, aussi-tôt l'on remarque pour l'ordinaire que ce dernier n'attire presque plus ; parce que le tourbillon du meilleur Aimant rencontrant un tourbillon plus foible qui s'oppose à son mouvement, il est obligé pour continuer sa route de le rompre & de l'enfoncer, & la plus grande partie de la matiere du moindre tourbillon ne pouvant plus suivre son cours ordinaire, elle se laisse entraîner par le courant du plus fort tourbillon, & elle abandonne d'autant plus volontiers l'Aimant à qui elle appartenoit auparavant, que les pores de celui à qui elle s'est nouvellement attachée, lui offrent apparemment un passage plus libre, & par consequent plus facile. Cette premiere observation nous prouve que quoiqu'il ne manque rien à l'Aimant, & du côté de la matiere propre, & du côté de l'arrangement des parties integrantes, il peut cependant faute d'une assez grande quantité de matiere magnetique, ne faire rien ou presque plus rien de ce qu'il faisoit auparavant.

Quand on laisse quelque tems sur le feu un morceau d'Aimant, ou qu'on le presente aux rayons du Soleil réünis par le miroir ardent, sans y laisser assez de tems pour qu'il s'y vitrifie, il devient incapable d'attirer ; peut-être que dans l'un & dans l'autre de ces cas, la matiere de la lumiere sans détruire la matiere propre de l'Aimant, en chasse d'abord la matiere magnetique, & ensuite divise & déplace assez quelques-unes de ses parties interieures, pour changer l'œconomie & la direction des pores de toutes la masse, & pour empêcher que la matiere magnetique ne puisse penetrer facilement d'un pole à l'autre. Peut-être aussi que la matiere de la lumiere entraîne avec elle, & laisse dans les especes de tuyaux qui aboutissent aux deux poles de l'Aimant, des particules, qui quoique d'un volume peu considerable, sont neanmoins capables de former obstruction dans quelque endroit de ces tuïaux, & d'interrompre par-là la circulation de la matiere magnetique. L'Aimant qui a perdu sa vertu d'attirer par le

feu ordinaire ou par le Soleil, étant réduit en poudre, eſt attiré avec autant de facilité par une lame d'acier aimantée, que la poudre du meilleur Aimant, & l'une & l'autre poudre par les experiences Chimiques, dont il a été parlé, ſe reſſemblent parfaitement. Cette ſeconde obſervation nous fait voir que ſans que la matiere propre de l'Aimant ait reçû d'alteration ſenſible, le moindre changement dans l'arrangement de ſes parties integrantes & dans la direction de ſes pores ſuffit pour détruire ſes poles, & par conſequent pour le mettre hors d'état d'attirer.

Enfin le meilleur Aimant réduit en poudre n'attire plus ni par toute ſa maſſe, ni par chacune de ſes parties. Il n'attire plus par toute ſa maſſe, parce que les pores de chaque grain dont il étoit composé ne ſe trouvent plus tournés dans le ſens & la direction neceſſaires les uns par rapport aux autres, pour donner paſſage au courant de matiere magnetique qui formoit auparavant un tourbillon autour de toute la maſſe de cet Aimant. La poudre d'Aimant eſt à la vûë aſſez ſemblable à la limaille de fer ou d'acier; elle eſt ſeulement attirée avec plus de facilité que cette limaille par une lame d'acier aimantée: mais quand la lame n'a point été aimantée, elle ne fait pas plus d'effet ſur la poudre d'Aimant que ſur la limaille; ce qui eſt aiſé à concevoir dès qu'on fait attention qu'il ne ſe fait point de tourbillon magnetique autour de chaque grain de cette poudre. En effet pour qu'il s'y fît un tourbillon, il faudroit que la matiere magnetique contenuë dans chacun de ces grains, pût en ſortant par un pole ſurmonter la réſiſtance de l air exterieur, & l'écarter continuellement pour revenir juſqu'à l'autre pole. Or cette matiere n'eſt ni aſſez abondante, ni aſſez forte pour cela; car les pores de chacun de ces grains n'étant pas aſſez longs, la matiere magnetique qui fait effort pour ſortir, n'eſt pas pouſſée & ſoûtenuë par derriere par une aſſez grande quantité d'autre matiere magnetique.

Cette troiſiéme obſervation faite ſur toute la maſſe d'un Aimant réduit en poudre, & ſur chaque grain de

cette masse, nous prouve que le corps le plus propre à recevoir la matiere magnetique dans ses pores, & par consequent à faire de bon Aimant, peut ne point attirer, ou parce qu'il n'a pas l'arragement de parties necessaire pour cet effet, ce qui avoit déja été prouvé par la seconde observation, ou parce qu'étant d'un volume trop peu considerable, il ne peut amasser assez de matiere magnetique dans ses pores pour former autour un tourbillon; & ainsi quoique le fer privé de sa partie huileuse de la maniere que nous l'avons marqué n'attire point, il peut cependant passer pour la matiere la plus propre à faire de bon Aimant, & pour celle dont vrai-semblablement la nature se sert dans la production des Aimants naturels.

Cependant on peut faire un Aimant artificiel avec le fer, en lui donnant deux poles, & autant de matiere magnetique qu'il lui en faut pour produire les effets de l'Aimant; mais cet Aimant n'a pas grande force, parce que la quantité de parties étrangeres qu'il contient dans ses pores l'empêche d'y recevoir beaucoup de matiere magnetique, & interrompt si fort la direction des pores de toute la masse, que le peu de matiere magnetique qu'il y a amassée ne continuë qu'avec beaucoup de peine sa route d'un pole à l'autre de cet Aimant. Il ne conserve aussi sa qualité d'attirer que fort peu de tems, parce que le tourbillon de cet Aimant étant déja assez foible, pour peu qu'il perde ensuite des parties magnetiques qui le composent, il ne lui reste plus assez de force pour pouvoir se soûtenir. L'acier est bien plus propre que le fer pour faire de l'Aimant artificiel, parce que ses pores étant beaucoup plus dégagés de parties étrangeres, la matiere magnetique y passe fort aisément & fort abondamment, & qu'elle forme par consequent un tourbillon assez fort pour pouvoir se soûtenir une espace de tems très-considerable. D'ailleurs la roüille ne se mettant pas à beaucoup près si aisément ni si promptement dans l'acier que dans le fer, comme il a été expliqué, la matiere magnetique qui a une fois commencé à circuler au travers de l'acier, peut

y continuer plusieurs années sa circulation sans trouver d'obstacles dans ses pores, ou du moins sans y en trouver d'assez puissans pour interrompre son tourbillon. Aussi M. Joblot se sert-il d'acier pour faire differentes sortes d'Aimans artificiels, qui produisent avec beaucoup de force tous les effets magnetiques qu'on peut éxécuter avec les meilleurs Aimans: mais quelque force que l'art & l'industrie particulieres de M. Joblot puissent donner à ses Aimans artificiels faits avec l'acier, il ne les rendra jamais aussi forts & d'une aussi longue durée qne nos bons Aimans naturels; ce que je n'attribuë pas seulement à l'arrangement plus parfait de leurs parties integrantes, & à l'abondance de la matiere magnetique que ces Aimans naturels ont reçû en premier lieu de la terre, qui est le premier de tous les Aimans, mais encore à leur matiere propre, qui étant vrai-semblablement moins chargée de parties huileuses, est moins sujette à s'alterer, & plus disposée à recevoir la matiere magnetique.

A l'égard de la roüille qui survient au fer, comme elle est un obstacle puissant au passage de la matiere magnetique, & qu'elle en peut être un fort considerable à la conservation des Aimans artificiels faits avec l'acier; il est évident que le fer roüillé n'est point une matiere propre pour faire de l'Aimant. La roüille est seulement un état moïen par lequel le fer passe quelquefois avant que de devenir Aimant naturel; & il le devient quand les acides de la roüille sont sortis de leurs prisons, & ont enlevé avec eux les parties huileuses ausquels ils s'étoient unis, comme on va le prouver incessamment.

Ce n'est pas seulement dans les entrailles de la terre qu'il y a lieu de croire que le fer se convertit en Aimant en perdant d'abord ses parties huileuses, & ensuite en recevant autant de matiere magnetique qu'il lui en faut pour devenir Aimant, comme il a déja été dit. Cette metamorphose naturelle se passe encore à l'air de la même maniere; entr'autres preuves nous avons celle d'une des barres du Clocher de Chartres, que je cite ici par préfe-

rence, parce que j'en ai eu un morceau que j'ai fort examiné, & qui par les épreuves Chimiques dont il a déja été parlé, ne m'a point paru differer de l'Aimant ordinaire, & du fer que j'ai privé de sa partie huileuse ; le fer est devenu Aimant en cette occasion. 1°. Parce qu'il s'est fortement roüillé. 2°. Parce que la chaleur du Soleil en a ensuite insensiblement dégagé la plus grande partie non-seulement des acides de la roüille, mais encore des parties huileuses du metal qui tenoient à ces acides ; ce qui a rendu les pores de cette barre plus ouverts & plus propres à recevoir la matiere magnetique ; & comme cette barre n'a point été réduite en poudre, la matiere magnetique qui de jour en jour y passoit avec plus de facilité, s'est enfin trouvée assez abondante dans ses pores pour pouvoir en sortant surmonter la resistance de l'air environnant, & former autour de cette barre un tourbillon.

J'ai dit que la chaleur du Soleil n'avoit enlevé que la plus grande partie des acides de cette barre roüillée. En effet, on voit encore dans le morceau que j'en ai des vestiges de roüille, & je sçai qu'il y a d'autres morceaux de cette même barre qui sont bien plus roüillés. Ce qui me fait croire que si elle eût pû resister plus long-tems en situation, le Soleil auroit achevé ce qu'il avoit commencé ; & il l'auroit si bien déroüillée qu'elle attireroit infiniment davantage qu'elle ne fait. La maniere dont cette espece d'Aimant extraordinaire s'est produit, se rapporte parfaitement avec celle dont nous avons jugé que l'Aimant ordinaire se formoit dans la terre ; ce qui nous donne un grand préjugé en faveur de notre hypothese sur la formation de la matiere la plus propre à faire de l'Aimant. Cependant comme cette matiere merite d'être examinée avec toute l'attention possible, je vais encore faire sur le même sujet plusieurs experiences nouvelles, dont je rendrai compte ensuite à la Compagnie.

SUPPLEMENT
AU MEMOIRE
SUR LA VOIX ET SUR LES TONS.

PAR M. DODART.

PREMIERE PARTIE.

1706. 24 Avril.

JE lûs dans l'Aſſemblée publique du 13 Novembre de 1700, un Memoire ſur la voix de l'homme & ſur les differens tons de la voix. Ce Memoire fait partie de l'Hiſtoire de l'Academie de la même année qu'on a donnée au Public. Depuis ce tems-là il m'eſt venu dans l'eſprit de ſuppléer à ce Memoire pluſieurs choſes qui m'ont parû importantes, parce qu'elles vont à éclaircir, à étendre & à confirmer la verité Phyſique, & même à donner à la Theologie naturelle pluſieurs nouvelles preuves de l'inimitable mechanique du Createur en ce qui regarde les tons de la voix. Tout cela compoſe XIII ou XIV Articles. Je ne lirai dans cette Aſſemblée que les 3 premiers, & j'en demeurerai là pour ne pas fatiguer l'Auditoire par une trop longue attention. On pourra voir dans la ſuite de ce Memoire l'utilité de cette theorie pour la Muſique pratique, & même pour la Medecine, en ce qui regarde les exercices de la voix par rapport à la voix même & à la liberté de la reſpiration. Les anciens Medecins Grecs & Latins ont fait un très-grand uſage de ces exercices pour la conſervation & pour le rétabliſſement de la ſanté, pour l'augmentation de la force des parties de la reſpiration, & pour la cure même de quelques maladies.

C'étoit une aſſemblée publique, où les Memoires ſont bornés à demi-heure.

ARTICLE I.

ARTICLE I.

Quelle est la cause de la difference de la voix Pleine & de la voix de Fausset.

J'ay long-tems cherché d'où peut dépendre la differenrence que l'on trouve entre le Son, le Ton, & la force de la voix Pleine & celui de la Fausse voix vulgairement nommée *Fausset.* Cette difference consiste en ce que le Ton & le Son du Fausset est autre que celui de la voix Pleine, & que la voix Pleine a plus de force que le Fausset. Il y a donc 3 differences entre ces 2 voix, le Son, le Ton & la Force. Cette difference m'a paru d'autant plus considerable, sur tout en ce qui regarde le Ton, que c'est une merveille naturelle ajoûtée à toutes les autres qui ont été exposées & expliquées dans le Memoire sur les Tons. Car c'est une voix étrangere entée sur la voix naturelle, pour en multiplier l'étenduë au-delà des bornes naturelles de la voix; de sorte qu'il s'ensuit delà un nouveau pied de multiplication beaucoup plus merveilleux que celui que j'ay exposé dans le premier Memoire, quoique celui-là allât à beaucoup plus de 9000 parties proportionnelles dans un intervalle de moins d'une ligne. Cette difference de voix m'a donc paru très-digne de consideration en Physique & par rapport à la Theologie naturelle, comme il sera dit cy-après, & surtout en ce qui regarde le Ton. Or voici ce qui me paroît de plus raisonnable dans tout ce que j'ay pensé sur ce sujet. Toute voix de Fausset commence après le Ton où finit, en montant, l'étenduë naturelle de la voix Pleine de la même personne. Cette Fausse voix n'ajoûte ordinairement à l'étenduë de la voix naturelle & pleine, qu'un, deux ou trois Tons au plus, & cette voix a ordinairement quelque chose de forcé. Mais il y a des Faussets d'une grande étenduë & d'un Son fort agreable. Tel étoit celui d'un Chantre fameux nommé le Gros, que j'ay plusieurs fois oüi avec admiration durant ma jeunesse. Sa voix naturelle alloit jusqu'au plus bas de

Le mot *Ton* signifie dans ce Memoire tantôt un intervalle Musical entre un son & un autre son, tantôt une difference entre un son & un autre son plus grave, ou plus aigu, quelque intervalle qu'il y ait de l'un à l'autre. Le sens du discours en déterminera aisément la signification.

la haute taille, & son Fausset montoit aussi haut que le second dessus. C'etoit donc un second dessus enté sur une haute taille, & partout d'un Son très-agréable; de sorte que quand ce Musicien chantoit de toute l'étenduë de ces trois parties, on auroit dit que c'étoit une haute taille d'intelligence avec une haute contre & un second dessus, pour se succeder les uns aux autres dans l'execution d'un seul chant de l'étenduë de ces 3 parties. Quoique sa voix fut belle partout, on s'appercevoit de la difference de ces deux voix. Il avoit une octave d'étenduë de cette fausse voix. J'en connois un d'une plus grande étenduë. Il a douze tons, il en sera parlé cy-après.

Voici d'où je crois que cette espece de voix dépend. Il a été dit dans le Memoire sur la voix, que la voix résonne dans un double canal exterieur, la bouche qui fait le canal inferieur, & le nez que j'appelle canal superieur. Il a de plus été dit & prouvé dans ce Memoire, que ce qu'il y a de plus agreable dans le raisonnement de la voix vient du canal superieur, c'est-à-dire du nez, & que le résonnement de la bouche seule est très-desagreable, s'il n'est accompagné du résonnement des narines. Cela supposé prouvé, je dis que la voix qui résonne également dans l'un & l'autre canal exterieur, est la voix Pleine: celle qui résonne plus dans le canal superieur & moins dans le canal inferieur, est la voix de Fausset. En voici la raison.

Le Fausset ne commence ordinairement qu'au dessus de l'étenduë naturelle de la voix pleine dans un âge fait. C'est donc une voix forcée au-delà de son étenduë naturelle. Or tous ces Tons forcez s'exécutent presqu'en tous ceux qui ont cette Fausse voix, la tête haussée & même renversée en arriere, pour donner plus de jeu aux muscles suspenseurs du larynx, qui s'éleve alors inévitablement de plus en plus pour accourcir le double canal exterieur, selon les principes posez dans le Memoire sur la voix. D'où il s'ensuit qu'en cet état le Son de la voix jetté par la glotte étrecie outre mesure, & approchée du canal superieur, enfile plus naturellement ce canal que l'inferieur, parce-

que le superieur en cette attitude & par cette approche se trouve moins écarté qu'auparavant de la ligne du courant de l'air vocal. Ce courant porte donc presque tout le Son de la voix au canal superieur. Voilà pour le Son de cette espece de voix. Voici pour la diminution de la force.

Tout Fausset est une voix forcée au-dessus de son Ton naturel; de sorte que c'est l'effet de la glotte d'un homme fait, réduite aux dimensions de la glotte d'un enfant de 10 à 12 ans. Or la difference de ces deux âges à l'égard de la glotte, n'est pas seulement la difference du petit diametre; c'est encore & beaucoup plus la difference du grand diametre. Ces deux diametres sont toûjours beaucoup plus grands dans un homme fait, qu'ils n'étoient dans le même homme quand il étoit encore enfant. Cela étant, lorsque cet homme fait après avoir müé dans l'âge de puberté, veut rappeller les Tons qu'il a perdus pour l'accroissement de sa glotte, il faut ou qu'il lui rende ses dimensions en longueur & largeur, ou qu'il supplée à la longueur qui est alors inévitablement & invariablement augmentée par une plus grande diminution de la largeur. Il ne peut accourcir sa glotte, car les points de concourts des deux levres tant en avant qu'en arriere sont fixes. Cette dimension est donc invariable. Il faut donc qu'il supplée à cette augmentation invariable de dimension par serrer sa glotte pour les Tons du dessus, plus qu'il ne faisoit étant enfant pour produire les mêmes Tons. Car chaque Ton dépend de la quantité & de la vîtesse de l'air sonnant, comme il sera dit & prouvé dans la seconde Partie de ce Supplément.

De tout cela s'ensuivent toutes les proprietez qui distinguent le Fausset de la voix Pleine. La difference du Ton résulte du seul fait; car ce fait consiste à dire qu'il n'y a de voix de Fausset qu'au dessus de l'étenduë naturelle de la voix en haussant. Si on demande pourquoi il y a une fausse voix au-dessus de cette étenduë en haussant, & jamais au-dessous en descendant; il n'y a qu'à répondre que c'est parcequ'une glotte dilatée outre mesure n'est plus en état

de jetter le Son de voix, & n'eſt plus en état que de dégenerer en une eſpeee de ralement. La difference du Son eſt l'effet de l'inégalité du partage entre les deux canaux : la foibleſſe du Fauſſet en comparaiſon de la voix Pleine, vient de l'exceſſive diminution du petit diametre de la glotte, qui en cet état ne peut plus jetter qu'une lame d'air très-mince. Il faut pourtant avoüer qu'il y a au moins une exception à faire dans la theorie de cette difference de la voix naturelle & du Fauſſet. Car dans le Fauſſet extraordinaire que j'ay annoncé cy-deſſus de l'étenduë de douze Tons, les 3 plus bas concourent avec les 3 plus hauts de la voix Pleine. Mais ces 3 Tons ne ſont voix de Fauſſet que par le ſeul affoibliſſement du Son naturel ménagé. Ce n'eſt donc qu'un Fauſſet apparent dans les Tons les plus bas. Mais dans les plus hauts dont le dernier eſt le *b*, *fa*, d'enhaut (c'eſt-à-dire la pénultiéme marche du clavier) c'eſt un vrai Fauſſet, & le Son de cette voix dans ces Tons eſt ſi éclatant qu'il peut ſoûtenir la partie de deſſus contre toutes les baſſes d'un grand chœur de Muſique. C'eſt pourtant dans ce Ton & dans plus d'une octave entiere au-deſſous du vrai Fauſſet, & cependant ce Ton ſi élevé qu'à peine les deſſus les plus naturels peuvent y atteindre en haut, ſe produit ſans hauſſer ni renverſer la tête. Tout cela ſemble fort oppoſé à la theorie cy-deſſus. Il eſt vrai que ces deux circonſtances, l'une de l'attitude du Chantre, l'autre de la force du Son, ſont ſi rares dans les Fauſſets, qu'à peine en trouveroit-on un autre exemple en tout un ſiecle. Mais quand il n'y auroit jamais eu qu'un exemple, & quand on ſeroit aſſuré qu'il n'y en aura jamais d'autre, ce ſeul exemple ſuffiroit pour renverſer toute la theorie cy-deſſus. Il faut donc voir ſi on peut concilier enſemble la theorie & l'exemple. Ces deux circonſtances bien examinées n'ont rien d'incompatible avec la theorie de cette difference de voix, ni pour la force du Son, ni pour l'attitude du Chantre, dans la production de l'eſpece du Son dans ces Tons ſi élevés. Car pour l'attitude, le Muſicien dont il s'agit ayant bien

voulu entonner ces Tons du haut dessus en ma presence à gorge nuë, je me suis apperçû que le larynx montoit plus haut qu'à l'ordinaire sans y employer l'attitude ordinaire en renversant la tête, & il s'élevoit si haut sans cette attitude, qu'il imprimoit une fosse au-dessous de la gorge du Chantre, comme pour s'approcher du canal superieur, suppléant au défaut de l'attitude par cette approche extraordinaire causée par la force des muscles élevateurs, & faisant par cet effet ce que les autres Chantres de cette espece empruntent des muscles flechisseurs de la tête en arriere pour approcher la glotte du canal superieur. Voilà pour l'attitude de ce Chantre à l'égard des Tons de sa Fausse voix.

Quant à la force si extraordinaire de la même voix dans les Tons d'*a*, *mi*, *la* & *b*, *fa*, *si* du haut du clavier, si les principes de la voix sont bien posés dans le Memoire du 13 Novembre 1700, la force vient de l'ouverture extraordinaire de la glotte dans cette espece de Fausset, & le Ton de l'extraordinaire vîtesse de l'air poussé pour la production de ces Tons par cette ouverture, & de l'extraordinaire contention des levres de la glotte pour contrebander les dilateurs du larynx, & produire les vibrations proportionnées à ces Tons. Et c'est en effet ce qui arrive jusqu'à un certain point dans les flutes ordinaires, mais surtout dans la flute Allemande, qui hausse de Ton sur chaque trou suivant la force dont on pousse le vent; de sorte que du foible au fort on peut monter de Ton de tout l'intervalle d'une octave & des autres accords qu'elle contient, & cela, par la même ouverture & sur le même trou.

Cette explication d'un cas si singulier est d'autant plus probable, que les Tons dont il s'agit sont dans le sujet en question l'effet d'un très-grand effort dont on s'apperçoit à la vûë, quoique l'oreille ne s'en apperçoive pas dans le concert. Mais ce n'est pas la seule merveille Physique que j'ay observée en cette voix, dont j'auray encore occasion de parler dans la seconde Partie de ce Supplément. Voilà

ce que j'avois à dire pour expliquer les cause de la premiere difference de voix distinguée en voix Pleine ou Naturelle & Fausse voix, vulgairement nommée *Fausset*.

Après avoir expliqué la Fausse voix, il faut tâcher d'expliquer la voix Fausse. C'est-à-dire,

ARTICLE II.

Quelle est la cause de la difference de la voix Juste & de la voix Fausse?

Il y a bien de la difference entre *Fausse voix* & *voix Fausse*. La seule connoissance de la langue suffiroit pour faire cette distinction: mais il n'y a pas d'inconvenient d'avertir icy que la voix Fausse est celle qui n'entonne presque jamais précisément au Ton qu'elle devroit par rapport à celui qui précede, & à ceux qui suivent dans l'execution de quelque chant que ce soit.

Chacun sçait que la voix dépend de l'oreille, ou plûtôt du sens de l'ouïe, non comme d'une cause principale; mais comme d'une cause sans laquelle les causes principales & prochaines de la voix sont privées de leur effet. On sçait encore que la justesse de la voix dépend de la justesse de l'oreille. Mais cependant il faut avoüer aussi que l'oreille la plus juste, mal servie par des organes mal constitués pour la justesse de la voix, n'en tirera que des Tons faux. Je connois un homme de consideration, fort sçavant en Musique, qui compose bien, & qui fait bien executer sa composition: mais il executeroit fort mal sa partie s'il vouloit s'en mêler. C'est de la cause de cette espece de voix Fausse par le défaut des organes de la voix qu'il s'agit icy, & non de celle qui n'est fausse que par le vice de l'organe de l'ouïe.

La cause de la voix Fausse par le vice de son propre organe, doit résulter surtout du principe de la voix de l'homme, tel qu'il a été posé dans le Memoire sur la voix. Car si les deux levres de la glotte sont également capables de se bander également; si les esprits s'y distribuent éga-

lement, la voix doit être juste ; mais s'il y a dans les levres de la glotte chacune en particulier ou entr'elles de l'inégalité en quelques-unes de ces circonstances ou en toutes, la voix doit être fausse à proportion, comme le Son d'une corde de Luth est faux quand la corde est fausse, c'est à-dire inégal à elle-même en quelques-unes de ces parties, ou mal accordée avec celle du même rang à l'unisson. Ce n'est pas que les deux levres soient capables de sonner par elles-mêmes ; mais elles sont capables de fremir, & ce fremissement est la cause formelle du Son, & le Son ne sçauroit être juste qu'autant que le fremissement est égal à lui-même en chaque levre & entre les deux levres de la glotte. Or l'égalité du fremissement dépend de l'uniformité de chaque levre en toute son étenduë, & de toutes deux entr'elles à l'égard des circonstances exprimées cy-dessus, c'est-à-dire, tension, diametre, distribution d'esprits, &c.

ARTICLE III.

Des causes de la difference entre la voix de la Parole & la voix du Chant.

La voix de la Parole est tres-differente de celle du Chant dans la même personne. En voici les preuves.

On voit souvent des personnes qui ont la voix belle pour le Chant, & qui ne l'ont pas agreable pour la Parole. Toute la Cour en a vû un exemple surprenant en la personne d'un Seigneur decedé depuis environ 4 ans : & réciproquement on connoît des voix argreables pour la Parole, qui n'ont pas un Son agreable pour le Chant. Il faut donc qu'au moins dans ces personnes l'ouverture de la glotte soit autrement constituée dans la Parole que dans le Chant.

On distingue les personnes sans les voir au seul Son de la voix de la Parole. Les brutes domestiques ne s'y méprennent pas. On peut aussi distinguer les personnes au seul Son de leur voix de Chant, mais avec beaucoup plus de difficulté. Il y a donc au moins beaucoup d'apparence

qu'il y a une difference ſenſible entre le Son de la voix de la Parole & celui de la voix de Chant, même entonné ſur le Ton de la Parole. La queſtion eſt de trouver la cauſe de la difference de ces deux voix, & de dire en quoi elle conſiſte.

Les longues tenuës ſur une même note dans la Muſique peuvent ſervir à cette découverte. C'eſt à cette occaſion que je me ſuis apperçû dans la voix de Chant d'une certaine ondulation qui n'eſt pas dans la voix de la Parole. Cette ondulation eſt aſſez ſemblable aux vibrations qu'on remarqueroit dans un poids ſuſpendu au milieu d'une corde bandée horizontalement, ſi aïant tiré ce poids en embas ou en enhaut, on l'abandonnoit au reſſort de cette corde bandée. Car alors ce poids auroit un branle haut & bas, plus ou moins preſſé ſelon que la corde ſeroit plus courte ou plus longue, plus ou moins bandée. Tout le monde ne s'apperçoit pas de cette eſpece de branle flottant dans les belles voix, qui ſuppoſent un degré de force ſuffiſant pour donner lieu à la cauſe de la difference du Son de la voix de Chant & de la voix de Parole par une ondulation moderée & ſoûtenuë: mais tout le monde s'en apperçoit dans les voix de Chant foibles & naturellement tremblantes. On voit bien que je ne parle pas du tremblement des cadences, puiſque ces tremblemens ſont compoſez de l'intervalle d'un Ton ou d'un demi Ton, ce qui ne ſe trouve pas dans l'ondulation dont je parle.

Je dis donc que ces voix naturellement tremblantes dans le Chant, ne ſont pas toûjours tremblantes pour la Parole. En voici la raiſon. Tout tremblement involontaire vient de foibleſſe. Il doit donc paroître dans tous les mouvemens volontaires qui exigent plus de force qu'il n'y en a dans l'organe du mouvement, & le tremblement ne doit point paroître dans les mouvemens qui ſont proportionnez à la force. La voix de la parole ne tremble pas ordinairement dans ceux qui ont la voix de Chant tremblante. Il y a donc apparence que la voix de Chant exige plus de force que la voix de la Parole, même dans le Ton de

de la Parole. Ce qui est tremblement par foiblesse involontaire dans la voix de Chant naturellement tremblante, cela même est cette espece de flottement volontaire & soûtenu, dans le Son de la voix de Chant en ceux qui ont la voix agreable. Mais dans le Chant tremblant c'est une chûte pesante & frequente, & dans le Chant agreable c'est comme une espece de vol, aisé, temperé, & soûtenu. D'où je me persuade qu'il s'ensuit que la difference du Son de la voix de la Parole & de la voix de Chant dans ceux-cy, vient de la difference qu'il y a entre le larynx assis sur ses attaches en repos pour la voix de Parole, & le larynx suspendu sur ses attaches en action, par une espece de balancement volontaire qui s'ensuit, sans qu'on y fasse reflexion de la seule volonté de passer de la voix de la Parole à celle du Chant sur le ton de la Parole. J'ajoûte sur le Ton de la Parole, afin qu'on ait pas lieu d'attribuer au changement de ton, ce qui n'est que l'effet du changement de son.

J'ay dit que cette difference consiste en ce que la voix de Chant s'execute par la glotte dans un larynx suspendu & en mouvement de haut en bas & de bas en haut sur ses muscles suspenseurs, & la voix de la Parole dans un larynx assis sur les mêmes attaches en repos. La voix, soit de la Parole, soit du Chant, est toute entiere de la glotte dans le Son & dans le Ton : mais l'ondulation qui en fait la difference n'est ni du Son, ni du Ton, ni de la glotte, mais du larynx entier. Cette ondulation paroît dans le son, mais comme circonstance du Son, & non comme partie du son. En un mot elle n'est dans le son, que parceque la partie sonante, c'est à dire la glotte, est portée dans un canal flottant, c'est à dire dans le larynx. On voit quelque chose de semblable dans le tremblant de l'Orgue, qui ne change rien au Ton de chaque tuyau, & qui ne peut avoir été inventé que pour imiter la voix du Chant par cette circonstance ; ce qu'il ne fait pourtant que fort imparfaitement. La glotte ne fait donc rien à cette circonstance du son ; car tous les mouvemens de la glotte

ſont de ſerrer plus ou moins : or ces mouvemens feroient differens Tons. Les doigts de la main gauche des joüeurs de Luth, de Theorbe & de Viole pratiquent quelque choſe de ſemblable à ces vibrations du larynx haut & bas toutes les fois qu'ils veulent embellir leur jeu en imitant la voix. Tous ces Inſtrumens ont leur manche diviſé par des touches. Or quand le joüeur d'inſtrument veut imiter la voix, il ſoûtient de la main gauche le ſon de la chorde frapée ou pincée de la droite. Pour cet effet il agite haut & bas entre deux touches le doigt de la gauche qui preſſe ſur le manche la corde pincée, & il ſoûtient par ce mouvement alternatif un Son continue, ondoïant ſur le Ton de cet entre-touche. Ce Son eſt fort àgreable, & imite fort bien un port de voix. Or un des agrémens de ce Son eſt l'ondulation, qui ne vient que de ce que le doigt de la main gauche, agité haut & bas, preſſe de moins en moins la corde contre la touche, quand il gliſſe de bas en haut, & la preſſe de plus en plus quand il gliſſe de haut en bas ; d'où il arrive que la touche donnant le ton, il demeure le même quant au jugement du ſens, quoiqu'il ne ſoit pas le même mathematiquement parlant : mais paroiſſant le même, il eſt ſenſiblement varié, & par-là rendu plus agreable.

Mais d'où vient la difference qui ſe trouve entre ces deux voix, en ce qui regarde non-ſeulement cette circonſtance du ſon, mais le ſon même dans ceux en qui la voix de la Parole n'eſt pas agreable, & en qui la voix de Chant eſt belle ? C'eſt une autre queſtion. Mais comme cette queſtion ſuit naturellement la premiere inſtance, par laquelle j'ay inſinué que ces deux voix ſont differentes dans la même perſonne ; je veux bien faire plus que je ne m'étois propoſé, & tâcher de reſoudre encore cette queſtion. La ſolution dépend du principe d'une autre circonſtance de la voix de Chant ; car elle eſt non-ſeulement ondoïante, ce que la voix de la Parole n'eſt pas, mais elle eſt encore plus ſonante que celle de la Parole. En voici la raiſon, ſi je ne me trompe.

Il eſt ordinaire lorſque pluſieurs mouvemens concourent à la même action, quoique differemment, que dès que l'action eſt commandée tous les mouvemens concurrents s'executent, & qu'ils s'executent avec plus du force quand l'action eſt plus difficile & demande plus d'attention. Telle eſt l'action du Chant à l'égard de celle de la Parole. Ainſi dès que les muſcles ſuſpenſeurs du larynx ſont, pour ainſi dire, avertis d'entrer en action par le Chant, les dilateurs du larynx entrent dans celle qui leur convient pour contre-bander la glotte, les dilatateurs de la glotte entrent en mouvement pour la dilater, & les cordons tendineux de la glotte avertis par le ſeul contraſte de leur état naturel, commencent à ſe bander pour ſoûtenir le ton de la Parole entonné en Chant. De tout cela reſulte un ſon plus net que celui de la Parole. Car la voix de la Parole dans les Tons qui lui conviennent eſt plus négligée que celle du Chant; & quoique le Ton ſoit ſuppoſé le même, & par conſequent l'ouverture la même pour les dimenſions, les parties qui lui donnent ces dimenſions ne ſont plus au même état, étant les unes contre les autres dans un contraſte plus marqué. Voilà pour ceux en qui la voix de la Parole eſt deſagreable, & qui ne laiſſent pas de chanter agreablement. Pour les autres il n'eſt pas difficile d'imaginer qu'un contraſte immoderé peut produire un Son deſagreale, comme j'ay obſervé en quelques perſonnes dont la voix du Chant prend un ſon de canard ou de cornet, ou devient rude ou tremblante, quoiqu'elle ſoit plus agreable dans la converſation.

Tout cela fait voir une action plus marquée dans la voix de Chant, que dans la voix de la Parole. Et cela ſe confirme en ce qu'une longue converſation hauſſe le Ton de la voix à meſure que la converſation s'anime, au lieu qu'un Chant ſoûtenu long-tems ſur le même ton baiſſe preſque inévitablement, comme on voit dans tous les Chœurs de plein Chant, qui ne ſont ſoûtenus d'aucun inſtrument de Muſique; car on eſt obligé pour cette rai-

ſon à remonter le ton à la fin des longs Pſeaumes; cette précaution étant neceſſaire pour empêcher que le ton baiſſant de plus en plus, la plûpart du Chœur ne fût obligée ou de ſe taire avant la fin de l'Office, ou de prendre l'octave en haut dans les tons les plus bas de chaque verſet. Or tout cela ne vient que de la grande action qui accompagne le Chant dans toutes les circonſtances qui le rendent different de la Parole. Et comme cette action ſi marquée & ſi compoſée a été excitée à l'occaſion du mouvement imperceptible de la glotte pour entonner, qui a donné le branle à tous les autres mouvemens beaucoup plus conſiderables: tous ces mouvemens pris enſemble laſſant toute la region vocale, le relâchement des autres parties donne à ſon tour occaſion à la glotte de ſe relâcher comme les autres parties, quoique ce ſoit celle qui travaille le moins dans le plein Chant; & c'eſt de ce relâchement que vient le baiſſement du ton.

Voilà pour le Son de ces deux differentes ſortes de voix, & ſur la cauſe probable de leurs differences.

OBSERVATIONS

DE LA COMETE

Faites depuis le 18 *Mars qu'on a commencé de la voir, juſqu'au* 16 *d'Avril qu'elle a ceſſé de paroître.*

PAR Mrs CASSINI ET MARALDI.

1706. 28 Avril. LE 18 de Mars à minuit par les alignemens que nous fimes des étoiles de Bootes & de la Couronne à l'égard de la Comete, nous déterminâmes ſon aſcenſion droite de 237° 20′, & ſa declinaiſon ſeptentrionale de 36° 0′.

Le 19 Mars le Ciel fut couvert.

Le 20 Mars à 11^h 38′ nous déterminâmes la difference d'aſcenſion droite entre l'épaule orientale de Bootes &

la Comete de 20° 23′, dont la Comete étoit plus orientale, & la difference de declinaison de la Comete à l'égard de cette étoile de 7′, dont la Comete étoit plus meridionale ; ce qui donne l'ascension droite de la Comete de 228° 19′, & sa declinaison de 34° 26′, ayant fait en deux jours 8 degrés d'un grand cercle depuis la premiere observation.

Le 24 Mars nous déterminâmes la situation de la Comete par rapport aux étoiles voisines de Bootes : son ascension droite étoit de 211 degrés ½ & sa déclinaison de 30 degrés & demi. Ayant parcouru en 6 jours 22 degrés & demi d'un grand cercle depuis la premiere observation du 18.

Depuis le 24 de Mars nous ne pûmes voir la Comete que le 31 du même mois, à cause des nuages qui couvrirent le Ciel une partie de ce tems, & à cause du clair de la Lune qui ne nous permit pas de la voir le 28, le 29 & le 30 Mars, quoique le Ciel fut serein, & que nous l'ayons cherchée avec beaucoup de soin avec la Lunette à l'endroit du Ciel où elle se devoit trouver.

Le 31 Mars avant le lever de la Lune nous vîmes la Comete qui étoit assez claire : elle étoit entre la constellation de la Vierge & la chevelure de Berenice, proche de deux étoiles qui ne sont point marquées dans les Catalogues, ni dans les Cartes. A 8^h 40′ nous déterminâmes la situation de la Comete par rapport à la plus orientale de ces étoiles qui est de la quatriéme grandeur. L'ascension droite de la Comete étoit d'un degré & 38 minutes plus petite que celle de l'étoile, la Comete étoit plus septentrionale en declinaison de 15′. Suivant nos observations l'ascension droite de l'étoile est 193° 57′, & sa declinaison septentrionale est 19° 8′ ; donc l'ascension droite de la Comete est 192° 29′, & sa declinaison est 19° 23′, s'étant avancée sur sa route depuis la derniere fois que nous l'observâmes de 21 degrés.

Le premier Avril à 8^h 18′ la Comete étoit dans le parallelle d'une étoile de la sixiéme grandeur, qui est au-

deſſus du bras de la Vierge, & qui n'eſt point marquée dans les Catalogues, ni dans les Cartes : l'aſcenſion droite de l'étoile eſt de 188° 1′, ſa declinaiſon ſeptentrionale eſt de 18° 14′. L'aſcenſion droite de la Comete étoit de 2^d 17′ plus grande que celle de l'étoile, donc celle de la Comete ſera de 190° 18′, & ſa declinaiſon 18° 14′, la même que celle de l'étoile. Le mouvement que la Comete avoit fait ſur ſa route depuis le 18 Mars juſqu'au ſoir du premier Avril fut de 46 degrés d'un grand cercle.

Le 2 Avril à 11^h 46′ par le paſſage de la Comete par le Meridien & par ſa hauteur meridienne, on détermina ſon aſcenſion droite de 188° 14′, & ſa déclinaiſon de 16° 50′. Le mouvement journalier de la Comete étoit alors de 2 degrés & demi. Ce jour-là la Comete étant proche de deux petites étoiles, nous obſervâmes proche du Meridien & à une diſtance de 50 degrés du Meridien la difference de l'aſcenſion droite & de declinaiſon entre la Comete & les étoiles fixes pour tâcher de connoître ſa parallaxe, qui ne nous parut point ſenſible.

Le 3 d'Avril la Comete étant proche du parallele de deux petites étoiles, qui paroiſſent ſe toucher l'une avec l'autre par la Lunete de 10 pieds, nous fîmes comme le jour précedent pluſieurs obſervations pour la parallaxe de la Comete qui ne fut pas non-plus ſenſible.

A 11^h 36′ par le paſſage de la Comete par le Meridien & par ſa hauteur meridienne, on détermina ſon aſcenſion droite de 186° 38′, & ſa declinaiſon de 15° 46′. Le mouvement que la Comete a fait ſur ſa route depuis le 18 Mars juſqu'au 3 Avril eſt de 50 degrés.

Le 4 Avril à 11^h 26′ au paſſage de la Comete par le Meridien, l'on détermina ſon aſcenſion droite de 185° 3′, avec une declinaiſon ſeptentrionale de 14 degrés 44 minutes.

Le 5 Avril à 11^h 21′ par les obſervations faites au Meridien, l'aſcenſion droite de la Comete étoit de 183° 38′, & ſa déclinaiſon ſeptentrionale de 13° 46′, ayant fait ſur ſa route 53 degrés depuis le 18 Mars.

Le 6 Avril à 11h 10′ l'ascension droite de la Comete fut de 182 degrés, & sa declinaison septentrionale 12° 30′. Le Ciel qui n'étoit pas bien clair ne nous permît pas de faire ces observations avec beaucoup d'exactitude.

Le 7 Avril la Comete se trouva proche du parallele d'une étoile de la sixiéme grandeur, située sur la tête de la Vierge, qui n'est point marquée dans les Cartes : cette étoile vûë avec la Lunete est composée de plusieurs, comme il arrive à un tres-grand nombre d'autres étoiles. A 10h 0′ la difference d'ascension droite entre l'étoile la plus claire de celles cy & la Comete fut de 1° 46′, & la Comete plus septentrionale de 7′ que l'étoile. L'ascension droite de l'étoile est de 179° 40′, & sa declinaison 11° 56′. Donc l'ascension droite de la Comete étoit de 181° 26′, & sa declnaison 12° 3′.

Ce jour-là la Comete étoit éloignée sur sa route de la premiere observation de 56 degrés $\frac{1}{4}$.

Le 8 Avril à 9h nous comparâmes la Comete à une étoile de la sixiéme grandeur dans l'aîle de la Vierge, qui n'est point marquée dans les Cartes ni dans les Catalogues, & qui est aussi composée de plusieurs petites étoiles. La difference d'ascension droite entre la Comete & l'étoile principale étoit de 7° 34′ dont l'étoile étoit plus orientale : la Comete étant plus meridionale de 6′. L'ascension droite de l'étoile est 187° 54′, & sa declinaison de 11° 22′ ; d'où l'on trouve l'ascension droite de la Comete de 180° 20′, & sa declinaison de 11° 16′.

Le 7 Avril à 9h 46′ la difference d'ascension droite entre la Comete & l'étoile plus orientale de la Vierge marquée *o* par Bayer fut de 1° 46′, & la difference de declinaison fut de 4′ dont la Comete étoit plus meridionale. L'ascension droite de l'étoile est 137° 35′, & sa declinaison 10° 24′ ; donc l'ascension droite de la Comete étoit 179° 21′, & sa declinaison 10° 20′.

Le 10 Avril à 9h 46′ la Comete fut plus septentrionale de 16′ en declinaison que l'étoile la plus orientale des deux qui sont marquées *d* par Bayer dans le bras de la

Vierge. La difference d'ascension droite entre la même étoile & la Comete fut de 9° 17′ dont la Comete étoit plus occidentale. L'ascension droite de l'étoile est 187° 43′, & sa declinaison Septentrionale 9 19′; d'où l'on calcule l'ascension droite de la Comete de 178° 26′, & sa declinaison 9° 35′.

Le 11 Avril nous comparâmes la Comete avec l'autre étoile marquée *d* dans le bras de la Vierge. Leur difference d'ascension droite se trouva de 9° 10′, & leur difference de declinaison de 25′ dont la Comete étoit plus septentrionale. L'ascension droite de l'étoile est 186° 47′, & sa declinaison 8° 28′, dont l'ascension droite de la Comete est 177° 37′, & sa declinaison 8° 53.

Le 12 Avril à 9h 30′ la difference d'ascension droite entre l'étoile marquée π par Bayer dans la tête de la Vierge & la Comete, fut observée de 21′ dont l'ascension droite de la Comete étoit plus grande, & la difference de declinaison étoit de 6 minutes dont la Comete étoit plus meridionale. Ayant supposé l'ascension droite de l'étoile de 176 degrés 28′; & sa declinaison de 8° 18′, on trouve l'ascension droite de la Comete de 176° 49′, & sa declinaison de 8° 12′.

Le 13 Avril nous comparâmes la Comete à une étoile de la sixiéme grandeur, qui n'est point marquée sur les Cartes ni dans les Catalogues, & qui suivant nos observations est à 178° 45′ d'ascension droite, avec une declinaison septentrionale de 7° 29′. La difference d'ascension droite entre la Comete qui étoit plus occidentale & l'étoile, étoit de 2° 40′, & la difference de declinaison dont la Comete étoit plus septentrionale fut de 9′; dont l'ascension droite de la Comete est 176° 6′; sa declinaison 7° 38′, ayant parcouru sur sa route 63 degrés depuis la premiere observation que nous en fîmes le 18 Mars.

Nous vîmes la Comete le 14 & le 16 d'Avril avec la Lunete; mais nous ne pûmes déterminer qu'à peu près sa situation, à cause qu'elle étoit fort foible, & qu'il ne se rencontra point dans son parallele d'étoiles prochaines ausquelles

ausquelles on la pût comparer, comme nous avons fait dans la plûpart des autres observations. Le 16 elle nous parut environ un demi-degré plus septentrionale que l'étoile marquée β dans la tête de la Vierge, & éloignée en ascension droite d'un degré & demi de la même étoile.

Dans la suite nous n'avons pû voir la Comete, à cause qu'elle étoit fort petite & foible, & à cause de la Lune qui restoit le Soir sur l'horizon.

Tous ces lieux de la Comete tombent sur une ligne qui n'est differente d'une portion d'un grand cercle que dans les dernieres observations, qui font connoître qu'elle en decline un peu vers l'Orient.

L'endroit du Ciel où nous avons cessé de voir la Comete est éloigné de l'Ecliptique 3 degrés seulement.

Si l'on continuë le grand cercle sur lequel tombent la plûpart des observations, il coupera l'Ecliptique vers le 21 degré de la Vierge. Il est vrai que comme dans les dernieres observations la Comete declinoit un peu de ce grand cercle, sa trace continuée uniformément couperoit l'Ecliptique un peu plus vers l'Orient.

La route de la Comete de l'année 1580 coupa l'Ecliptique précisément dans le degré opposé, c'est-à-dire en 21 des Poissons, ainsi qu'il paroît par les observations de Mestlin. Le mouvement de nôtre Comete, qui du commencement étoit de quatre degrés par jour, a été toûjours en diminuant de sorte que les derniers jours que nous l'avons observée il étoit moindre d'un degré.

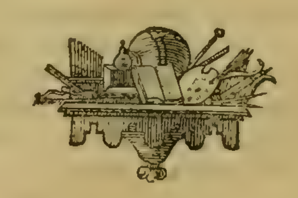
Cette Comete a été fort petite, même lorsqu'elle étoit plus proche de la terre, & que son mouvement étoit plus grand. A mesure que ce mouvement est devenu plus lent, la grandeur apparente de la Comete a aussi diminué.

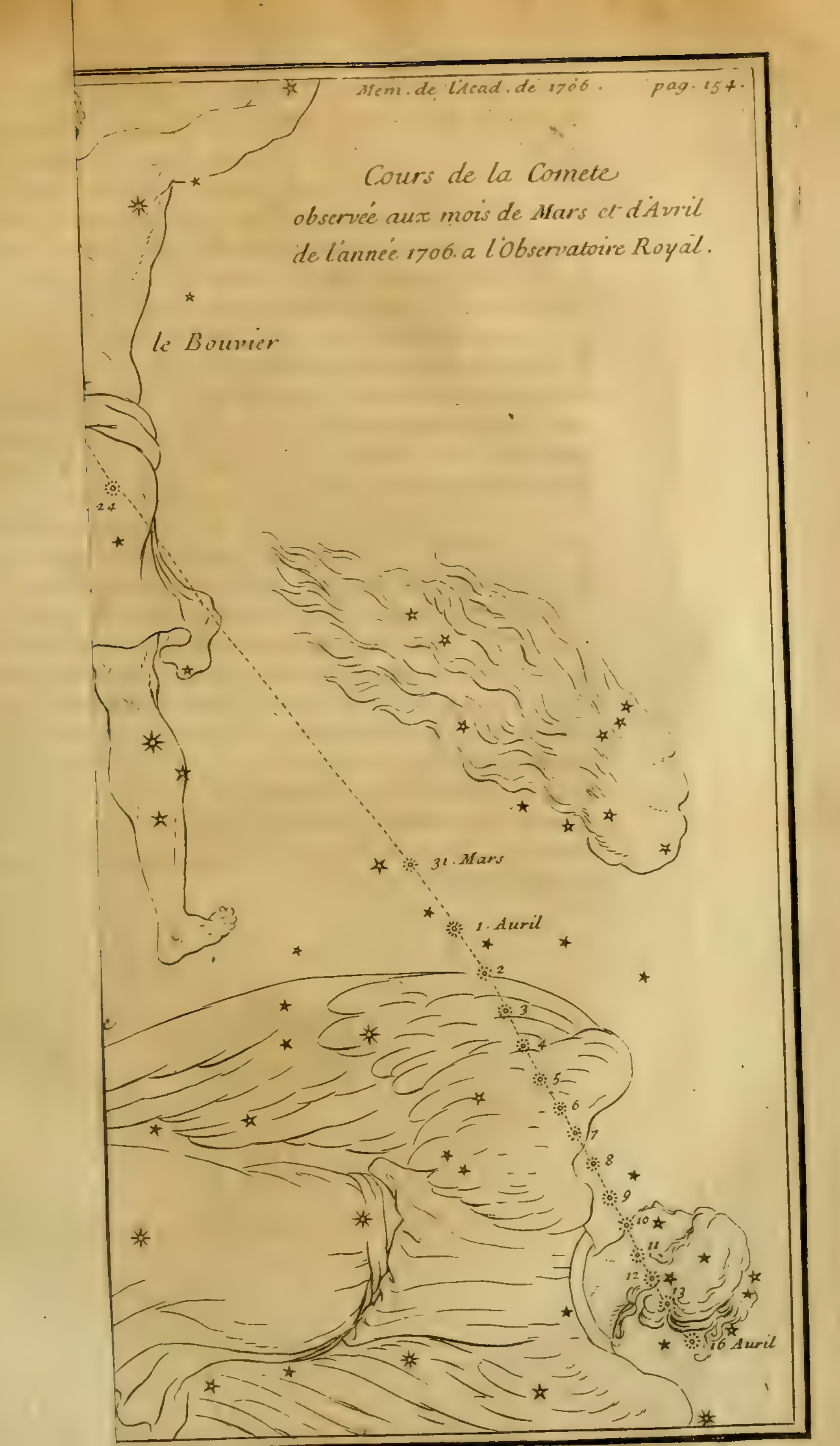
La Comete vûë avec des grandes Lunetes paroissoit mal terminée: elle étoit assez claire vers le milieu, mais plus obscure vers ses bords. On la voyoit beaucoup mieux & plus claire avec des grandes Lunetes qu'avec des petites.

Pour representer le mouvement de cette Comete par

la theorie, nous avons fuppposé, comme il a été déja rapporté dans le premier Memoire, qu'elle décrit par un mouvement égal une ligne un peu differente de la droite, sur laquelle elle parcourt $\frac{7}{100}$ de sa plus petite distance de la terre : mais pour representer avec plus d'exactitude toutes les observations, nous avons donné au Perigée, que nous prenons pour terme du mouvement de la Comete, un mouvement de 4 minutes par jour suivant le cours de la Comete. Par cette maniere nous representons tous les lieux observés à peu de minutes prés, sans une plus grande difference des observations, que celle qui se trouve souvent entre les meilleures Tables mordernes de la Lune comparées entr'elles, & avec les observations.

Nous n'avons rien à changer à l'inclinaison de la route de la Comete à l'Ecliptique, que nous avons rapportée du commencement à l'Academie ; quoique nous aïons été obligés d'avancer le nœud de la Comete de quelques degrés plus vers l'Orient, soit qu'on doive attribuer ce changement à un mouvement des nœuds analogue à celui des nœuds de la Lune, soit qu'on le doive attribuer à la grande difficulté qui se rencontre à déterminer les nœuds par les observations qui en sont le plus éloignées, & proche de la plus grande latitude, où étoit la Comete du commencement que nous l'avons apperçûë, & par les observations faites à peu de distance les unes des autres dans la plus grande latitude de la Comete.





Mem. de l'Acad. de 1706. pag. 154.
Cours de la Comete observée aux mois de Mars et d'Avril de l'année 1706. a l'Observatoire Royal.
le Bouvier
24
31. Mars
1. Auril
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
16 Auril


Cours de la Comete
de Mars et d'Avril
Royal
le Bouvier
Arcturus
la Vierge
Avril
10 Avril

OBSERVATION

De l'Eclipse de Lune du 28 Avril 1706 faite à l'Observatoire Royal.

PAR Mrs. CASSINI ET MARALDI.

LE Ciel qui a été couvert une partie de la nuit du 27 au 28 Avril, ne nous a pas permis d'observer le commencement de l'Eclipse, qui suivant le calcul devoit arriver 30 minutes aprés minuit, la Lune ne s'étant pas pû voir qu'à $1^h 30'$ au travers des nuages qui empêchoient de voir sa partie éclipsée. 1706. 5 May.

On l'a commencé de voir un peu plus distinctement à $1^h 35'$; mais les nuages qui passoient devant la Lune empêchoient de voir le terme de l'ombre bien distinct pour pouvoir mesurer la grandeur de l'Eclipse avec précision.

Nous avons observé en deux maniéres differentes cette Eclipse, l'une par le Micrometre posé au foïer de la Lunete de 8 pieds, l'autre par la Lunete posée sur la machine parallatique, en observant le passage des bords de la Lune & des cornes par les fils qui se croisent au foïer de la Lunete.

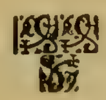
Les nuages qui passoient souvent devant la Lune, & l'ont aussi entierement couverte plusieurs fois differentes, ont empêché de marquer exactement les phases de l'Eclipse, & l'entrée & sortie des taches de l'ombre.

à 1^h	$34' \frac{1}{2}$	L'ombre éloignée de Grimaldi de la longueur de cette tache.		
1	38	En mesurant avec le Micrometre la partie claire de la Lune, nous trouvâmes sa partie éclipsée d'environ 6 doits; mais cette observation nous paroît un peu douteuse.		
1	45	La grandeur de l'Eclipse étoit de	5 doits	52'
1	47		5	48

à 1^h	53 $\frac{1}{2}$	La grandeur de l'Eclipse étoit de	5 doits	45
1	55	L'ombre à Promontorium acutum.		
1	55	L'Eclipse est de	5	40
1	57	L'ombre étoit fort proche de Dionysius.		
2	0	L'Eclipse est de	5	33
2	2 $\frac{1}{4}$	L'ombre étoit à peu prés dans la même situation à l'égard de Dionysius.		
2	4	La Lune éclipsée de	5	26
2	7	La Lune se couvre.		
2	11	L'ombre quitte Mare humorum.		
2	15	La Lune s'étant éclaircie l'Eclipse est de	5	envir.
2	20	La grandeur de l'Eclipse.	4	51
2	24	L'Eclipse est de	4	45
2	29	L'Eclipse est de	3	20
2	31	La Lune se couvre, & reste presque toûjours couverte jusqu'à 2^h 59' que l'Eclipse n'étoit plus que de 3 doits 34'.		
3	2 $\frac{1}{2}$	Fin de l'Eclipse.		

Par la Machine parallatique.

à 1^h	42' $\frac{1}{2}$		Grandeur de l'Eclipse.	4 doits	58'
1	48 $\frac{1}{2}$			5	12
1	58	13		5	10
2	4	40		5	7
2	24	30		3	49
3	3		Fin de l'Eclipse.		



OBSERVATION

De l'Eclipse de Lune du 28 Avril 1706 faite à l'Oservatoire.

PAR MRS. DE LA HIRE.

LE Ciel fut tout couvert, & il plut dans tout le commencement de cette Eclipse; mais vers le milieu la Lune commença à paroître entre les nuages. Nous n'en pûmes faire que les observations suivantes avec le Micrometre appliqué à la Lunete de 7 piés. 1706. 5 M·y.

à 1^h 43′ 24″ La Lune étoit éclipsée de	5 doits	40 minutes.
46 16	5	40
2 0 44	5	17
8 12	5	19
20 38	4	34
41 46	3	15

3 4 28 Fin de l'Eclipse, mais un peu douteuse, à cause qu'on ne peut pas bien juger de l'ombre veritable qui ne paroît plus sur le disque de la Lune.

L'ombre passa un peu au-delà du *Promontorium acutum*, & il nous sembla qu'il fut tout caché à 1^h 51′ 30″; mais il étoit fort difficile d'en bien juger, à cause que l'ombre paroissoit aller fort lentement en cet endroit.

Nous ne pûmes pas observer les Emersions des Taches ni même de Tycho, les nuages qui passoient continuellement sur le corps de la Lune ne le permettant pas.

L'ombre étoit fort noire, & lorsque le Ciel étoit le plus serein, on voyoit assez difficilement le bord du disque qui étoit obscurci. Elle étoit d'ailleurs assez nette & tranchée.

Nous observâmes aussi le diametre de la Lune de 29′ 37″ à la hauteur de 15° 40′.

Nous avions fait le jour précedent quelques observa-

tions de la Lune, comme son passage par le meridien, pour le comparer à celui qui précedoit l'Eclipse ; mais on ne pût pas à cause du mauvais tems.

Il faut remarquer que dans les Eclipses de Lune, lorsque l'ombre est fort noire, ce qui arrive assez rarement, il est difficile de déterminer l'Emersion des Taches, qu'on ne peut pas avoir avant qu'elles soient sorties ; car on ne distingue pas facilement les Taches dans l'ombre.

OBSERVATIONS SUR LE FER
AU VERRE ARDENT
PAR M. HOMBERG.

1706. 8 May. LE Fer forgé étant exposé au verre ardent en petits morceaux, comme sont les pointes de clous de Marêchal ou des broquettes de Tapissier, s'y fond assez vîte, mais d'une maniere differente des autres metaux. Tous les metaux quand ils commencent à fondre, c'est toute la masse ensemble qui se liquefie peu à peu, comme l'on voit le plomb se fondre ou l'étain au feu ordinaire : mais le fer se fond au Soleil tout autrement. Voici comment.

D'abord il paroît sur la superficie du Fer une matiere fonduë comme de la poix noire, qui se distingue fort bien d'avec une autre substance du fer qui est blanche & plus difficile à fondre, sur laquelle cette matiere noire coule & change de place comme la cire fonduë couleroit sur un metal chaud. Le fer se tient quelquefois un bon *miserere* dans cette situation avant que la matiere blanche commence à se fondre, laquelle paroît inégale & raboteuse sous cette matiere noire, jusqu'à ce que toute la masse du fer soit fonduë : alors si le fer est soûtenu d'un charbon, la matiere noire se joint au charbon, s'enflamme, se creu-

se fort vîte & saute en étincelles, qui petillent comme le fer qui brûle dans la forge d'un Marêchal.

Les étincelles en sortent d'abord fort grosses & en grande quantité; elles diminuënt ensuite jusqu'à ce qu'a la fin il reste une masse de fer fondu qui ne jette plus d'étincelles, & qui se tient en fonte aussi tranquilement qu'une goute d'huile se tient sur une assiete d'argent.

Pendant que le fer est dans cette fonte tranquile où il ne jette plus d'étincelles, il s'amasse sur sa superficie un verre transparent, mais qui ne s'y tient pas de la même maniere qu'il fait sur les autres metaux qui se vitrifient, où le verre nage sur le metal sans se boursouffler, comme une goute de graisse nageroit sur l'eau chaude: mais le verre du fer se boursouffle & s'éleve en écume blanche, qui de temps en temps se rabat en une goute unie & transparente, & qui un moment aprés se releve en écume; ce qui arrive succeffivement & souvent. Mais le fer étant refroidi, le verre n'est ni blanc ni transparent comme il paroissoit étant liquide, mais fort noir comme seroit un émail noir.

Pendant le temps que le fer petille & que les étincelles en sautent, il s'attache sur toute la superficie du charbon qui soutient le fer, une trés-grande quantité de petites boulettes, qui ne sont autre chose que la partie inflammable du fer qui s'en separe en forme d'étincelles, & qui tombe sur le charbon. Si l'on remuë un peu le charbon pendant la fonte tranquille du fer, ensorte que ces petites boulettes des étincelles puissent retomber sur ce fer fondu, alors ce fer recommence à jetter des étincelles jusqu'à ce que la matiere étincelante en soit entierement ressortie.

Il y a beaucoup d'apparence que la matiere qui fournit ces étincelles, ou la matiere inflammable du fer, est cette matiere noire qui se fond d'abord que le fer paroît au foyer du verre ardent; puique le fer ne commence à jetter des étincelles, que lorsque cette matiere noire commence à toucher le charbon, & que la partie du fer qui se

tient en une fonte tranquille sans étinceler, est cette matiere blanche du fer qui fond la derniere ; que la premiere est une matiere non encore metallique, & que la derniere est le vrai fer ou la partie metallique du fer.

Le hazard nous a découvert que dans toutes les cendres il se trouve une poudre noiratre qui est un vrai fer : ce que l'on peut verifier de cette maniere. Brûlez en cendres quelle sorte d'herbes seches ou du bois que vous voudrez : prenez les précautions necessaires pour qu'il ne s'y puisse mêler quelque matiere ferrugineuse : puis foüillez dans ces cendres avec une lamme de coûteau bien nette & qui soit aimantée d'un Aimant vigoureux ; vous trouverez au bout de vôtre coûteau une barbe d'une poudre noiratre comme si vous l'aviez trempé dans la limaille de fer. Ramassez cette poudre : faites cela tant de fois que vous en aïez assez pour la pouvoir fondre ; ce que vous ferez aisément au verre ardent : il vous en viendra une grenaille de fer, qui jettera des étincelles sur le charbon comme fait un morceau de fer qu'on rougit fortement à la forge.

Cette experience nous marque avec beaucoup d'évidence que dans le brulement ou dans l'incineration de toute matiere vegetale il se compose du fer, puisqu'il s'attache au bout du coûteau aimanté en forme d'une poudre noiratre ; ce qui n'arrive à aucune autre matiere qu'au fer ou à l'acier, qui est du fer purifié : Et comme dans le brûlement de quelque matiere vegetale que ce soit, les cendres qui en proviennent consistent en une partie de sel fixe de la plante, en un peu d'huile fetide & en un peu de terre ; il pourroit fort bien être que la substance du fer consiste de même en une partie de terre & de sel fixe de la plante, dont les parties sont si fortement collées ensemble & enveloppées dans le feu par l'huile fetide du vegetal brûlé, que la flamme a de la peine à les separer les une des autres, & qu'elles s'y fondent plutôt ensemble pour produire un corps dur & cependant malleable que nous appellons du fer.

Nous

Nous avons observé que la matiere noire du fer est une matiere huilleuse, qui s'enflamme avec le charbon ou semblable & non autrement. Il pourroit bien être que cette matiere huileuse ou noire du fer soit un reste superflu de l'huile du bois ou d'autre vegetal, qui par son incineration a produit le fer, & qui ne s'est pas joint assez intimement ou en trop grande quantité avec les autres principes qui entrent dans la composition du fer, & qui se rejoint dans l'occasion aux parties huileuses ou inflammables du charbon comme à son semblable, & y produit cette inflammation ou étincellement comme la matiere huileuse vegetale ou animale en se joignant à quelque sel lui donne le caractere du salpetre, & qui s'en détache en s'enflammant à chaque fois qu'elle touche à un charbon ardent.

L'étincellement du fer n'arrive ordinairement que lorsqu'on le fond sur un charbon : car si on le fond sur quelqu'autre metal, dans un creuset ou sur de la porcelaine ; le fer n'étincelle point, & alors la matiere blanche du fer se separe de la noire dans la fonte, & fait un culot à part, sur lequel nage la matiere noire, comme les scories surnagent un metal fondu. La matiere blanche est dure comme l'acier trempé, & étant cassée, elle est jaunâtre en dedans, & quelquefois blanche comme de l'argent. La matiere noire, étant réduite en scories, est tendre & friable comme du verre outré au Soleil.

Le fer joint aux autres metaux par la fonte produit des effets differens selon les metaux ausquels on le joint, & selon le tems qu'on le joint à ces metaux. Quand on fond le fer avec quelque metal sulphureux, comme avec l'or, avec le cuivre ou avec l'étain ; la matiere blanche du fer se mêle avec ces metaux, & la matiere huileuse ou noire les surnage comme une scorie qui s'en separe fort aisément par un coup de marteau, comme toutes les scories se separent de dessus les metaux sur qui elles tiennent.

Quand on fait fondre le fer le premier sur un charbon, & qu'ensuite on met l'autre metal sur ce fer fondu ; alors

le fer continuë à jetter des étincelles jusqu'à sauter presqu'entierement de dessus le charbon en petits grains, qui sont d'abord comme de la poussiere, ensuite comme du sable, & à la fin comme des têtes d'épingles; & il emporte avec lui presque toute la masse de l'autre metal. Mais quand on fait fondre l'autre metal le premier & qu'on met le fer dessus ce metal fondu, alors trés-souvent il ne se fond que seulement la matiere noire du fer, sans qu'on puisse faire fondre la matiere blanche, laquelle nage sur l'autre metal, ou s'y enfonce selon que le fer est plus ou moins pesant que l'autre metal, & la matiere noire du fer leur sert de scories. Dans cette situation le fer ne petille & n'étincelle jamais, même avec les métaux sulphureux, comme nous allons voir dans le détail suivant.

Quand on fait fondre du fer jusqu'à ce qu'il ait cessé de jetter des étincelles, & jusqu'à ce qu'il se tienne en une fonte tranquile, si pour lors on met un morceau d'argent dessus, l'argent se fond & les deux metaux se confondent en une masse, sans que le fer recommence à jetter des étincelles: mais si l'on fait fondre l'argent le premier, & si l'on met un morceau de fer sur cet argent fondu, l'argent se tiendra en fonte, & le fer ne se fondra pas. Il arrivera pour lors un effet qui m'a paru particulier à l'argent, qui est que la partie huileuse du fer se fondra d'abord seule; elle coulera de dessus le fer, & entrera dans la masse de l'argent fondu, comme l'eau entre dans une éponge, laissant la partie du fer la plus blanche & la plus metallique destituée de son soufre brûlant qui lui sert ordinairement de fondant: & c'est-là la raison pourquoy le fer pour lors ne se fond que trés-difficilement. L'argent qui a bû ce soufre devient noirâtre & fort cassant; il le faut mettre à la coupelle de plomb pour l'en separer.

Voilà l'effet du mélange du fer avec l'argent, qui est le metal le moins sulphureux que nous aïons. Il n'arrive pas la même chose quand on mêle le fer avec un metal sulphureux, comme est l'or, le cuivre & l'étain; soit qu'on les fasse fondre devant le fer, ou qu'on fasse fondre le fer

le premier : parce que ces metaux ayant d'eux-mêmes beaucoup de soufre, ils ne boivent pas le soufre brûlant du fer comme faisoit l'argent qui a fort peu de soufre.

Le fer fondu avec l'un de ces trois métaux produit encore des effets differens. Etant mêlé avec l'or, il continuë à petiller comme si on l'avoit fondu seul, sans jetter une plus grande quantité d'étincelles : ce qui marque que le soufre de l'or n'est pas un soufre brûlant comme celui du fer ; car il en auroit augmenté les étincelles.

Quand on fond un morceau de fer jusqu'à la cessation du petillement, si l'on met pour lors une plaque de cuivre rouge dessus, il arrive premierement que le cuivre devient blanc comme de l'argent, après quoi il devient noir & lustré comme du vernis noir de la Chine, troisiémement il se ride comme une pomme fort ridée restant toûjours noir, & un moment après il se fond & se confond avec le fer : mais comme le fer est plus leger que le cuivre, il monte sur la superficie du cuivre comme une scorie blanchâtre, & s'étant joint au soufre de cuivre, il recommence à jetter des étincelles en plus grande quantité qu'auparavant, & beaucoup plus larges & plus brillantes que lorsqu'il petilloit seul & sans le cuivre ; ce qu'il ne faisoit pas avec l'or : marque évidente que le cuivre contient un soufre brûlant aussi-bien que le fer, & que l'or n'en contient pas. Ces étincelles brillantes durent long-temps : à la fin elles cessent, & la masse fonduë continuë à jetter une très-grande quantité de petits grains de metal sans étincelles. Ces petits grains sont d'abord fort menus, & ne s'élevent pas plus de quatre ou cinq pouces : mais à la fin ils deviennent aussi gros que des têtes des plus grosses épingles, & ils s'élancent en l'air de la hauteur d'un pied ou d'un pied & demi, Quand on met quelque bassin au-dessous du charbon qui tient cette masse petillante ; on reçoit ces petits grains qui sautent en l'air, que l'on reconnoît fort bien & sans loupe, les uns de cuivre pur, les autres de fer fondu, & d'autres de fer mêlé de cuivre.

L'étain ayant été mis en fonte au Soleil, si l'on y ajoûte

du fer, le fer se fond promptement & se mêle parfaitement avec l'étain, & mieux qu'aucun autre metal. Ils se tiennent tranquillement en fonte, sans que le fer petille ou jette des étincelles : ce qui marque que le soufre de l'etain approche de celui de l'or, & qu'il n'est pas brûlant comme celui du fer ou du cuivre. Ils fument un peu ensemble, & se vitrifient en un émail noir. Le metal qui se trouve sous l'émail, est blanc comme de l'argent de coupelle, & dur & cassant comme du fer fondu.

Si à cet étain & fer fondu ensemble on ajoûte du plomb de chacun parties égales, la matiere se fondra difficilement ; & en la laissant refroidir, la masse fonduë produit sur le champ une espece de vegetation, & jette sur toute sa superficie une poudre jaune de l'épaisseur d'un doigt ; ensorte que la poudre qui sort de la masse fonduë, paroît le double de celle qui l'a produite, & la masse fonduë qui étoit fort bossuë devient plate & même creuse. Cette poudre sort d'abord en forme de champignons sur la superficie de la masse fonduë, qui tombent ensuite en une poudre jaune. Si l'on ajoûte un peu de cuivre à ce mélange de fer, d'etain & de plomb, il ne produit plus de champignons ni de poudre.

L'étain étant fondu le premier, & les clous de fer mis sur cet étain fondu pour se fondre ensuite, il ne se fait point de petillement ni d'étincelles, trés-peu de fumée, & la fonte est tranquille, comme nous venons de le voir. Mais si l'on fond le fer le premier, & si l'on met l'étain sur ce fer fondu, l'étain se calcine dans un moment en une chaux blanche, & aussi-tôt après il se fond & se confond avec le fer : il en sort une prodigieuse quantité de fumée : le fer & l'étain petillent ensemble sans jetter d'étincelles, & chaque grain qui en saute en très-grand nombre, entraîne avec lui un filet de fumée blanche, laquelle se durcit en l'air & tient ensemble comme de la toile d'araignée, & remplit l'air de flocons & de fils blanchâtres qui couvrent tout ce qui se trouve alentour. Chaque grain de ce metal qui s'élance en l'air, & qui for-

me un fil blanc depuis la masse du metal d'où il sort jusqu'à la hauteur où il peut aller, monte jusqu'à douze, quinze & dix-huit pouces; ce qui fait un mouvement fort agreable aux yeux, qui ressemble à une grande quantité de fusées volantes & de serpentaux qu'on lâcheroit en même temps.

L'etain fin mis seul au verre ardent fume beaucoup, & s'en va enfin entierement en fumée, ne laissant aucun residu. L'etain de vaisselle fume plus que l'etain fin, s'en va plus vîte en fumée, & laisse à la fin une matiere terreuse qui ne change plus. L'étain & le plomb, parties égales, fument beaucoup, & se vitrifient à la fin. Ce verre fume encore quelque tems, puis il cesse de fumer, & se change à la fin en une matiere terreuse.

OBSERVATION

DE

L'ECLIPSE DU SOLEIL

Faite à Marly le 12 May 1706, en presence du ROY, *de* MONSEIGNEUR, *& de* MONSEIGNEUR LE DUC DE BOURGOGNE. 1706. 15 May.

MOnsieur l'Abbé Bignon ayant communiqué à l'Academie une Lettre qu'il avoit reçûë de M. le Comte de Pontchartrain, par laquelle il lui mandoit que le Roy vouloit qu'on choisît quelques Astronomes de l'Academie Royale des Sciences pour aller observer à Marly en sa presence l'Eclipse du Soleil, pendant que les autres resteroient à l'Observatoire pour y faire les observations de cette Eclipse, Mrs Cassini le fils & de la Hire le fils furent choisis pour aller à Marly, & ils porterent avec eux un Quart de cercle de deux pieds de rayon, une Pendule

à ſeconde, une à demi-ſeconde, & pluſieurs Lunetes de diverſes grandeurs.

On avoit attaché à deux de ces Lunetes, dont l'une étoit de neuf & l'autre de ſept pieds, deux ſupports qui portoient une planchette perpendiculaire à l'axe de la Lunete, à la diſtance de l'oculaire d'environ deux pieds, & l'on avoit tracé ſur un carton poſé ſur cette planchette un cercle égal à l'image que le Soleil paſſant par la Lunette formoit ſur ce carton. Ce cercle étoit diviſé par des cercles concentriques en doits & demi-doits.

On avoit placé au foyer commun des deux verres d'une autre Lunette de cinq pieds, un chaſſis avec des fils de ſoïe ſimple paralleles entr'eux, dont les deux extrêmes comprenoient exactement l'image du Soleil. Les autres fils diviſoient cet eſpace en douze parties égales.

Ils arriverent à Marly le 11 May après midy, où M. le Comte de Pontchartrain les ayant preſenté au Roy, Sa Majeſté leur ordonna de choiſir un lieu propre pour faire exactement l'obſervation de cette Eclipſe.

Monſeigneur le Duc de Bourgogne jugea à propos de mettre les Inſtrumens dans le Salon de Marly qui regarde la Caſcade que l'on appelle ordinairement la Riviere, lequel eſt expoſé au Midy avec un peu de declinaiſon vers l'Orient. On y plaça le ſoir la Pendule à ſeconde, & l'on obſerva en ſa preſence & de toute la Cour des hauteurs du cœur du Lion avec le Quart de cercle pour regler la Pendule.

Le lendemain matin 12 May l'on obſerva dans le Salon du Château où étoient les Inſtrumens quelques hauteurs du Soleil pour ſçavoir l'état de la Pendule; & ayant placé les trois Lunettes dont on a parlé ci-deſſus ſur la terraſſe qui eſt près de ce Salon, on attendit le moment de l'Eclipſe.

Monſeigneur le Duc de Bourgogne fut le premier le l'apperçût entre les nuages à 8ʰ 28′ 57″ lorſqu'elle étoit éclipſée d'environ un demi doit, & jugea qu'il y avoit au moins deux minutes qu'elle avoit commencé; de ſorte

que l'on peut déterminer son commencement à $8^h\ 26'$. Le Soleil étant encore entre des nuages rares, l'on détermina les premieres Phases avec les reticules qui étoient placez au foyer de la Lunete de cinq pieds que l'on avoit attachée sur le Quart de cercle ; & lorsque le Soleil fut entierement dégagé des nuages, on l'observa par le moyen de son image qui se peignoit sur le carton éxposé aux Lunetes.

Monseigneur le Duc de Bourgogne détermina lui-même la plûpart des Phases lorsque l'Eclipse arrivoit à differens doits, & l'on marquoit au même instant à la Pendule le tems de l'observation. Il détermina aussi en même tems la grandeur de l'Eclipse & la distance des cornes pour trouver la proportion du diametre apparent du Soleil à celui de la Lune, & il trouva le diametre apparent de la Lune plus grand que celui du Soleil, de même qu'il est marqué dans les Tables.

Le Roy vint voir l'Eclipse lorsqu'elle augmentoit encore, & faisoit marquer à la Pendule l'heure des Phases differentes & le temps de la plus grande Eclipse. Sa Majesté y demeura encore long-temps aprés qu'elle eut commencé à diminuer. Monseigneur, Madame la Duchesse de Bourgogne, Monseigneur le Duc de Berry, Madame, Monsieur le Duc d'Orleans, Monsieur le Duc & Monsieur le Prince de Conty & toute la Cour assisterent à l'observation, & eurent le plaisir de déterminer eux-mêmes le temps des Phases.

L'aprés-midy on observa des hauteurs correspondantes à celles du matin, & Monseigneur le Duc de Bourgogne se fit expliquer la methode dont l'on se sert pour déterminer les Eclipses par la projection de la terre dans l'orbe de la Lune.

Observation de l'Eclipse du Soleil à Marly.

Le 12 May à 8^h 28′ 57″ du matin Monseigneur le Duc de Bourgogne observa que le Soleil étoit déja éclipsé d'environ un demi doit, & qu'il y avoit au moins deux minutes que l'Eclipse avoit commencé.

8^h	38′	25″	Deux doits & demi.
8	40	28	Trois doits.
8	51	58	Cinq doits.
8	56	45	Six doits.
9	3	31	Sept doits.
9	13	2	Huit doits & demi.
9	15	33	Neuf doits.
9	22	27	Dix doits.
9	33	7	Prés de onze doits.
9	38	36	Dix doits & demi.
9	41	36	Dix doits.
9	48	7	Neuf doits.
9	53	38	Huit doits.
9	56	18	Sept doits & demi.
10	6	11	Six doits.
10	12	23	Cinq doits.
10	18	11	Quatre doits.
10	27	42	Deux doits & demi.
10	36	48	Un doit.
10	41	54	Fin de l'Eclipse.



OBSERVATION

De l'Eclipſe de Soleil faite le 12 May 1706 dans l'Appartement inferieur de l'Obſervatoire.

Par Mrs. Cassini et Maraldi.

On a obſervé en deux manieres differentes l'Eclipſe de Soleil qui eſt arrivée le 12 de ce mois au matin. On avoit mis au foïer de la Lunete de 34 pieds, placée ſur la terraſſe de l'Obſervatoire, un papier bien tendu ſur lequel ſe peignoit l'image du Soleil, dont le diametre étoit preſque de quatre pouces. On avoit diviſé ce diametre en 12 parties par ſix cercles concentriques qui repreſentoient les douze doits, dont chacun étoit un peu moins de quatre lignes. 1706. 15 May.

Pour obſerver les doits de l'Eclipſe par cette Lunete, on faiſoit concourir l'image du Soleil avec le cercle exterieur, & dans cette ſituation on obſervoit quand la concavité de l'Eclipſe arrivoit à une de ces circonferences qui déterminoient les doits qui reſtoient éclairez, & à cet inſtant on remarqua l'heure & la minute. M. Couſtard & M. Butterfield, qui ſont exercez dans ces ſortes d'obſervations, eurent ſoin d'obſerver les doits de l'Eclipſe avec cette Lunete.

On a auſſi obſervé l'Eclipſe dans la Tour orientale & dans la Salle, en preſence de Monſieur le Nonce, de pluſieurs Princeſſes, de pluſieurs Meſſieurs de l'Academie, & d'un grand nombre d'autres perſonnes conſiderables.

Les Phaſes de l'Eclipſe ont été obſervées par un Micrometre poſé au foïer de la Lunete de 8 pieds, par le moïen duquel on a meſuré vers le commencement & vers la fin la diſtance des cornes. Dans la ſuite de l'Eclipſe on a obſervé la partie claire du Soleil, d'où l'on a conclu les doits éclipſez & la plus grande obſcurité.

Les nuages qui couvroient preſque tout le Ciel le matin avant l'Eclipſe, ne permettoient pas de voir le Soleil.

que par intervalles. Nous le vîmes à 8 23' lorsque l'Eclipse n'avoit point commencé. Le Soleil se couvrit aussi tôt; & s'étant découvert deux minutes aprés, nous vîmes à 8 heures 25' 38" le bord occidental du Soleil qui manquoit déja, de sorte que l'Eclipse avoit commencé un peu auparavant. Le Soleil se couvrit de nouveau, & ne parut que vers les 8^h 40' lorsque l'Eclipse paroissoit déja grande. Durant le reste de l'Eclipse le temps a été plus favorable, principalement vers le milieu & vers la fin.

Observations faites par le Micrometre.			*Par la Lunete de 34 pieds.*	
8^h 25' 38" L'Eclipse avoit commencé.				
43 L'Eclipse étoit de	3 doits	48'		
49	4	30		
8 55 20	6	16		doits
9 1 30	7		9^h 4' 0"	7
9 0	8	0	9 8 0	8
12 20	8	40		
14 0	9	18		
19	9	23	9 20	10
9 23	10	48		
27	10	48		
9 28 55	10	48		
34 45	10	50	9^h 32' *Le tems de la plus grande obscurité*	11

L'Eclipse a augmenté jusqu'à present, dans la suite elle va en diminuant.

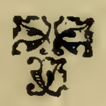
9 40	10	14	9 42 0	10
9 58	7	21	9 54	8
10 0 0	6	56	10 0	7
10 0	4	45	10 7 30	6
133 0	4	37		
10 16	4	14	10 19 0	4
24	2	42	10 29	2
10 28 40	2	6	10 34	1
10 30 46	1	36	10 40 49 Fin de l'Eclipse par la Lunete de 34 pieds.	
10 34 10	1	9		
10 36 30	0	40		

10 40 47 Fin de l'Eclipse par la Lunete de 8 pieds.

Quoique la partie lumineuse du Soleil qui est restée dans la plus grande obscurité n'ait été qu'environ la douziéme partie de son diametre, sa lumiere étoit encore assez grande : elle paroissoit seulement plus foible & plus rougeâtre.

Quelques minutes avant la fin de l'Eclipse, nous étions attentifs à observer avec la Lunette de 8 pieds le moment qu'elle finiroit. Nous remarquâmes que la commune section de l'obscurité & de la lumiere n'étoit pas une portion de cercle bien terminée, mais qu'elle étoit inégale, & qu'il y avoit des points obscures, une principalement plus considerable que les autres, qui restoient dans le Soleil plus que le reste de la circonference. Ces pointes obscures sont des montagnes qui se rencontrent dans la circonference de la Lune. On voit quelquefois avec les Lunetes de semblables pointes lumineuses sur la circonference du disque de la Lune, lors même qu'elle est exposée directement au Soleil.

Cette Eclipse de Soleil est arrivée 14 jours $7^h \frac{1}{4}$ aprés l'Eclipse de Lune que nous observâmes le 27 d'Avril dernier. En raison de 29 jours 12 heures & trois quarts, qui est le temps moyen du retour de la Lune au Soleil, il devoit y avoir entre l'Eclipse de la Lune & celle du Soleil 14 jours 18 heures & un peu plus d'un tiers. La difference entre l'intervalle moïen & le veritable est 10 heures & un tiers, dont l'intervalle veritable est plus court que le moïen. Cette difference vient en partie du mouvement de la Lune, qui a parcouru dans ce tems son demi cercle plus proche de la terre, où est son Perigée & son mouvement plus vîte, & en partie de la parallaxe de la Lune, & elle est assez bien representée par les hipotheses Astronomiques.



OBSERVATIONS

De l'Eclipse de Soleil du 12 May 1706 au matin à l'Observatoire Royal dans la Tour orientale à la hauteur de la grande Salle.

PAR M. DE LA HIRE.

1706. 15 May. J'Ay observé cette Eclipse de la même maniere que j'ay accoutumé de les observer. Le Micrometre dont je me sers pour prendre la plus grande largeur ou le diametre de la partie du Soleil qui reste éclairee, est appliqué à sa Lunete ordinaire qui a 7 piés de foyer. Chaque intervalle des filets qui separent la longueur de l'ouverture du Micrometre vaut 12′ 45″, comme je l'ay verifié par des methodes trés-sûres, & dix tours de la grosse vis dont le pas est trés-fin, & qui conduit le curseur qui est un filet parallele aux autres, remplissent exactement un intervalle des filets. Ce Micrometre est le meme dont M. Picard se servoit, & qu'il avoit construit avec un trés-grand soin, comme il est rapporté dans le Livre des Ouvrages de plusieurs Academiciens que j'ay fait imprimer en 1693 page 413 sur l'imprimé de M. Auzout.

Dans cette Eclipse j'ay observé le tems des Phases pour chaque demi-tour de la vis qui méne le curseur, ou pour chaque 20e. d'un intervalle des filets paralleles, ce qui vaut 38″ $\frac{1}{4}$ de degré, & ce qui me donnoit pour chaque observation prés de la cinquiéme partie d'un doit; mais ces observations ont été faites sans avoir aucun égard aux doits, d'où il m'a été facile de les conclure & leurs minutes, par les parties proportionnelles entre le grand nombre des observations que j'ay faites.

Mais comme je sçay par experience que lorsqu'on regarde avec le verre noir les filets hors du disque du Soleil, on ne peut qu'avec peine les appercevoir; ce qui

empêche de juger si l'un des filets rase exactement le disque apparent du Soleil, & c'est ce qui arrive ordinairement quand le Ciel est bien pur ; je me suis servi du moïen que j'ay expliqué dans mes Tables Astronomiques pour prévenir cet inconvenient. J'ay tendu au-devant du verre objectif sur le bout du tuyau de la Lunete, une toile de soye blanche fort fine & assez claire, ce qui n'empêche pas de voir le Soleil trés-distinctement, & ce qui donne en même temps une blancheur dans toute l'ouverture de la Lunete qui fait appercevoir facilement les filets hors du disque du Soleil, comme s'il y avoit un leger broüillard au-devant du Soleil. Cette methode est aussi trés-commode pour les observations de la Lune dans le même cas.

Le Ciel étoit fort broüillé avant le commencement de l'Eclipse ; mais comme il y avoit de tems en tems quelques intervalles entre les nuages, j'étois attentif à observer le Soleil, l'orsque je m'apperçûs qu'il y avoit une trespetite partie de son disque où la Lune commençoit à entrer, & je jugeay que l'Eclipse pouvoit avoir commencé 10″ ou 12″ plutôt. Il étoit alors $8^h\ 25'\ 52''$, c'est-pourquoy je marque le commencement à $8^h\ 25'\ 42''$. Ensuite le Ciel se couvrit & ne laissoit voir le Soleil que par des intervalles trop petits pour pouvoir faire quelques observations exactes, jusques vers les $8^h\ \frac{1}{2}$ où il commença à devenir serein, ou en partie jusqu'à la fin de l'Eclipse. Voici les observations que j'en ay faites. J'avois observé exactement le diametre du Soleil de $31'\ 45''$, d'où j'ay réduit la partie restante éclairée du disque du Soleil, à la partie éclipsée, comme je la donne ici, & au lieu des minutes & secondes de degré que j'ay observées, j'y ay substitué les doits & les minutes qui leur répondent.

Il faut remarquer qu'il y a toûjours beaucoup de difficulté à observer les Phases de ces Eclipses, à cause du mouvement continuel du Soleil, & qu'il faut en même tems être attentif aux deux filets qui renferment la partie éclairée & qui la traversent de biais, ce qui empêche

qu'on ne puiſſe déterminer la grandeur de l'Eclipſe ſans erreur de quelques ſecondes. Il n'en eſt pas de même de l'obſervation du diametre ; car on diſpoſe le Micrometre de telle maniere que le diſque du Soleil ſe meut entre deux filets paralleles.

H.	′	″	*Doits*	*M.*	*Doits entiers.*	
8	25	42	0	0	Commencement.	
	48	42	4	27	4 ½	à 8^h 48′ 57″
	52	42	5	15	5	à 8 51 27
	55	42	5	44	6	à 8 57 7
	58	17	6	13		
9	0	52	6	42	7	à 9 2 5
	6	47	7	41		
	7	57	7	55	8	à 9 8 25
	9	22	8	10		
	10	42	8	25		
	12	7	8	39		
	13	32	8	53	9	à 9 14 4
	14	52	9	8		
	16	14	9	22		
	17	47	9	36		
	19	15	9	51	10	à 9 20 21
	20	57	10	5		
	22	47	10	10		
	24	47	10	34		
	26	47	10	46		
	31	42	10	58	La plus grande obſcurité.	
	34	57	10	46		
	36	57	10	34		
	39	8	10	19		
	40	42	10	5	10	à 9 41 17
	42	17	9	51		
	43	50	9	36		
	45	22	9	22		
	46	52	9	8		
	48	20	8	53	9	à 9 47 39

H.	′	″	Doits.	M.	Doits entiers.	
9	49	47	8	39		
	51	12	8	25		
	52	42	8	10		
	54	12	7	56	8	à $9^h 53' 46''$
	55	37	7	41		
	57	4	7	27		
	58	32	7	12		
10	0	2	6	57	7	à 9 59 44
	1	32	6	42		
	3	2	6	28		
	4	27	6	13		
	5	57	5	59	6	à 10 5 51
	7	27	5	44		
	8	57	5	29		
	10	27	5	15		
	11	57	5	2	5	à 10 12 8
	13	22	4	47		
	14	42	4	33		
	15	57	4	19		
	17	12	4	5	4	à 10 17 40
	18	37	3	50		
	20	2	3	36		
	21	32	3	21		
	22	57	3	7	3	à 10 23 37
	25	47	2	37		
	27	7	2	22		
	28	37	2	7		
	29	52	1	53	2	à 10 29 14
	31	7	1	39		
	32	22	1	25		
	33	57	1	10		
	35	28	0	56	1	à 10 35 2
	36	57	0	41		
	8	22	0	27		
	41	6	0	0	Fin de l'Eclipſe obſervée fort exactement.	

A la fin de l'Eclipse il paroissoit au bord de la Lune deux petites ondes ou éminences.

On doit remarquer que dans le fort de cette Eclipse on ne laissoit pas de voir fort clair, quoiqu'il n'y eut que la douziéme partie du Soleil qui fut découverte : mais il sembloit que le Ciel fut fort couvert de tous côtés à l'horizon, quoiqu'il fut fort serein.

Aprés avoir construit mes Tables Astronomiques sur toutes les observations que j'avois faites depuis un grand nombre d'années, & sur celles dont l'exactitude m'étoit connuë, je n'ay donné pour exemple des Eclipses que celles qui devoient arriver depuis 1702, qui est l'année où elles ont été imprimées, afin d'éviter le reproche qu'on fait à quelques Astronomes, de ne rapporter pour exemple que quelques-unes de celles qui sont passées, ausquelles ils font convenir leurs hipotheses.

Cette Eclipse de Soleil est une de celles dont j'ay donné le calcul dans mes Tables, où j'avois trouvé qu'elle devoit commencer à 8h 27′ 11″, & finir à 10h 45′ 37″, & que sa quantité seroit de 10 doits 48′. Mais la Connoissance des tems que M. Lieutaud de l'Academie calcule toûjours sur mes Tables, comme on fait aussi nos Ephemerides, marque le commencement de cette Eclipse à 8h 27′ 4″, la fin à 10h 45′ 49″ & la quantité de 11 doits 8′. Je ne parle point du milieu de l'Eclipse, dont le tems ne peut pas être observé exactement.

La difference de quelques secondes qui se trouvent entre nos calculs, peut venir des parties proportionnelles où l'on peut faire quelque erreur, ce qui ne merite pas d'y avoir égard.

J'ay voulu faire cette observation avec un trés grand soin ; & pour ce sujet je me suis retiré tout seul dans la Tour orientale de l'Observatoire, afin de n'être point interrompu par une foule de curieux, qui ne nous permettent pas le plus souvent de donner toute l'attention necessaire dans ces rencontres ; & j'ay trouvé que l'Eclipse avoit commencé à 8h 25′ 42″, qu'elle avoit fini à 10h

41′ 6″

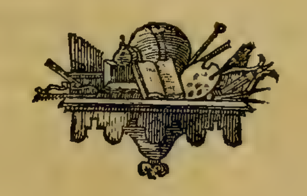
41′6″, & que la quantité avoit été de 10 doits 58′, comme je l'ay rapporté cy-devant.

Ceux qui ne ſçavent pas qu'il y a de grandes difficultez, & qu'il faut emploïer beaucoup d'élemens dans la conſtruction des Tables, pourront s'étonner de voir que mon calcul ne s'accorde pas exactement avec l'obſervation; mais au contraire les Sçavans ſeront ſurpris qu'on ait pû arriver à une ſi grande juſteſſe, & admireront la connoiſſance qu'on a acquiſe du mouvement des corps celeſtes; car il paroît que les anciens Aſtronomes étoient fort éloignés de prétendre à une auſſi grande préciſion.

Chacun pourra faire la comparaiſon de mon obſervation avec les Ephemeriques qui ont publiques, & qui ont été calculées par des Particuliers ſur des Tables dont la plûpart laiſſent à juger qu'ils ſont les Auteurs.

Cette Eclipſe a été obſervée au Château de Marly en preſence du Roy & de toute la Cour, par deux Aſtronomes de l'Academie qui y avoient été mandés par Sa Majeſté.

La hauteur du Pole au Château de Marly eſt de 48° 31′ 35″, & la difference des meridiens entre ce Château & l'Oſervatoire Royal eſt de 14′ 18″ de degré ou de 57″ d'heure, comme je l'ay conclu des obſervations qui en ont été faites.



COMPARAISON

Des Forces centrales avec les Pesanteurs absoluës des corps mûs de vîtesses variées à discrétion le long de telles Courbes qu'on voudra.

PAR M. VARIGNON.

1706. 24 Avril. ON sçait que tout corps qui se meut en rond, ou en ligne courbe quelconque, est dans un effort continuel pour s'échaper suivant la tangente de cette Courbe à chaque point où il se trouve : de maniere qu'il s'échaperoit effectivement suivant cette touchante, s'il n'étoit incessamment retiré ou repoussé vers le dedans de cette même Courbe.

De cet effort pour s'échaper suivant la touchante de la Courbe que ce corps décrit, à chaque point où il se trouve, il en résulte necessairement un autre effort en vertu duquel ce même corps tend à s'éloigner de cette Courbe. C'est ce dernier effort que sent la main qui fait tourner une pierre attachée au bout d'une corde qu'elle retient ; soit que cette main lui fasse décrire un cercle, en ne lui permettant qu'une certaine longueur, toûjours la même, de cette corde ; ou qu'elle lui fasse décrire quelqu'autre Courbe que ce soit, selon qu'elle lui en lâchera plus ou moins : c'est aussi ce même effort qu'on appelle d'ordinaire la *Force centrifuge* de cette pierre, ou de tout autre corps qui se meut en ligne courbe. Mais comme il y en a aussi de *centripetes*, telles que celle qu'il faudroit pour décrire une Hyperbole par raport au foyer de son opposée, vers lequel le corps qui la décriroit, tendroit toûjours à s'aprocher ; nous les avons appellées jusqu'ici du nom commun de *Forces centrales*, de même que celles que le corps *Décrivant* doit avoir en sens contraire (soit qu'on le tire, soit qu'on le pousse) vers le dedans de la Courbe qu'il décrit ; lesquelles Forces

doivent toûjours être égales à celles-là (chacune à celle qui lui eſt directement oppoſée) pour les contre-balancer, & pour empêcher ainſi ce corps de s'écarter de cette Courbe. L'égalité de ces Forces-ci avec les centrales qu'elles contre-balancent, fera que dans la ſuite on les prendra indifferemment les unes pour les autres, ſelon qu'il ſera plus facile de les exprimer.

J'ay déja donné pluſieurs Regles générales pour connoître le raport de ces forces entr'elles, dans les Memoires de 1700. J'ay même donné la maniere d'en trouver à l'infini dans ceux de 1701. J'ay donné encore en 1703 la maniere d'en trouver auſſi une infinité de pareille étenduë pour le cas où pluſieurs de ces forces centrales agiroient toutes à la fois ſur le corps *Décrivant*, quelles que fuſſent leurs diréctions & la Courbe réſultante de leur concours d'action. De ſorte que pour rendre cette Theorie complette, il ne reſte plus (ce me ſemble) qu'à trouver de pareilles Regles pour connoître abſolument ces forces, c'eſt-à-dire, pour connoître leur raport à quelque force connuë, telle qu'on ſuppoſe d'ordinaire la peſanteur des corps: En voici encore à l'infini, & toutes auſſi générales que les précedentes, dans la Solution du Problême ſuivant, & dans les conſéquences qui s'en tirent.

Avertiſſement.

Pour démêler les Forces centrales des Corps d'avec leurs Péſanteurs, on ſuppoſera par tout dans la ſuite, que les Courbes qu'on leur fera décrire, ſeront toutes ſur des ſurfaces mathematiques horizontales, leſquelles rendent ces corps comme ſans péſanteur, en ſoûtenant ce qu'ils en ont.

PROBLEME.

Trouver le rapport des Forces centrales (tant centrifuges que centripetes) aux Péſanteurs abſolues des Corps mûs de viteſſes variées à diſcretion le long de telles Courbes qu'on voudra.

SOLUTION.

Conſtruction & définitions FIGURE I. I. Soit une Courbe quelconque *MLN* décrite par le corps *L* mû ſuivant *MLN* avec telle variation de viteſſes qu'on voudra, en tendant toûjours vers un point quelconque *C* du plan de cette Courbe, ou directement à contre-ſens : On demande le raport de la peſanteur abſoluë de ce corps, avec ce qu'il fait d'effort à chaque point *L* de cette Courbe pour s'en écarter en ſuivant la tangente *LQ*, ou (ce qui revient au même) avec les forces qui égales à ces efforts, le retiennent toûjours ſur cette Courbe, en l'attirant ou en le repouſſant inceſſamment & directement contr'eux ſuivant *LC*. Le point *C* s'appellera le *Centre* de ces forces ; & les droites *LC*, *lC*, &c. leurs *Rayons*.

Soit l'arc *Ll* indéfiniment petit, des extrêmités duquel partent les rayons *LC*, *lC*, avec la petite droite *lP* parallele à *LC*, & qui rencontre en *P* la tangente *LQ*. Soit de plus *HL* la hauteur de laquelle le corps *L* tombant par ſa peſanteur, il acquieroit en *L* en vertu de cette ſeule peſanteur, la viteſſe qu'il a effectivement en ce point ſuivant *Ll*, ou pour ſuivre *LP* : Cette hauteur s'appellera dans la ſuite *Déterminatrice* de cette viteſſe, pour n'être pas obligé de repeter cette grande phraſe toutes les fois qu'on en parlera.

Expreſſion des tems requis au corps L écrivant, pour acquerir en tombant la viteſſe qu'il a le long de chaque élément II. Cela poſé, il eſt viſible que ſi l'on prend la tangente *LQ* double de la verticale *HL*, & qu'on imagine le corps *L* ſe mouvoir uniformément de cette viteſſe ſuivant *LQ* ; non-ſeulement il parcourra cette longueur *LQ* dans un tems égal à celui qu'il auroit mis à tomber de *H* en *L*, en commençant en *H* ; mais encore ſi l'on prend la partie

indefiniment petite LP de cette tangente pour le tems qu'il mettroit à parcourir de cette même viteſſe cet élément LP, c'eſt-à-dire (*hyp.*) pour le tems qu'il met à parcourir effectivement Ll, l'on aura auſſi LQ pour celui qu'il employeroit à parcourir ainſi cette même LQ, ou à tomber de H en L par ſa ſeule peſanteur. *de la Courbe qu'il décrit, & pour parcourir cet élément de cette même viteſſe.*

III. Cela étant, ſi l'on ſuppoſe que la force centrifuge ou centripete (qui feroit parcourir lP au corps L dans le tems qu'abandonné à lui-même il parcourroit LP, ou que retenu ſur la Courbe il parcourt efféctivement l'élément Ll) agit inceſſamment & uniformément ſur le corps L ſuivant Pl, de même que la peſanteur fait de haut en bas dans l'hypothêſe de Galilée ; on verra que puiſque cette force centrale en L, eſt capable de lui faire parcourir Pl dans le tems LP ; ſi l'on fait cette analogie $\overline{LP}^2 . \overline{LQ}^2 :: Pl . \frac{\overline{LQ}^2 \times Pl}{\overline{LP}^2}$. Ce quatriéme terme ſera l'eſpace que cette force centrale inhérente comme une eſpece de peſanteur dans le corps L, lui feroit parcourir dans le tems LQ que ſa peſanteur (*art.* 2.) le fait tomber de même de H en L ; puiſqu'alors les eſpaces ſeroient comme les quarrés des tems. *Expreſſion de l'eſpace que le corps L écrivant parcourroit en vertu de ſa force centrale conſtante pendant un tems égal à celui qu'il lui faudroit pour acquerir en tombant en vertu de ſa péſanteur une viteſſe égale à ce qu'il en a au point de la courbe où il a cette force centrale.*

IV. Donc HL & $\frac{\overline{LQ}^2 \times Pl}{\overline{LP}^2}$ ſont les eſpaces que la peſanteur du corps L, & ſa force centrale en L ſuivant LC, lui feroient parcourir de la même maniere en tems égaux. Par conſéquent ces deux forces doivent être entr'elles comme ces eſpaces : c'eſt-à-dire que ſi l'on prend p pour la peſanteur de ce corps, & f pour ſa force centrale en L par raport au centre C, l'on aura $f . p :: \frac{\overline{LQ}^2 \times Pl}{\overline{LP}^2} . HL$ (à cauſe que ſuivant l'art. 2. LQ eſt $= 2HL$, & $LP = Ll$) :: $\frac{4\overline{HL}^2 \times PL}{\overline{Ll}^2} . HL$. Ce qui donne $f = \frac{4p \times HL \times Pl}{Ll \times Ll}$ (en prenant auſſi h pour HL) $= \frac{4ph \times Pl}{Ll \times Ll}$ pour une Regle génerale de comparaiſon entre les forces centrales & les peſanteurs des corps. *Ce qu'il falloit trouver.* *Regle de comparaiſon des forces centrales avec les peſanteurs des corps.*

Autre maniere de démontrer la même Regle.

V. *Autrement*. Puiſqu'on ſuppoſe (*art.* 1.) l'élément Ll de la Courbe MLN, parcouru d'une viteſſe égale à ce que le corps L qui la décrit, en auroit aquis en L en vertu de ſa chute de H en L, & que d'ailleurs ce corps mû de cette viteſſe uniforme parcourroit le double de HL dans le tems de cette chute ; ce tems de ſa chute de H en L, ſera au tems qu'il met à parcourir $Ll :: 2HL . Ll$. Donc en appellant dt la durée de l'inſtant que ce corps employe à parcourir l'élément Ll, l'on aura $\frac{2HL \times dt}{Ll}$ pour le tems de ſa chute faite de H en L en vertu de ſa ſeule peſanteur. Par conſéquent les eſpaces ainſi parcourus en vertu des forces conſtantes & inceſſamment appliquées, telles qu'on ſuppoſe d'ordinaire la peſanteur, & que toute force centrale l'eſt à chaque inſtant, étant en raiſon compoſée de ces forces & des quarrés des tems employés à parcourir ces eſpaces ; l'on aura auſſi (en prenant encore f pour la force centrale du corps L ſuivant Pl ou LC, & p pour ſa peſanteur) $Pl . HL :: f dt^2 . p \times \frac{\overline{4HL}^2 dt^2}{\overline{Ll}^2}$.

Ce qui donnera encore $f = \frac{4p \times HL \times Pl}{Ll \times Ll}$ (en prenant auſſi h pour HL) $= \frac{4ph \times Pl}{Ll \times Ll}$, ainſi qu'on le vient de trouver dans l'art. 4.

Troiſiéme maniere de démontrer la même Regle.

VI. *Autrement encore*. Toutes choſes demeurant les mêmes que dans l'art. 2. ſi l'on prend $H\lambda$ pour ce que le corps tombant de H parcourroit de la hauteur HL en vertu de ſa ſeule peſanteur, dans l'inſtant que ſa force centrale lui fait faire Pl, cette force centrale (f) ſe trouvera pour lors être à la peſanteur (p) de ce corps : : $Pl . H\lambda$. Mais ce tems par Pl, ou par $H\lambda$, étant (*art.* 2.) à celui de la chute de H en $L :: LP \ (Ll) . LQ \ (2HL)$. L'on aura de plus $H\lambda . HL :: Ll \times Ll . 4HL \times HL$. ou $H\lambda = \frac{Ll \times Ll}{4HL}$. Donc on aura auſſi pour lors $f . p :: Pl . \frac{Ll \times Ll}{HL}$. Ce qui donne encore $f = \frac{4p \times Hl \times Pl}{Ll \times Ll} = \frac{4ph \times Pl}{Ll \times Ll}$, comme dans les art. 4. & 5.

Quatriéme maniere de

VII. *Autrement encore*. Dans la Remarque des Memoi-

res de 1700. pag. 234. ſuppoſant les Courbes MLN, ZET, décrites par deux corps L, E, dont les maſſes étoient m, μ; leurs forces centrales $f\varphi$, vers C, D; les longueurs parcouruës en vertu de ces forces à chaque inſtant, étoient Pl, Fe, paralleles à LC, ED; enfin ces inſtans étoient dt, $d\theta$: Cela (dis-je) ſuppoſé dans cette Remarque, on y a conclu de la page 111. des Mem. de 1693. cette Regle générale $Pl \times m\varphi d\theta^2 = Fe \times \mu f dt^2$, ou $\frac{fdt^2}{m \times Pl} = \frac{\varphi d\theta^2}{\mu \times Fe}$, laquelle ſera encore démontrée ci-après dans l'art 10. *demontrer la même Regle par une autre des Mem. de 1700.* FIG. I. IV.

VIII. Soit preſentement p la veritable peſanteur du corps E, telle qu'on la ſuppoſe d'ordinaire dans l'hypotheſe de Galilée, & h une hauteur finie que ce corps parcoure en vertu de cette peſanteur dans un tems quelconque θ, au lieu de tourner autour du point D ſur la Courbe ZET, comme ci-deſſus art. 7. il eſt viſible qu'en ſubſtituant p au lieu de φ, h au lieu Fe, & θ^2 au lieu de $d\theta^2$, dans la derniere équation de cet art. 7. L'on aura ici $\frac{fdt^2}{m \times Pl} = \frac{p\theta^2}{\mu h}$. *Comment la Regle en queſtion ſe déduit de celle des Mem. de 1700. raportée dans le precedent article 7.*

Mais ſi l'on ſuppoſe que la viteſſe inſtantanée, & par conſequent uniforme pendant ſon inſtant, avec laquelle l'élément Ll eſt parcouru par le corps L, ſoit égale à ce que la peſanteur (p) du corps E en donneroit à ce même corps E à la fin de ſa chute faite de la hauteur quelconque h, & qu'on prenne cet élément Ll pour le tems ou l'inſtant (dt) emploïé par le corps L à le parcourir: l'on aura auſſi $2h$ pour le tems (θ) emploïé par le corps E à tomber de la hauteur h; puiſque (ſuivant Galilée) dans ce même tems cette même viteſſe acquiſe (*hyp.*) à la fin de la chute de ce corps, faite de la hauteur h, demeurant uniforme, lui feroit parcourrir le double de h; & que d'ailleurs on ſçait que les tems ſont toûjours comme les eſpaces parcourus avec des viteſſes uniformes & égales.

Donc en ſubſtituant $2h$ pour θ, $4hh$ pour θ^2, & $\overline{Ll}^2$ pour dt^2, dans l'équation $\frac{fdt^2}{m \times Pl} = \frac{p\theta^2}{\mu h}$ trouvée au commencement de cet article-ci, l'on aura encore ici $\frac{f \times \overline{Ll}^2}{m \times Pl} = \frac{4ph}{\mu}$. Par conſequent en ſuppoſant le corps L égal au corps E,

c'est-à-dire $m = \mu$, & sa pesanteur aussi $= p$, l'on aura de même $\frac{f \times \overline{Ll}}{Pl} = 4ph$ par raport au seul corps L, ou bien encore $f = \frac{4ph \times Pl}{Ll \times Ll}$, comme dans les art. 4, 5. & 6.

Introduction du rayon osculateur dans la precedente Regle de comparaison des forces centrales avec les pesanteurs des corps, en considerant les élémens des courbes que ces corps decrivent, comme courbes eux-mêmes.

Fig. 1.

IX. Il est ici à remarquer qu'en regardant (ainsi qu'on l'a fait par tout cy-dessus) Pl comme parcouruë d'un mouvement acceleré pendant que LP est parcouruë d'un mouvement uniforme, l'élément Ll décrit par le concours de ces deux mouvemens, doit être icy regardé comme courbe, & comme un veritable arc dans lequel la Courbe MLN est baisée par son cercle osculateur en cet endroit; & par consequent comme un veritable arc de ce cercle, & non comme un côté droit de Polygone, ainsi qu'on le suppose d'ordinaire, & qu'on l'a supposé jusqu'ici dans la recherche des Rayons des Developpées. Donc en prenant R pour le centre de ce cercle osculateur en Ll; LR pour celui de ses rayons qui est perpendiculaire à la touchante en L; & Rl pour un autre de ses rayons infiniment près de celui-là, & qui prolongé rencontre en E cette même touchante LQ; la Prop. 36. du Liv. 3. d'Euclide donnera $LE \times LE = El \times \overline{El + lR} = 2LR \times El$, ou $El = \frac{LE \times LE}{2LR} = \frac{Ll \times Ll}{2LR}$.

Or, en faisant lF perpendiculaire en F sur la tangente LQ, & LD perpendiculaire en D sur l'ordonnée Cl, laquelle prolongée rencontre en S cette même tangente LQ; les triangles rectilignes semblables EFl, ELR, & SPl, SLC, donneront $El. Fl :: ER. LR$. Et $Sl. Pl :: SC. LC$. Et par consequent aussi $El = Fl$, & $Sl = Pl$, à cause que l'arc indéfiniment petit Ll rend $ER = LR$, & $SC = LC$. De plus les triangles réctilignes semblables SFl, SDL, donneront pareillement LS ou $Ll. LD :: Sl$ ou $Pl. lF$ ou $El = \frac{LD \times Pl}{Ll}$

Donc ayant déja $El = \frac{Ll \times Ll}{2LR}$, l'on aura enfin $\frac{LD \times Pl}{Ll} = \frac{Ll \times Ll}{2LR}$, ou $Pl = \frac{Ll \times Ll \times Ll}{2LR \times LD}$. Donc aussi en substituant cette valeur

valeur de Pl dans la formule générale $f = \frac{4ph \times Pl}{Ll \times Ll}$ des art. 4, 5, 6, & 8. l'on aura $f = \frac{2ph \times Ll}{LR \times LD}$. De sorte que si présentement on appelle LR, r; Ll, ds; & LD, dx; l'on aura de même en général $f = \frac{2phds}{rdx}$ pour la regle de comparaison des Forces centrales avec les pesanteurs des corps *Ce qu'il falloit trouver.*

SCHOLIE.

X. Afin de n'être pas obligé de recourir aux Mémoires de 1700. ni de 1693. qu'ils supposent pour la preuve de la Regle de l'art. 7. où l'on vient de les citer, voici encore une autre démonstration de cette Regle. *Démonstration de la regle des Mem. de 1700. raportée ci-dessus art 7.*

Toutes choses demeurant les mêmes que ci-dessus art. 8. soient de plus les Courbes GHI, OVW, décrites par les corps H, V, mûs suivant Hh, Vu, en tendant toûjours aux centres A, B, avec des forces lesquelles les empêchent de suivre les tangentes HK, VT, en les retirant ou repoussant incessamment vers ces Courbes, de maniére à leur faire parcourir Kh, Tu, paralleles à AH, BV, dans les instans qu'ils parcourent effectivement les élemens Hh, Vu, de ces mêmes Courbes. Tout le reste demeurant comme on le voit dans les Figures 1, 2, 3, 4. soient donc FIGURE I. II. III. IV.

Les corps mûs en lignes courbes . . . $L, H, V, E.$

Les quantités dont ils s'approchent de ces Courbes en s'éloignant de leurs tangentes à chaque instant. } $Pl, Kh, Tu, Fe.$

Ces mêmes instans . . . . . . $dt, dt, d\theta, d\theta.$

Les Forces centrales en vertu desquelles se font ces approches instantanées . . . . } $f, \phi, \phi, \phi,$

Les masses de ces corps . . . . $m, m, m, \mu.$

Ces noms supposés, l'on aura { $Pl. Kh :: f. \phi.$ / $Kh. Tu :: dt^2. d\theta^2.$ / $Tu. Fe :: \mu. m.$ }

Donc en multipliant ces trois analogies par ordre, l'on

aura auſſi $Pl. Fe :: \mu f dt^2 . m\phi d\theta^2$. Et par conſéquent $Pl \times m\phi d\theta^2 = Fe \times \mu f dt^2$, ou $\frac{f dt^2}{m \times Pl} = \frac{\phi d\theta^2}{\mu \times Fe}$, ainſi que dans l'art. 7.

On ne s'arrêtera point ici aux Corollaires qu'on pourroit tirer de cette Regle, ne s'agiſſant ici que de celle qu'on vient de trouver dans l'art. 9. En voici encore deux Démonſtrations différentes dans les deux Solutions ſuivantes.

AUTRE SOLUTION.

Regle de comparaiſon des forces centrales entr'elles.

FIG. I.

XI. Toutes choſes demeurant les mêmes que dans les art. 4, & 9. les triangles rectilignes ſemblables RLE, lFE, donneront $RL. RE :: lF. lE$. De ſorte que l'angle (*hyp.*) infiniment petit LRE rendant $RL = RE$, l'on aura pareillement $lF = lE$. Donc la nature du cercle oſculateur en Ll, comme de tout autre, donnant $lE = \frac{LE \times LE}{ER + Rl} = \frac{Ll \times Ll}{2RL}$, l'on aura de même $lF = \frac{Ll \times Ll}{2RL}$ (*art.* 9.) $= \frac{ds^2}{2r}$. Donc les triangles rectilignes ſemblables SDL, SFl, donneront auſſi SL ou $lL(ds). DL(dx) :: Sl. Fl :: f$ (force ſuivant SC ou LC). $\frac{fdx}{ds}$ (force ſuivant Fl). De ſorte que l'eſpace $Fl \left(\frac{ds^2}{2r}\right)$ eſt ce qu'il y en a de parcouru en vertu de cette force $\left(\frac{fdx}{ds}\right)$ pendant l'inſtant dt que le corps L décrit l'arc élementaire Ll au lieu de ſuivre la tangente LQ, comme il auroit fait ſans cette force ou ſans f. Donc cette force inſtantanée $\left(\frac{fdx}{ds}\right)$ lui ayant été continuellement appliquée pendant ce tems dt, & d'ailleurs étant conſtant (*art.* 10.) que des eſpaces ainſi parcourus par un même corps en vertu de forces toûjours les mêmes le long de chacun de ces eſpaces, & toûjours appliquées (ainſi qu'on le penſe ordinairement de la peſanteur), ſont comme les produits de ces forces par les quarrés des tems de leur appliquation non interrompuë; l'on aura déja $\frac{ds^2}{2r} = \frac{fdx}{ds} \times dt^2$, ou $f = \frac{ds^3}{2rdx\,dt^2}$ pour une Regle génerale du raport des forces centrales entr'elles, tendantes vers C ou directement à

contre-sens, quelques variées qu'elles soient sur une même Courbe quelconque *MLN*, en conséquence de la varieté des vitesses avec lesquelles cette Courbe peut être décrite par un même corps.

XII. *Autrement.* Soient de plus les ordonnées CL, Cl, &c. appellées y; & par conséquent $Dl = dy$. Les triangles rectilignes semblables SDL, SFl, donneront ici LD (dx). SD ou lD (dy) :: $lF \left(\frac{ds^2}{2r}\right)$. $SF = \frac{dyds^2}{2rdx}$. Et SL ou lL (ds). SD ou lD (dy) :: $Sl.SF$ :: f (force suivant SC ou LC). $\frac{fdy}{ds}$ (force suivant SF). Donc on aura encore (comme ci-dessus art. 11.) $\frac{dyds^2}{2rdx} = \frac{fdy}{ds} \times dt^2$, ou $f = \frac{ds^3}{2rdxdt}$, c'est-à-dire, encore la même Regle que dans le précédent art. 11.

Autre démonstration de la même Regle.

XIII. *Autrement encore.* Les triangles rectilignes semblables SDL, SFl, donneront aussi DL (dx). SL ou Ll (ds) :: $Fl\left(\frac{ds^2}{2r}\right)$. $Sl = \frac{ds^3}{2rdx}$. Donc on aura encore (comme ci-dessus art. 11.) $\frac{ds3}{2rdx} = fdt^2$, ou $f = \frac{ds^3}{2rdxdt^2}$, c'est-à-dire, encore la même Regle que dans les deux deeniers art. 11, & 12.

Troisiéme démonstration de la même Regle.

XIV. Concevons présentement comme dans la premiere Solution, art. 1, 2, & 3. que HL est une hauteur d'où le corps L tombant, il acquieroit en L une vitesse égale à ce que sa rotation suivant MLN lui en donne en L suivant LQ. Cela étant, si l'on suppose aussi LQ double de HL, non-seulement cette vitesse demeurant uniforme pourroit porter ce corps de L en Q suivant LQ, dans le tems qu'il auroit mis à tomber de H en L en vertu de sa seule pésanteur; mais encore ce tems seroit à ce qu'il en auroit mis à parcourir LF ou LS de cette même vitesse uniforme, c'est-à-dire, à ce qu'il en met à parcourir effectivement Ll, comme LQ est à LF ou LS ou Ll: de sorte qu'en prenant LQ pour le tems que le corps L mettroit à tomber de H en L, l'on aura aussi Ll pour l'instant qu'il emploïe à parcourir cet élement de la Courbe MLN

Regle de comparaison des forces centrales avec les pesanteurs des corps, tirée de la précédente en considérant encore les élemens des Courbes que ces corps décrivent, comme Courbes eux-mêmes.

Qu'on le ſuppoſe décrire. Donc ſi l'on prend cet inſtant pour le premier de ſa chute pendant lequel il parcoure $H\lambda$, l'on aura $\overline{LQ}^2 . \overline{Ll}^2 :: HL . H\lambda = \frac{HL \times \overline{Ll}^2}{\overline{LQ}^2}$ (à cauſe qu'on ſuppoſe ici $Ll = ds$, & $LQ = 2HL = 2h$) $= \frac{ds^2}{4h}$.

Mais cet inſtant que le corps L emploïe à parcourir Ll, eſt auſſi celui que ces forces (*art.* 11, 12, 13.) $\frac{fdx}{ds}, \frac{fdy}{ds}, f$, emploïent à lui faire parcourir Fl, SF, Sl, d'un mouvement accéleré à la maniere de celui que ſa péſanteur lui donneroit de H en λ pendant ce même inſtant. Donc ſa péſanteur (appellée p) eſt à chacune de ces forces, comme $H\lambda\ (\frac{s^2}{4h})$ eſt à chacune des longueurs $Fl(\frac{ds^2}{2r})$, $SF(\frac{dyds^2}{2rdx})$, $Sl(\frac{ds^3}{2rdx})$, qui leur répondent dans les art. 11, 12, 13. c'eſt à dire,

$$1^{\circ}.\ p.\ \frac{fdx}{ds} :: H\lambda\ (\frac{ds^2}{4h}).\ Fl\ (\frac{ds^2}{2r}).$$
$$2^{\circ}.\ p.\ \frac{fdy}{ds} :: H\lambda\ (\frac{ds^2}{4h}).\ SF\ (\frac{dyds^2}{2rdx}).$$
$$3^{\circ}.\ p.\ f :: H\lambda\ (\frac{ds^2}{4h}).\ Sl\ (\frac{ds^3}{2rdx}).$$

Et toutes ces Analogies donnent également chacune $f = \frac{2hpds}{rdx}$, qui eſt la même Regle de comparaiſon des forces centrales des corps avec leurs péſanteurs, qu'on a déja trouvée dans la Solut. 1. art. 9. *Ce qu'il falloit encore trouver.*

SCHOLIE.

Indentité de la precédente Regle de comparaiſon des forces centrales entr'elles trouvée dans les art. 11, 12 & 13. avec celle qui ſe trouve pour le même ſujet dans les Me-

XV. On voit dans cette ſeconde Solution, non-ſeulement (*art.* 14.) le raport de la péſanteurs d'un corps quelconque aux forces centrales qu'il auroit ſur une Courbe auſſi quelconque qu'il décriroit de telle viteſſe qu'on voudroit, c'eſt-à-dire, uniforme ou variée à diſcrétion, en tendant toûjours vers un même point (quel qu'il fut) du plan de cette Courbe; mais encore) *art.* 11, 12, 13.) le raport de ces mêmes forces entr'elles, lequel s'exprimant ici par $f = \frac{ds^3}{2rdxdt^2}$, marque que ces forces centrales (f)

doivent toûjours être entr'elles comme les fractions correspondantes $\frac{ds^3}{rdxdt^2}$; ce qui s'accorde avec la Regle $f = \frac{ds^3}{rdxdt^2}$ que j'ay donnée de ce dernier raport dans les Mem. de 1701. pag. 21. & 22. où l'on appelloit n, y, dz, ce que l'on appelle ici f, r, dx. Le signe d'égalité dans les choses disparates & hétérogenes (telles que sont ces forces & les grandeurs qui les expriment ici) ne signifiant que des égalités de raports. De sorte que $f = \frac{mds^3}{rdxdt^2}$ ne signifie autre chose non-plus, sinon que le raport des forces centrales f entr'elles, est toûjours le même que celui qui se trouve entre les fractions correspondantes $\frac{ds^3}{rdxdt^2}$, quelque nombre (entier ou rompu, &c.) ou quelqu'autre grandeur constante que m puisse signifier: soit que m signifie l'unité, comme dans la formule $f = \frac{ds^3}{rdxdt^2}$ de 1701. où qu'elle signifie un demi, comme dans la formule $f = \frac{ds^3}{2rdxdt^2}$ des articles 11, 12, 13. sans qu'il s'ensuive $\frac{ds^3}{rdxdt^2} = \frac{ds^3}{2rdxdt^2}$, ou $1 = \frac{1}{2}$, quoique la force f soit ici la même de part & d'autre; parceque ce ne seroient plus ici des égalités de raports, mais de grandeurs homogenes entr'elles. Aussi cette expression $f = \frac{mds^3}{rdxdt^2}$ du raport des forces centrales entr'elles, se trouvera-t-elle comme les précédentes $f = \frac{ds^3}{rdxdt^2}$, $f = \frac{ds^3}{2rdxdt^2}$.

Mémoires de 1701.

Car puisque les espaces Fl $\left(\frac{ds^2}{2r}\right)$ parcourus (*art.* 11.) en vertu des forces instantanées $\frac{fdx}{ds}$, continuellement appliquées chacune suivant le sien, & toûjours les mêmes chacune pendant l'instant dt de son application non interrompuë, sont entr'eux (*art.* 10.) comme les produits $\frac{fdx}{ds} \times dt^2$ de chacune de ces forces par le quarré de son instant; & que d'ailleurs ces espaces $\frac{ds^2}{2r}$ sont aussi ent'eux comme leurs

produits $\frac{mds^2}{r}$ par quelque grandeur constante $2m$ que ce soit ; l'on aura aussi ces produits $\frac{mds^2}{r}$ en même raison que les autres $\frac{fdx}{ds} \times dt^2$: ce qui donnera $\frac{mds^2}{r} = \frac{fdx}{ds} \times dt^2$, ou $f = \frac{mds^3}{rdxdt^2}$, par la même raison qu'on a trouvé ci-dessus (*art.* 11.) $\frac{ds^2}{2r} = \frac{fdx}{ds} \times dt^2$, ou $f = \frac{ds^3}{2rdxdt^2}$, & dans les Mem. de 1701. $\frac{ds^2}{r} = \frac{fdx}{ds} \times dt^2$, ou $f = \frac{ds^3}{rdxdt^2}$; tout cela ne signifiant autre chose sinon que les forces centrales f tendantes suivant des lignes qui passent toutes par un point quelconque du plan de quelque Courbe que ce soit, décrite avec telle variation de vitesse qu'on voudra, seront par tout entr'elles comme les fractions correspondantes $\frac{ds^3}{rdxdt^2}$, ainsi qu'on le vient de dire, & qu'on l'avoit déja dit dans les Mem. de 1701.

Solution de l'art. 14. sans toucher au raport des forces centrales entr'elles.

XVI. La seconde Solution précédente se peut encore trouver sans toucher à ce raport des forces centrales entr'elles, en reprenant seulement ici quelque chose de ce qui y a conduit dans l'art. 12. Et comme il y a peu de chose à répéter de cet article, nous l'allons faire pour rendre ici cette Solution complette, en appliquant seulement l'art. 14. à ce que nous allons démontrer, comme il se trouve appliqué à l'art 12.

Toutes choses demeurant donc encore les mêmes que dans les art. 4. & 9. les triangles rectilignes semblables RLE, lFE, donneront $RL . RE :: lF . lE$. De sorte que l'angle (*hyp.*) infiniment petit LRE rendant $RL = RE$, l'on aura pareillement $lF = lE$. Donc le cercle osculateur de la Courbe MLN en son élement Ll pris, non comme un côté droit de polygone, mais comme un véritable arc de cercle, donnant (par sa nature de cercle) $lE = \frac{LE \times LE}{ER + Rl} = \frac{Ll \times Ll}{2RL}$, l'on aura de même $lF = \frac{Ll \times Ll}{2RL}$ (*art.* 9.) $= \frac{ds^2}{2r}$.

De plus les triangles rectilignes semblables SDL, SFl,

donneront aussi DL (dx). SD ou lD (dy) : : Fl $(\frac{ds^2}{2r})$. $SF = \frac{dyds^2}{2rdx}$. Et SL ou Ll (ds). SD ou lD (dy) : Sl. SF : : f (force suivant SC ou LC). $\frac{fdy}{ds}$ (force suivant SF).

Ajoûtez à ceci l'art. 14. & il en résultera, comme de l'art. 12. La formule $f = \frac{2hpds}{rdx}$ trouvée dans ce même art. 14. & dans l'art. 9.

Cet art. 16. n'est que pour faire sentir comment on auroit pû se passer de la Regle des forces centrales entr'elles, pour trouver les trois Solutions de l'art. 14. Ce qu'on vient de dire de la seconde, se dira de même de la premiere & de la troisiéme, en se servant des art. 11. & 13. comme l'on vient de faire de l'art. 12.

TROISIE'ME SOLUTION.

XVII. Jusqu'ici nous avons regardé la force centrale du corps L en chaque point L de la Courbe MLN qu'on le suppose décrire de telle vitesse qu'on voudra, comme une espece de pésanteur ou de force constante tendante vers C, laquelle agissant incessamment sur ce corps, lui feroit parcourir d'un mouvement arihmetiquement accéléré le côté LK du parallelogramme PK, ou son opposé Pl, pendant l'instant que libre en L, sa vitesse de rotation en ce point L suivant LQ, lui feroit parcourir d'un mouvement uniforme la partie infiniment petite LP de cette tangente; & le mouvement résultant de ces deux-là suivant l'élement Ll, devant se faire en ligne courbe, nous avons été obligés de regarder cet élement & les autres de la Courbe MLN, comme veritablement courbes en ces endroits, & la tangente ILQ au seul point L, comme celle suivant laquelle la vitesse de rotation du corps L tend à l'emporter.

Démonstration de la même Regle de comparaison des forces centrales avec les pésanteurs des corps, tirée présentement de la considération des Courbes sous la forme de polygones infiniti-lateres rectilignes

FIG. V.

Mais si l'on veut regarder cette Courbe MLN comme un polygone infiniti-latere, dont les élément ML, Ll, &c. soient autant de petits côtés droits les plus petits qui se puissent supposer; en ce cas le petit côté ML prolongé vers T, devenant la tangente suivant laquelle la vitesse

de rotation en *L* du corps *décrivant*, tend à l'emporter d'un mouvement uniforme; il lui faut ſuppoſer encore une autre force ſuivant *LC*, capable de lui faire parcourir auſſi d'un mouvement uniforme le côté *LG* du parallelogramme *YG*, ou ſon oppoſé *Yl*, pendant le même inſtant que ſa viteſſe de rotation emploïeroit à lui faire parcourir L *Y*, ou qu'il emploïe effectivement à parcourir *Ll*. Or ſi l'on conſidére que la viteſſe précédente (*Solut. 1. & 2.*) de ce corps *L*, accélerée de *P* en *l* à la maniere de celle des chutes des corps péſans, devroit lui donner en *l* une viteſſe qui uniforme ſeroit capable de lui faire parcourir *Yl* double de *Pl*, dans un inſtant égal à celui qu'il auroit mis à tomber (pour ainſi dire) de *P* en *l* en vertu de ſa ſeule force centrale regardée comme une eſpece de péſanteur tendante en *C*, ou qu'il a effectivement mis à parcourir *Ll*; on verra que du concours de cette viteſſe uniforme en *L* ſuivant *LG*, avec celle de rotation ſuivant *LY*, ce corps non-ſeulement parcourroit la diagonale *Ll* du parallelogramme *YG* pendant ce même inſtant; mais auſſi qu'il arriveroit en *l* avec la même viteſſe que s'il arrivoit (comme ci-deſſus Solut. 1. & 2.) par le concours de ſa viteſſe de rotation ſuivant *LQ*, avec la précédente viteſſe accélerée de *P* en *l*. Donc ce corps *L* décrira l'élement L*l* dans des inſtans égaux, & avec une même viteſſe en *l*, ſoit qu'il le décrive par le concours de cette viteſſe accélerée de *P* en *l* avec ſa viteſſe uniforme de rotation ſuivant *LQ*, ou qu'il le décrive par le concours de cette viteſſe uniforme ſuivant *LY* avec une autre pareillement uniforme ſuivant *LG* ou *Yl*, égale à l'acquiſe en *l* par cette accéleration. Donc auſſi les deux côtés *LY*, *LG*, du parallelogramme *YG*, ſont entr'eux comme ces deux viteſſes uniformes, ou (ce qui revient au même) comme les forces productrices de ces viteſſes : c'eſt-à-dire, que *LY* eſt à *LG*, comme la force acquiſe en *L* par la chûte de *H* en *L* du corps *L* en vertu de ſa ſeule péſanteur, eſt à ſa force acquiſe en *l* par une ſemblable chute de *P* en *l* en vertu de ſa ſeule force centrale.

VIXII.

XVIII. Or il est manifeste que la pesanteur d'un corps agissant également sur lui dans tous les instans de sa chute, & tous ces efforts égaux chacun à sa pesanteur, se conservant & s'accumulant (pour ainsi dire) dans toute la durée de sa chute, leur nombre à chaque instant doit être comme le nombre des instans écoulés depuis le commencement de cette même chute jusqu'à cet instant; & par conséquent leur somme, c'est-à-dire, la force aquise de ce corps à chaque instant doit être égale au produit de sa pésanteur par le nombre de ces instans, ou par la durée de sa chute jusqu'à ce même instant. *Continuation de la même démonstration*

On sçait aussi que la force totale de ce corps en *L*, aquise par sa chute de *H* en *L* en vertu de sa seule pésanteur, seroit seule capable de lui faire parcourir *LT* double de *HL* d'une vitesse uniforme égale à ce qu'il en auroit aquis en *L* en vertu de sa chute, & dans un tems égal à celui de cette chute de *H* en *L*. Donc la force totale de ce corps à la fin de sa chute en *L* en vertu de sa seule pésanteur, est égale au produit de sa pésanteur par le tems qu'il emploïeroit à parcourir *LT* double de *HL* d'une vitesse uniforme égale à ce qu'il en auroit ainsi aquis en *L*, c'est-à-dire (*hyp.*) égale à sa vitesse de rotation en *L*.

On prouvera de même que la force de ce corps aquise en *l* par son espece de chute de *P* en *l* en vertu de sa seule force centrale, doit aussi être égale au produit de cette force centrale par le tems qu'elle emploïeroit à le faire ainsi tomber de *P* en *l*, ou (*hyp.*) que sa vitesse uniforme de rotation emploïeroit à lui faire parcourir *LP* ou *LY*.

Donc en prenant les longueurs *LT*, *LY*, pour le tems que le corps *L* emploïeroit à les parcourir de cette vitesse uniforme de rotation; *p*, pour la pésanteur de ce corps; & *f*, pour sa force centrale en *L* suivant *LC*; l'on aura $p \times LT$ pour la force totale de ce corps aquise en *L* par sa chute de *H* en *L* en vertu de sa seule pésanteur; & $f \times LY$ pour sa force totale pareillement aquise en *l* par une semblable chute de *P* en *l* en vertu de sa seule force centrale. Donc aussi

(*art.* 17.) $LY. LG :: p \times LT. f \times LY.$ ou $f = \frac{p \times LT \times LG}{LY \times LY}$ (à cause qu'on suppose ici $LT = 2HL$, & $LG = Yl$) $= \frac{2p \times HL \times Yl}{LY \times LY}$ $= \frac{2p \times HL \times Yl}{Ll \times Ll}$.

Conclusion. XIX. Cela étant, si l'on prend (comme l'on vient de faire art. 17.) la Courbe MLN pour un polygone infinitilatere, dont RL, Rl, soient deux rayons de sa Dévelopée, & que lZ soit un arc de cercle décrit du centre L; la ressemblance des triangles LRl, lLZ, donnera $RL. Ll :: Ll. lZ = \frac{Ll \times Ll}{RL}$. Et si l'on prolonge Cl jusqu'à la rencontre en X de la tangente LT, la ressemblance des triangles XDL, XZl, donnera aussi $DL. LX$ ou $Ll :: Zl \left(\frac{Ll \times Ll}{RL}\right). Xl = \frac{Ll \times Ll \times Ll}{RL \times DL}$. Mais les triangles XYl, XLC, que Yl (*hyp.*) parallele à LC, rend semblables, donnant $Xl. Yl :: XC. LC.$ Et l'angle XCL (*hyp.*) infiniment petit, rendant de plus $XC = LC$; l'on aura pareillement $Xl = Yl$. Donc aussi $Yl = \frac{Ll \times Ll \times Ll}{RL \times DL}$. Par conséquent en substituant cette valeur de Yl dans la formule $f = \frac{2p \times HL \times Yl}{Ll \times Ll}$ qu'on vient de trouver à la fin de l'art. 18. l'on aura de même $f = \frac{2p \times HL \times Ll}{RL \times DL}$. Donc en appellant encore HL, h; RL, r; Ll, ds; & DL, dx; l'on aura encore ici $f = \frac{2phds}{rdx}$ pour Regle génerale de comparaison des forces centrales avec les pésanteurs des corps, comme dans les art. 9. & 14. *Ce qu'il falloit encore trouver.*

SCHOLIE.

Regle génerale du raport des forces centrales entr'elles. XX. Puisque (*art.* 18.) $f \times LY$ est la force totale du corps L, aquise en l par sa chute (pour ainsi dire) de P en l en vertu de sa seule force centrale f, & que LY exprime l'instant que cette force centrale emploïeroit à lui faire parcourir Yl d'un mouvement uniforme, ou que ce même corps emploïe à parcourir effectivement Ll; si l'on prend dt pour cet instant, l'on aura fdt pour la force qui

pourroit lui faire parcourir ainsi Yl d'un mouvement uniforme pendant ce même instant ; & par tout de même. Or on sçait qu'en ce cas le produit fdt^2 d'une telle force fdt par son instant dt, est toûjours proportionel à cette Yl correspondante. Donc ici $\frac{fdt^2}{Yl}$ est une fraction constante égale, par exemple, à telle grandeur constante m qu'on voudra, c'est-à-dire $\frac{fdt^2}{Yl} = m$; & par conséquent aussi $f = \frac{m \times Yl}{dt^2}$. Mais on vient de trouver (*art.* 19.) $Yl = \frac{Ll \times Ll \times Ll}{RL \times DL}$. Donc enfin $f = \frac{m \times Ll \times Ll \, Ll}{RL \times DL \times dt^2}$: de sorte qu'en appellant encore RL, r; DL, dx; & Ll, ds; l'on aura de même $f = \frac{mds^3}{rdxdt^2}$ pour la Regle génerale du raport des forces centrales entr'elles, ainsi qu'on l'a déja trouvée sur la fin de l'art. 15. Ce qui fait voir ici, comme là, que les forces centrales d'un même corps quelconque suivant des ordonnées concourantes en quelque point que ce soit du plan d'une Courbe aussi quelconque qu'il décriroit avec telle variation de vitesses que ce fût, doivent toûjours être entr'elles comme les fractions $\frac{ds^3}{rdxdt^2}$ correspondantes.

XXI. Il est encore à remarquer que cette même Regle du raport des forces centrales entr'elles, se peut encore tirer de celle du raport de ces forces aux pésanteurs des corps qui en sont affectés, trouvée ci-dessus art. 9. 14. & 19. Car $2p$ étant constant dans cette Regle $f = \frac{2phds}{rdx}$, elle fait déja voir que sur une même Courbe quelconque décrite par un même corps aussi quelconque avec telle varieté ou variation de vitesses que ce soit, les forces centrales (f) doivent toûjours être entr'elles comme les fractions correspondantes $\frac{hds}{rdx}$. Mais les hauteurs h d'où ce corps devroit tomber pour aquerir à la fin de ses chutes les mêmes vitesse qu'il a à chaque point de la Courbe qu'il décrit, étant (suivant Galilée) comme les quarrés vv de ces vitesses que j'appelle v; si l'on substituë vv au

La même regle tirée de celle du raport de ces mêmes forces centrales aux pésanteurs des corps où ces forces se trouvent

lieu de h dans la fraction précédente $\frac{hds}{rdx}$, il en résultera celle-ci $\frac{vvds}{rdx}$ qui suivra aussi toûjours la raison de celle-là. Donc les forces centrales (f) seront de même ici toûjours entr'elles comme les fractions $\frac{vvds}{rdx}$ correspondantes. Mais on sçait d'ailleurs que les vitesses (v) avec chacune desquelles chaque élement Ll (ds) est parcouru pendant chaque instant (dt), sont aussi toûjours entr'elles comme les fractions $\frac{ds}{dt}$ correspondantes. Donc en substituant cette fraction dans la présente à la place de v, on trouvera encore ici les forces centrales (f) en raison des fractions correspondantes $\frac{ds^3}{rdxdt^2}$, ou $\frac{ds^3}{2rdxdt^2}$, ou $\frac{mds^3}{rdxdt^2}$, ainsi que les donnent les Regles $f=\frac{ds^3}{rdxdt^2}$, $f=\frac{ds^3}{2rdxdt^2}$, & $f=\frac{mds^3}{rdxdt^2}$, trouvées dans les Mem. de 1701. pag. 21. 22. & ci-dessus art. 11, 12 13, 15, & 20. lesquelles ne signifient toutes que le même raport de forces centrales entr'elles.

Pour ce qui est de la Regle $f=\frac{2phds}{rdx}$ *du raport de ces mêmes forces centrales avec la pésanteur de ce corps, trouvée ci-dessus dans les art. 9. 14. 19. on la trouvera encore de deux autres manieres ci-aprés dans les art. 47. & 56. En attendant en voici seulement quelques Corollaires où ces pésanteurs seront prises à l'ordinaire pour des forces finies.*

COROLLAIRES.

De la Regle $f=\frac{2phds}{rdx}$ *trouvée dans les art.* 9, 14, *&* 19. *Fig.* 1, *&* 5.

Premier cas où les forces centrales doivent être infinies par raport aux pésanteurs. Figure 1. V.

XXII. *Corol.* 1. Il suit en géneral de cette Regle.

1°. Que lorsque les forces centrales agissent suivant des rayons ou des directions qui touchent les Courbes qu'elles font décrire aux corps où elles se trouvent ; alors ds se trouvant infinie par raport à dx qui pour lors devient nulle par raport à cet élement ds de la Courbe en question, la valeur $\frac{phds}{rdx}$ de la force centrale (f) du corps qu'on sup-

pose décrire cette Courbe, devient aussi infinie par raport à sa pésanteur, soit que le rayon (r) de la Dévelopée de cette même Courbe soit fini ou zero, tout le reste $2ph$ étant (*hyp.*) fini dans cette fraction.

2°. Que non-seulement en ces points d'attouchement, mais encore par tout où le rayon (r) de la Dévelopée de la Courbe en question sera zero, les forces centrales (f) du corps qui la décrira, seront encore infinies par raport aux pésanteurs; puisque leur valeur generale $\frac{2phds}{rdx}$ le sera toûjours aussi pour lors, à cause que la grandeur $2ph$ y sera toûjours finie, & que ds ne peut jamais être moindre que dx. *Second cas où les forces centrales doivent encore être infinies par raport aux pésanteurs.*

3°. Au contraire si le rayon (r) de la Dévelopée de la Courbe en question se trouvoit infini, la force centrale (f) qui répondroit au point de cette Courbe où ce rayon osculateur aboutiroit, seroit alors seulement finie ou zero, selon que le rayon ou la direction de cette force toucheroit cette Courbe en ce point, ou non: Dans le premier cas cette force seroit finie ou de même genre que la pésanteur, parce qu'alors ds seroit infinie par raport à dx comme r le seroit par raport à h; & dans le second cette force seroit nulle ou zero par raport à la pésanteur, parce qu'alors la fraction $\frac{2hds}{dx}$ le seroit par raport à r. *Cas où les forces centrales ne peuvent être que finies ou nulles.*

Le premier de ces deux cas est aussi celui du mouvement d'un corps suivant une ligne droite qui passeroit par le centre de ces forces, par exemple, suivant une verticale qui passe par le centre de sa pésanteur, toute ligne droite pouvant être regardée comme une Courbe dont les rayons osculateurs sont par tout infinis; puisqu'une Courbe dont tous les rayons osculateurs deviendroient ainsi infinis, dégénereroit en ligne droite.

4°. Au contraire en tout autre cas que les précedens (*n.* 1, 2, & 3.) les forces centrales (f) seront toûjours finies tant que les pésanteurs (p) des corps où elles se trouvent, & leurs vitesses ou les hauteurs (h) qui les determinent aux differens points des Courbes que ces corps décrivent, seront finies, ainsi qu'on les suppose par tout dans *Cas où les forces centrales sont toûjours finies.*

cet écrit. Je dis tant que les pésanteurs (p) & les hauteurs (h) seront finies : parceque quand il n'y auroit qu'une de ces deux grandeurs p ou h qui fût infinie dans la Regle $f = \frac{2phds}{rdx}$, il est est manifeste que le rayon (r) de la Dévelopée de la Courbe en question, y devroit être infini pour que la force (f) y demeurât finie. Et si les deux grandeurs p & h sont toutes deux infinies dans cette Regle, il n'est pas moins clair que la force centrale (f) du corps *décrivant* où cela se trouveroit, seroit infinie dans tous les points de la Courbe qu'il décriroit, même en ceux où le rayon (r) de sa Dévelopée seroit infini, dx ne pouvant jamais être infinie par raport à ds.

Raport des forces centrales aux pésanteurs des corps, lorsque les directions de ces forces sont suivant les rayons osculateurs des Courbes que ces corps décrivent.

XXIII. *Corol.* 2. Il suit de la même Regle $f = \frac{2p'ds}{rdx}$ que lorsque le centre C des forces est en R, c'est-à-dire, lorsque les forces centrales du corps L qu'on suppose décrire la Courbe MLN, tendent suivant les rayons RL correspondans de la Dévelopée de cette Courbe, ou que leur centre C est sur cette Dévelopée; alors LD se confondant avec Ll, & rendant par là $dx = ds$, l'on aura $f = \frac{2ph}{r}$, ou $f.p :: 2h.r :: h.\frac{1}{2}r$. C'est-à-dire en géneral, qu'alors en chaque point L de quelque Courbe MLN que ce soit, la pésanteur du corps L qu'on suppose la décrire en tendant toûjours suivant le rayon LR, correspondant de la Dévelopée de cette Courbe, sera à sa force centrale ou de tendance suivant LR, comme la moitié de ce rayon de Dévelopée, à la hauteur d'où ce corps tombant auroit acquis à la fin de sa chute en vertu de sa seule pésanteur, une vitesse égale à celle (quelle qu'elle soit) qu'il a effectivement en chaque point L suivant l'élement correspondant Ll de cette même Courbe MLN.

Cas où les forces centrales dirigées suivant les rayons osculateurs des Courbes en question, sont égales entr'elles.

XXIV. *Corol.* 3. Donc lorsque de telles hauteurs (h) seront comme les correspondans des rayons (r) de la Développée de cette Courbe MLN, c'est-à-dire, lorsque les vitesses le long de cette Courbe MLN seront comme les racines de ces rayons correspondans; les forces centrales

tendantes ſuivant ces mêmes rayons, ſeront égales entr'elles : puiſque le raport de h à $\frac{1}{2}r$, ſe trouvant alors conſtant, celui de f à p conſtante le ſeroit de même.

Cas où les forces centrales d'un même corps ſur une même courbe, ſeroient non-ſeulement égales entr'elles, mais auſſi à la péſanteur de ce corps.

XXV. *Corol.* 4. D'où il ſuit de plus que toutes ces forces du corps L ſeroient non-ſeulement égales entr'elles, mais auſſi égales chacune à la péſanteur de ce corps, ſi ce raport conſtant des hauteurs (h) aux moitiés des rayons (r) correſpondans de la Dévelopée de la Courbe MLN qu'on le ſuppoſe décrire avec les viteſſes que ces hauteurs déterminent, étoit un raport d'égalité : c'eſt-à-dire, ſi chacune de ces hauteurs (h) étoit égale à la moitié de chaque rayon (r) correſpondant de la Dévelopée de cette Courbe MLN; ou (ce qui revient au même) ſi les viteſſes de ce corps à chaque point L ſuivant cette Courbe, étoient chacune la même que celle qu'il acquieroit en vertu de ſa ſeule péſanteur en tombant de la hauteur de la moitié du rayon oſculateur correſpondant. Et réciproquement, &c.

Sur un cercle les forces centrales dirigées ſuivant ſes rayons, ſeroient à la péſanteur du corps qui les décriroit, comme chacune des hauteurs déterminatrices des viteſſes correſpondantes de ce corps ſur ce cercle, ſeroit au demi-rayon de ce même cercle; & par conſequent égales à cette péſanteur, quand cette hauteur le ſeroit à ce demi-rayon.

XXVI. *Corol.* 5. Il ſuit de tout cela que la Dévelopée du cercle ſe réüniſſant toute au centre de ce même cercle, non-ſeulement la force centrale du corps qui le décrira de quelque viteſſe que ce ſoit, en tendant toûjours ſuivant des lignes qui paſſent toutes par ce point, c'eſt-à-dire, ſuivant les rayons de ce cercle, ſera toûjours à la péſanteur de ce même corps, comme la hauteur déterminatrice de ſa viteſſe en chaque point de la circonférence de ce cercle, ſera à la moitié du rayon de ce même cercle; mais auſſi que lorſque cette hauteur ſe trouvera égale à la moitié de ce rayon, la force centrale du corps qui décrira ainſi ce cercle, devra étre de même égale à ſa péſanteur, ainſi que M. *Hugens* l'a trouvé, & pluſieurs autres après lui.

Il ſuit réciproquement que lorſque ces deux forces ſeront égales entr'elles, cette hauteur déterminatrice de la viteſſe du corps *décrivant*, ſera auſſi égale à la moitié du reyon du cercle qu'on le ſuppoſe décrire.

Ces forces centrales ainſi

XXVII. *Corol.* 6. Puiſque (*art.* 24.) les forces centrales ſuivant les rayons d'un cercle, qu'auroit un corps qui

dirigé sur un cercle, doivent aussi toûjours être entr'elles comme les quarrés des vitesses du corps décrivant.

le décriroit avec quelque varieté de vitesses que ce fût, seroient toûjours chacune à la pésanteur de ce corps, comme la correspondante des hauteurs déterminatrices de ses vitesses aux differens points de ce cercle, seroit au demi-rayon de ce même cercle, , il suit encore delà que ces forces centrales du corps *décrivant* doivent toûjours être entr'elles comme les correspondantes des hauteurs déterminatrices de ses vitesses sur le cercle qu'il décrit, & par consequent aussi comme les quarrés de ces mêmes vitesses, puisque ces quarrés suivent toûjours la raison de ces hauteurs dans l'hipothése de pésanteur constante dont il s'agit ici.

Maniére de rendre la Regle de comparaison des forces centrales aux pésanteurs des corps, trouvée dans les art. 9, 14, & 19 facilement applicable à toutes sortes de Courbes.

Fig. I.

XXVIII. *Corol.* 7. Pour rendre presentement la Regle generale $f = \frac{2phds}{rds}$ des art. 9, 14, & 19. facilement applicable à toutes sortes de Courbes, soit geométriques, soit mécaniques, ensorte qu'il suffise d'y introduire l'équation de chacune de ces Courbes pour avoir tout d'un coup le raport des forces centrales à la pésanteur absoluë du corps qui la décrit; il y faut substituer les six valeurs infiniment generales du rayon (r) de la développée de la Courbe *MLN* en question, lesquelles se trouvent dans les Mem. de 1701. art. 10. & 14. pag. 27. & 29, ou ce rayon s'appelle v. Pour cela outre $Ll = ds$, & $LD = dx$, il faut faut aussi supposer $LC = y$, avec l'arc circulaire $MG = z$ décrit du centre C, & d'un rayon quelconque $MC = a$; ce qui donnant $CG(a).CL(y) :: Gg(dz).LD(dx) = \frac{ydz}{a}$. changera déja cette équation $f = \frac{2phds}{rdx}$ en $f = \frac{2aphds}{rydz}$. Alors ces six valeurs de r substituées dans ces deux équations, sçavoir, les trois premieres dans la premiere, & les trois autres dans la seconde, les changeront en autant de Formules ou Regles toutes aussi generales pour comparer les forces centrales avec les pesanteurs absoluës du corps mûs en lignes courbes quelconques, & avec telle varieté de vitesses qu'on voudra: Les voici ces six Regles.

FORMULES

FORMULES OU REGLES

Infiniment generales des raports des Forces centrales avec les pésanteurs absolues des corps mûs de vîtesses variées à discrétion le long de telles Courbes qu'on voudra.

1°. $f = \frac{dxdyds + ydsddx - ydxdds}{ydydxds} \times 2ph.$

2°. $f = \frac{dsdx^2 + ydydds - ydsddy}{ydsdx^2} \times 2ph.$

3°. $f = \frac{dxds^2 + ydyddx - ydxddy}{ydxds^2} \times 2ph.$

4°. $f = \frac{2dzdyds + ydsddz - ydzdds}{ydydzds} \times 2ph.$

5°. $f = \frac{ydsdz^2 + aadydds - aadsddy}{yydsdz^2} \times 2ph.$

6°. $f = \frac{dzds^2 + dzdy^2 + ydyddz - ydzddy}{ydzds^2} \times 2ph.$]

Maniere de détailler les six Regles précedentes en une infinité d'autres, selon la varieté infinie de tout ce qu'on y peut supposer de constant.

XXIX. *Corol.* 8. Ces six Formules ou Regles des forces centrales comparées aux pésanteurs des corps mûs en lignes courbes, se diversifieront à l'infini selon ce qu'on leur suposera de constant, ainsi que celles des rayons osculateurs des art. 10. & 14. pag. 27. & 29. des Mem. de 1701. qu'on y vient d'introduire, se diversifient dans les art. 11. & 15. pag. 27. 28. 29. & 30. de ces mêmes Mem. Par exemple.

1°. Si l'on supose dx constante, c'est-à-dire $ddx = o$, la premiere de ces Formules du précedent art. 28. donnera $f = \frac{dyds - ydds}{ydyds} \times 2ph$; & la troisiéme, $f = \frac{ds^2 - yddy}{yds^2} \times 2ph$.

2°. Si l'on fait dy constante, c'est-à-dire $day = o$, la seconde de ces mêmes Formules generales du précédent article 28. donnera $f = \frac{dsdx^2 + ydydds}{ydsdx^2} \times 2ph$; la troisiéme, $f = \frac{dxds^2 + ydyddx}{ydxds^2} \times 2ph$; la cinquiéme, $f = \frac{ydsdz^2 + aadydds}{yydsdz^2} \times 2ph$; & la sixiéme, $f = \frac{dzds^2 + dzdy^2 + ydyddz}{ydzds^2} \times 2ph$.

3°. Si l'on fait ds constante, c'est-à-dire $dds = o$, la premiére des mêmes Formules generales de l'art. 28. don-

nera $f = \frac{dxdy + yddx}{ydydx} \times 2ph$; la seconde, $f = \frac{dx^2 - yddy}{ydx^2} \times 2ph$; la quatriéme, $f = \frac{2dydz + yddz}{ydydz} \times 2ph$; & la cinquiéme, $f = \frac{ydz^2 - aaddy}{yydz^2} \times 2ph$.

4°. Si l'on fait dz constante, c'est-à-dire, $ddz = 0$, ce qui est la même chose (*art.* 28.) que $\frac{dx}{y}$ constante, ou $yddx - dxdy = 0$: la premiere & la quatriéme des mêmes Regles du précedent art. 28. donneront $f = \frac{2dyds - ydds}{ydyds} \times 2ph$; la troisiéme & la sixiéme donneront pareillement aussi $f = \frac{ds^2 + dy^2 - yddy}{yds^2} \times 2ph$.

5°. Si l'on fait presentement le produit ydx constant, c'est-à-dire $dxdy + yddx = 0$, ou $ddx = -\frac{dxdy}{y}$; la substitution de cette valeur de ddx dans la premiere & dans la troisiéme des Formules generales du précedent art. 28. changera la premiere en $f = -\frac{dds}{dyds} \times 2ph$, & la troisiéme en $f = \frac{dx^2 - yddy}{yds^2} \times 2ph$.

6°. De même si l'on fait le produit $dxdy$ constant, c'est à-dire, $dxddy + dyddx = 0$, ou $ddx = -\frac{dxddy}{dy}$; la substitution de cette valeur de ddx dans la troisiéme des Formules generales du précedent article 28. donnera $f = \frac{ds^2 - 2yddy}{yds^2} \times 2ph$.

Cette même Formule se trouvera encore si l'on considere que cette hypothese de $dxdy$ constant, donnant aussi $dds \left(\frac{dxddx + dyddy}{ds}\right) = \frac{-dx^2ddy + dy^2ddy}{dyds}$; la substitution de cette valeur de dds, & de la valeur précedente de ddx dans la premiere des Formules generales du précedent article 28. la changera encore de même en celle-ci: $f = \frac{dxdy^2ds^2 - ydxds^2ddy + ydx^3ddy - ydxdy^2ddy}{ydxdy^2ds^2} \times 2ph$ (à cause de $-ds^2 + dx^2 = -dy^2$) $= \frac{dxdy^2ds^2 - 2ydxddy^2dy}{ydxdy^2ds^2} \times 2ph = \frac{ds^2 - 2yddy}{yds^2} \times 2ph$, comme ci-dessus nomb. 6.

C'est ainsi que les six Regles génerales de l'art. 28. en produiront de nouvelles à l'infini, selon la varieté infinie des termes constans que peut fournir $z^l y^m s^n dz^\lambda dx^p dy^q ds^r$; ce qui est presentement trop visible pour s'y arrêter davantage. Passons donc à quelques exemples qui en fassent voir l'usage : la seconde des Formules de cet article-ci nous suffira ; on se servira de même des autres à l'infini.

EXEMPLE I.

XXX. Soit la Spirale logarithmique ordinaire *MLN*, dont *C* soit le centre auquel tende sans cesse le corps qui la décrit de quelque vitesse que ce soit. Toutes choses demeurant les mêmes que ci-dessus art. 28. sçavoir $CL = y$, $LD = dx$, &c. la nature de cette Courbe étant de faire par tout des angles égaux avec ses ordonnées *CL*, & par consequent de rendre par tout la fraction $\frac{dy}{dx}$ constante ; si l'on suppose de plus chaque *dx* constante par raport aux immediatement suivantes de part & d'autre ; cette hypothese de $ddx = o$, rendra pareillement ici $ddy = o$. Donc cette même hypothese de *dx* constante donnant d'ailleurs (*art.* 29. *nomb.* 1.) $f = \frac{ds^2 - yddy}{yds^2} \times 2ph$ pour toutes sortes de Courbes, l'on aura pour celle-ci $f = \frac{ds^2}{yds^2} \times 2ph \frac{2ph}{y}$, ou $f.p :: h.\frac{1}{2}y$. C'est-à-dire que les forces centrales du corps *L* suivant *LC*, doivent être ici à sa pésanteur, comme les hauteurs (*h*) determinatrices de ses vîtesses en chaque point *L* suivant *Ll*, sont à la moitié de chacune des ordonnées correspondantes *LC* (*y*).

FIG. VI. *Sur la Spirale logarithmique, les forces centrales dirigées suivant les ordonnées ou par le centre de cette courbe, sont à la pésanteur du corps qui la décrit, comme les hauteurs déterminatrices de ses vîtesses à chaque point, sont à la moitié des ordonnées correspondantes.*

M. *De Fontenelle* a remarqué en faisant l'extrait de ceci, que la même chose se peut encore tirer immediatement de la troisiéme des Regles génerales de l'art. 28. sans y supposer de constant que la fraction $\frac{dy}{dx}$ renduë telle par la nature de la Courbe en question. En effet cette fraction donnant ici $dxddy = dyddx$, si l'on substituë un des membres de cette équation à la place de l'autre dans cette troisiéme Regle, cette même Regle se chan-

gera pour ici en $f = \frac{dxds^2}{ydxds^2} \times 2ph = \frac{2ph}{y}$: D'où résulte $f . p :: h . \frac{1}{2} y$. comme ci-dessus.

Les forces centrales dirigées, suivant une ordonnée quelconque de Spirale logarithmique & ensuite, suivant son Rayon osculateur correspondant, sont égales entr'elles, tant que les hauteurs déterminatrices des vitesses corespondantes du corps Décrivant *seront comme ces lignes.*

XXXI. Mais on a vû dans l'art. 23. que si les forces centrales du corps *L* tendoient suivant les rayons correspondans *LR* de la Dévelopée *PR* de la Spirale logarithmique *MLN* dont il est ici question, l'on auroit aussi pour lors $f . p :: h . \frac{1}{2} LR$. Donc sçachant d'ailleurs (*Anal. des infin. petits, art.* 91.) que les ordonnées *LC* de cette Spirale sont toutes proportionelles aux rayons correspondans *LR* de sa Dévelopée, il est visible qu'à chaque point *L* les forces centrales du corps *L* tendant successivement suivant l'ordonnée *LC* & suivant le rayon *LR* correspondans, seront égales entr'elles, tant que les hauteurs (*h*) déterminatrices des vîtesses en ce point pour l'un & pour l'autre de ces cas, seront comme ces lignes : c'est-à-dire, tant qu'au même point *L* la vîtesse (suivant *Ll*) de ce corps tendant vers *C*, sera à la vîtesse de ce même corps tendant vers *R*, comme la racine quarrée de *LC* à une pareille racine de *LR*; & ces hauteurs seront aussi proportionelles entr'elles.

Nouvelle preuve des art 26. & 27.

XXXII. Il est ici à remarquer que le cercle pouvant passer pour une espece de Spirale logarithmique perpendiculaire à toutes ses ordonnées, lesquelles seront ici tout à la fois les rayons de la Dévelopée de cette Spirale logarithmique & ceux de ce cercle au centre duquel toute cette Dévelopée se réüniroit; il suit encore de l'art. 30. ce qui a déja été trouvé dans l'art. 26. sçavoir que les forces centrales d'un corps quelconque suivant les rayons d'un cercle qu'il décriroit avec telle varieté ou variation de vîtesses qu'on voudroit, seroient toûjours chacune à sa pésanteur, comme la hauteur déterminatrice de sa vîtesse en chaque point correspondant de ce cercle, seroit au demi-rayon de ce même cercle; & conséquemment aussi que lorque cette hauteur se trouvera égale à ce demi-rayon de cercle, cette force centrale le sera pareillement égale à la pésanteur du corps qui le décrira.

Delà suit encore l'art. 27. ainsi qu'on l'a déja conclu de l'art. 26. qu'on voit renfermé dans celui-ci.

EXEMPLE II.

XXXIII. Soit en géneral *CLMLN* une Spirale Fermatienne quelconque, dont *C* soit le centre, aussi-bien que de l'arc infiniment petit *LD*, & du cercle *MEFM* repondant à telle revolution qu'on voudra de cette Spirale. Toutes choses demeurant les mêmes que ci-dessus art. 28. sçavoir $CL = y$, $LD = dx$, $Ll = ds$; soit la circonference $MEFM = c$, & son rayon *CM* ou $CE = a$.

Raport géneral de for es centrales aux pésanteurs des corps sur toutes sortes de Spirales Fermatienne suivant les ordonnées desquelles ces forces seroient dirigées.

Fig. VII.

L'on aura la somme $(\int Ee)$ des *Ee*, pour l'abscisse de cette circonference depuis le commencement des révolutions jusqu'en *E*; ce qui donnera $c . \int Ee :: a^m . y^m$. D'où résulte $cy^m = a^m \times \int Ee$ pour l'équation de ces Spirales en géneral. Donc $mcy^{m-1}dy = a^m \times Ee$. Mais $CL\,(y) . CE\,(a) :: LD\,(dx) . Ee = \frac{adx}{y}$. Donc aussi $mcy^{m-1}dy = \frac{a^{m+1}dx}{y}$, ou $dy = \frac{a^{m+1}dx}{mcy^m}$; ce qui donne $\frac{a^{2m+2}dx^2}{mmccy^{2m}} + dx^2 = dy^2 + dx^2 = ds^2$, ou $ds^2 = \frac{a^{2m+2} + mmccy^{2m}}{mmccy^{2m}} \times dx^2$; & de plus (en faisant *dx* constante) l'on aura $ddy = \frac{-a^{m+1}y^{m-1}dydx}{cy^{2m}} = \frac{-a^{m+1}dydx}{cy^{m+1}}$ (à cause de $dy = \frac{a^{+1m}dx}{mcy^m}$) $= \frac{-a^{2m+2}dx_2}{mccy^{2m+1}}$.

Donc cette hypothese de *dx* constante, donnant (*art.* 29. *nomb.* 1.) $f = \frac{ds2 - yddy}{yds^2} \times 2ph$, la substition de ces valeurs de ds_2 & de *ddy* dans cette formule, donnera aussi

$$f = \frac{\frac{a^{2m+2} + mmccy^{2m}}{mmccy^{2m}} \times dx^2 + \frac{a^{2m+2}}{mccy^{2n}} \times dx_2}{\frac{ya^{\cdot\cdot+2} + mmccy^{2m+1}}{mmccy^{2m}} \times dx^2} \times 2ph =$$

$$= \frac{m+1 \times a^{2m+2} + mmccy^{2m}}{ya^{2m+2} + mmccy^{2m+1}} \times 2ph$$

: c'est-à-dire en géneral pour toutes ces Spirales Fermatiennes à l'infini, $f . p :: h . \frac{ya^{2m+2}mmccy + {}^{2m+1}}{2m+2 \times a^{2m+2} + 2mmccy^{2m}}$.

Il n'y a plus qu'à détailler cette Formule ou Analogie par la ſubſtitution de telle valeur qu'on voudra donner à m, pour avoir le raport de p à f, c'eſt à-dire, de la péſanteur du corps qu'on ſuppoſe décrire la Spirale déterminée par cette valeur de m, aux forces centrales de ce même corps ſuivant les ordonnées de cette Spirale. Par exemple, la Spirale d'Archimede, qui eſt la premiere de ces Fermatiennes, ayant $m = 1$, l'Analogie précedente donnera pour elle $f.p :: h.\frac{ya^4 + ccy^3}{4a^4 + 2ccyy}$. Au contraire la premiere des Spirales hyperboliques Fermatiennes ayant $m = -1$, l'on aura pour elle $f.p :: h.\frac{ya^0 + ccy^{-1}}{2ccy^{-1}} :: h.\frac{y^3 + ccy}{2cc}$. Et ainſi de toutes les autres Spirales Fermatiennes, tant paraboliques que hiperbolique à l'infini.

On trouvera auſſi de même le raport des forces centrales aux péſanteurs des corps mûs ſuivant toutes les autres Spirales reſultantes de la géneration génerale qu'on en a donné dans les Mem. de 1704. pag. 69. &c.

EXEMPLE II.

Raport des forces centrales aux péſanteurs des corps ſur l'Ellipſe ordinaire, par un des foyers de laquelle ces forces ſeroient dirigées.
FIG. VIII.

XXXIV. Soit MLN l'Ellipſe ordinaire décrite par le corps L mû comme l'on voudra en tendant toûjours ſuivant des directions ou lignes droites qui paſſent toutes par un de ſes foyers, par exemple, par le foyer C; ſoit $MN = a$ le grand axe de cette Ellipſe, & la diſtance de ſes foyers entr'eux $= c$, Tout le reſte demeurant le même que ci-deſſus art. 28. ſçavoir les ordonnées CL, Cl, indéfiniment proches l'une de l'autre; l'arc LC décrit du centre C; $CL = y$, $LD = dx$, $Ll = ds$.

La nature de cette Ellipſe donnera $dy\sqrt{aa - cc} = dx\sqrt{cc - aa + 4ay - 4yy}$ pour ſon équation à ſon foyer C, ou (en prenant $bb = aa - cc$ ($bdy = dx\sqrt{4ay - 4yy - bb}$. Donc $\overline{4ay - 4yy} \times dx^2 = bbdy^2 + bbdx^2 = bbds^2$, ou $ds^2 = \frac{4ay - 4yy}{bb} \times dx^2$. Or en faiſant (ſi l'on veut) dx conſtante, cette même équation $bdy = dx\sqrt{4ay - 4yy - bb}$ donnera

de plus $ddy = \frac{2adydx - 4ydydx}{b\sqrt{4ay - 4yy - bb}} = \frac{2adx^2 - 4ydx^2}{bb}$. Donc cette même hypotheſe de dx conſtante, donnant (*art.29.nomb.1.*) $f = \frac{ds^2 - yddy}{yds^2} \times 2ph$, elle donnera auſſi dans le cas preſent $f = \frac{\overline{4ay - ayy} \times \overline{x^2 - 2ay + 4yy} \times dx^2}{\overline{4ay - 4yy} \times ydx^2} \times 2ph = \frac{2ay}{4ayy - 4y^3} \times 2ph = \frac{aph}{ay - yy}$, ou $f.p :: h.\frac{ay - yy}{a}$. D'où l'on voit que les forces centrales tendantes ſuivant des directions ou des lignes droites qui paſſent toutes par un des foyers de l'Ellipſe ordinaire, ſont toûjours à la péſanteur du corps qui la décrit, comme les hauteurs (h) déterminatrices des vîteſſes de ce corps le long de cette Courbe, aux fractions $\frac{ay - yy}{a}$ faites des y (CL) coreſpondantes aux points où il a effectivement les vîteſſes que ces hauteurs déterminent, c'eſt-à-dire, les mêmes vîteſſes qu'il acquieroit en tombant de ces hauteurs (h) en vertu de ſa ſeule péſanteur.

Nouvelle preuve des art 26 27. & 32.

XXXV. Si preſentement on ſupoſe que l'Ellipſe précedente (*art.* 34.) ſe change en un cercle dont C ſoit le centre, & MN (a) le diametre; en ce cas $CL(y)$ ſe trouvant le rayon (r) $\frac{1}{2}a$ de ce cercle, la formule $f = \frac{aph}{ay - yy}$ quon vient (*art.* 34.) de trouver, ſe changera ici en $f = \frac{aph}{\frac{1}{2}aa - \frac{1}{4}aa} = \frac{aph}{\frac{1}{4}aa} = \frac{4ph}{a} = \frac{4ph}{2r} = \frac{2ph}{r}$. Ce qui donnera ici $f.p :: h.\frac{1}{2}r$. C'eſt-à-dire que les forces centrales d'un corps qui décriroit un cercle avec telles vîteſſes qu'on voudroit, en tendant toûjours ſuivant les rayons de ce cercle, comme lorſqu'il le décrit attaché à un des bouts d'une corde non entenſible & fixe par l'autre bout au centre de ce cercle, ſeroient à ſa péſanteur en chaque point de la circonference de ce cercle, comme la hauteur déterminatrice de ſa vîteſſe en ce point ſeroit a la moitié de ſon rayon, ainſi qu'on l'a déja trouvé dans les art. 26. & 32. D'où l'on voit encore (comme dans ces deux art.) que lorſque cette hauteur ſera égale à ce demi-rayon, la force centrifuge de ce corps ſera auſſi préciſement égale à ſa péſanteur; & reciproquement.

Raport des forces centrales aux pésanteurs des corps sur l'hyperbole ordinaire, par le foyer interieur de laquelle ces forces seroient dirigées.

XXXVI. De la maniere dont on vient de trouver (*art.* 34.) $f = \frac{aph}{ay-yy}$ pour l'Ellipse, on trouvera aussi $f = \frac{aph}{ay+yy}$, ou $f.\ p :: h.\ \frac{ay+yy}{a}$. pour l'hyperbole dont le centre *C* des forces ou des tendances du corps *L* en la décrivant, seroit le foyer interieur; puisqu'en prenant $bb = cc - aa$, à cause que la distance (c) des foyers de cette Courbe est plus grande que son diametre transverse (a), son équation à ce centre ou foyer *C*, sera $bdy = dx\sqrt{4ay + 4yy - bb}$.

Quel est ce raport lorsque ces forces sont dirigées par le foyer exterieur de l'hyperbole.

XXXVII. Mais si ce centre *C* des forces du corps *L*, est le foyer exterieur de l'hyperbole; alors cette Courbe ayant $bdy = dx\sqrt{4yy - 4ay - bb}$ pour son équation à ce foyer, on trouvera de même pour elle $f = \frac{-aph}{yy-ay} = \frac{aph}{ay-yy}$, laquelle formule semble la même que celle qu'on vient de trouver pour l'Ellipse dans l'art. 34. Mais celle-ci ayant $y > a$, elle doit être négative, au lieu que l'autre est positive: aussi les forces centrales sont-elles ici centripetes de centrifuges qu'elles étoient-là & dans le précédent art. 36. où elles tendent suivant des directions qui passent par des foyers interieurs.

Quel est aussi ce raport sur la parabole, lorsque les forces centrales sont dirigées par son foyer.

XXXVIII. Dans les articles 34. & 36. si l'on supose l'autre foyer infiniment éloigné; alors a devenant infinie, toutes ces formules se réduiront à $f = \frac{aph}{ay} = \frac{ph}{y}$ pour la Parabole; ce qui donnera $f.p :: h.y.$ pour cette Courbe: c'est-à-dire, que les forces centrales d'un corps qui décrit une Parabole en tendant toûjours suivant des directions qui passent toutes par son foyer, sont à la pésanteur absoluë de ce même corps, comme les hauteurs déterminatrices des vîtesses de ce corps en differens points de cette Courbe, sont aux distances où il se trouve alors du foyer de cette même Parabole.

EXEMPLE

EXEMPLE IV.

XXXIX. Soit *MLN* un cercle décrit par le corps *L* mû encore comme l'on voudra en tendant toûjours suivant des directions *LC* qui passent toutes par quelque point *C* pris à discretion sur le plan de ce cercle dont le centre soit *F*. Par ce point *C* soit le diametre *MN* avec ses lignes de direction *CL*, *Cl*, indéfiniment proches l'une de l'autre; soit aussi l'arc *LD* décrit du centre *C*, avec *FG* perpendiculaire sur *CL*. Soient enfin $CF = c$ & $FL = r$ constantes, outre $CL = y$, $LD = dx$, & $Ll = ds$, comme ci-dessus art. 9. & 28.

Raport general des forces centrales aux pesanteurs des corps sur un cercle par quelque point du plan de ce cercle que ces forces soient dirigées.

FIG. IX. X.

Cela posé, l'on aura $Ll\,(ds).\ LD\,(dx) :: FL\,(r).\ LG = \frac{rdx}{ds}$. Et $Ll\,(ds).\ lD\,(dy) :: FL\,(r).\ FG = \frac{rdy}{ds}$. Donc $CG\,(\sqrt{\overline{FC}^2 - \overline{FG}^2}) = \sqrt{cc - \frac{rrdy^2}{ds^2}}$. Donc aussi $CL\,(y) = \frac{rdx}{ds} + \frac{\sqrt{ccds^2 - rrdy^2}}{ds}$, ou $yds - rdx = \sqrt{ccds^2 - rrdy^2}$; & en quarrant, $yyds^2 - 2rydxds = ccds^2 - rrdy^2 - rrdx^2 = ccds^2 - rrds^2$, ou $2rydx = yy + rr - cc \times ds$ (soit $2nn = yy + rr - cc$) $= 2nnds$, ou bien encore $\frac{rryydx^2}{n^4} = ds^2 = dx^2 + dy^2$: ce qui donne aussi $\frac{rryy - n^4}{n^4} \times dx^2 = dy^2$, ou $dy = \frac{dx\sqrt{rryy - n^4}}{nn}$. Donc en faisant dx constante, l'on aura pour lors

$$ddy = \frac{\frac{rrnnydxdy - 2n^5dxdn}{\sqrt{rryy - n^4}} - 2ndxdn\sqrt{rryy - n^4}}{} = \frac{rrnnydxdy - 2n^5dxdn - 2rryyndxdn + 2n^5dxdn}{n^4\sqrt{rryy - n^4}} = \frac{rrnnydxdy - 2rryyndxdn}{n^4\sqrt{rryy - n^4}}.$$

Mais puisque (*hyp.*) $nn = \frac{yy + rr - cc}{2}$, l'on aura $2ndn = ydy$. Donc aussi l'on aura $ddy = \frac{rrnnydxdy - rry^3dxdy}{n^4\sqrt{rryy - n^4}}$ (à cause de $dy = \frac{dx\sqrt{rryy - n^4}}{nn}$) $= \frac{rrnnydx^2 - rry^3dx^2}{n^6}$, outre $ds^2 = \frac{rryydx^2}{n^4}$. Par consequent la presente hypothêse de dx constante, donnant aussi (*art.* 29. *nomb.* 1.) $f = \frac{ds^2 - yddy}{yds^2} \times 2ph$, l'on aura enfin $f = \frac{nnrryydx^2 - nnrryydx^2 + rry^4dx^2}{nnrry^3dx^2} \times 2ph = \frac{2pyh}{nn}$ (à cause de

$nn = \frac{yy+rr-cc}{2}) = \frac{4yph}{yy+rr-cc}$, ou $f.p :: h.\frac{yy+rr-cc}{4y}$. C'eſt-à-dire (*art.* 4.) que la force centrale du corps *L* ſuivant *LC*, ſera toûjours à ſa péſanteur abſoluë, en quelque point *L* de la circonference circulaire *MLN* que ce corps ſe trouve, comme la hauteur d'où il aquieroit en tombant ce qu'il a de vîteſſe en ce point *L*, ſeroit à la fraction $\frac{yy+rr-cc}{4y}$ dont les *y* (*CL*) paſſeroient par ce même point *L*.

Nouvelle preuve des art 26, 27, 32, & 35.

XL. On voit delà que ſi le centre *C* des Forces (*f*) étoit en *F* au centre de ce cercle ; alors ayant $c = o$, & $y = r$, la derniere Analogie du précedent art. 39. ſe changeroit en $f.p :: h.\frac{2rr}{4r} :: h.\frac{1}{2}r$. c'eſt-à-dire que les forces centrales du corps *L* tendantes alors ſuivant *LF*, ſeroient à ſa péſanteur en chaque point *L* de la circonférence circulaire qu'il décriroit, comme la hauteur d'où il aquieroit en tombant ce qu'il a de vîteſſe en ce point, ſeroit à la moitié du rayon de ce cercle, ainſi qu'on l'a déja trouvé dans les art. 26. 32. & 35.

Raport des péſanteurs aux forces centrales pour le cas où le centre de ces forces ſeroit un point quelconque de la circonference de ce cercle.

XLI. Mais ſi le centre *C* des Forces (*f*) étoit à l'extremité *M* du diametre de ce même cercle ; ayant alors $c = r$, ou $rr - cc = o$, il ſuit de même de la derniere Analogie de l'art. 39. que ces forces centrales (*f*) tendantes alors en *M*, ſeroient à la péſanteur (*p*) du corps *L* en chaque point *L* de la circonference qu'on le ſupoſe décrire $:: h.\frac{1}{4}y$. c'eſt-à-dire, comme la hauteur d'où il aquieroit en tombant ce qu'il a de vîteſſe en ce point, ſeroit au quart de ſa diſtance (*CL*) au centre du foyer *C* des forces alors en *M*.

Quel ſeroit ce raport ſi le centre de ces forces étoit hors la circonference de ce cercle ſur ſon plan.
FIG. X.

XLII. Si preſentement on ſuppoſe que le centre *C* des Forces (*f*) ſoit hors du cercle, comme dans la Figure 10. Alors ayant $rr - cc$ (*art.* 39.) $= FM \times FM - FC \times FC = - NC \times NC = - LC \times \lambda C$; & $yy = LC \times LC$, ou $yy = \lambda C \times \lambda C$; la derniere Analogie de l'art. 39. ſe changera ici en $f.p :: h.\frac{LC \times LC - LC \times \lambda C}{4LC} :: h.\frac{LC - \lambda C}{4} :: h.\frac{1}{4}L\lambda :: h.\frac{1}{2}LG$. depuis *N* de part & d'autre juſqu'aux points *T* ou *CL* & *C*λ deviennent touchantes du cercle en queſtion ; Et en

$f.p :: h. \frac{\lambda C \times \lambda C - LC \times \lambda C}{4 \lambda C} :: h. \frac{\lambda C - LC}{4} :: h. - \frac{1}{2} L\lambda :: h. - \frac{1}{2} LG.$ depuis *M* de part & d'autre jusqu'aux mêmes points d'attouchement.

XLIII. D'où l'on voit que lorsque le corps *L* sera en *N* ou en *M*, c'est-à-dire aux extrémités du diametre *MN* qui passe par le centre *C* des forces (*f*) de ce corps, l'on aura $f. p :: h. \pm \frac{1}{2} NF (\pm \frac{1}{2} r)$. sçavoir en $N :: h. + \frac{1}{2} r$. Et en $M :: h. - \frac{1}{2} r$. c'est-à-dire de part & d'autre, $f.p :: h. \frac{1}{4} r$. par raport au centre *F* du cercle *MLN*, comme si le centre *C* des Forces (*f*) étoit en ce centre *F*, ainsi qu'on l'a trouvé par ce cas-ci dans les art. 26. 32. 35. & 40.

Nouvelle preuve encore des art. 26, 27, 32, 35, & 40.

XLIV. Il suit aussi de l'art. 39. que ces forces centrales (qui sont centrifuges depuis *N* de part & d'autre jusqu'aux points d'attouchement *T*, & centripetes depuis *M* aussi de part & d'autre jusqu'à ces mêmes points d'attouchement) doivent être infinies en l'un & en l'autre de ces points *T* par raport à la pesanteur du corps où elles se trouvent; parce que $L\lambda$ ou *LG* devenant nulles en ces mêmes points, l'Analogie $f.p :: h. \pm \frac{1}{2} LG$. commune (*art. 42.*) à ces deux cas, se changera là en $f. p :: h. o$. sans que *h* cesse d'être réelle, le mouvement du corps *L* étant supposé se continuer toûjours en ces points d'attouchement. Ce qui s'accorde parfaitement avec l'art. 22. nomb. 1. où cela se voit convenir à toutes sortes de Courbes.

Cas où les forces centrales seroient infinies sur le cercle.

C'est-là un Paradoxe qu'on va voir expliqué dans un éclaircissement particulier. On y verra aussi que quelque changement qu'il arrive en chacun de ces points d'attouchement T *aux forces centrales* (f) *du corps* L, *en devenant centripetes ou centrifuges, de centrifuges ou centripetes qu'elles étoient jusqu'en ce point; ce corps ne sçauroit continuer sa route suivant* NTM *ou* MTN, *c'est-à-dire, décrire seulement le demi cercle* NTM, *tant que le centre* C *de ces forces centrales se trouvera hors ce demi cercle. Mais auparavant il est bon de faire les Remarques suivantes.*

REMARQUE I.

Sur l'étenduë des trois derniers articles 42. 43. & 44.

Regle de comparaison des forces centrales avec les pésanteurs des corps dans le cas où les directions de ces forces seroient paralleles entr'elles.

XLV. Il est premiérement à remarquer que ces trois derniers Corollaires où art. 42. 43. & 44. sont encore vrais dans le cas où le centre C des forces est infiniment éloigné, sa distance n'y étant point determinée. Ce qui a été démontré de ces forces pour ce cas dans les Mem. de 1700. p. 232. Corol. 2. du Prob. 6. prouve aussi qu'elles doivent être infinies dans les points où les touchantes tirées de leur centre C, rencontrent le cercle en question. La même chose se démontrera encore par raport à toute autre Courbe dans les points où elle seroit rencontrée par des touchantes tirées d'un pareil centre de forces. La formule $f = \frac{-ddy}{ds^2} \times 2ph$, qui dans ce cas particulier du centre C des forces (f) infiniment éloigné, résulteroit de celle ($f = \frac{ds^2 - yddy}{yds^2} \times 2ph$) dont on vient de se servir dans l'article 39. donneroit aussi la même chose en se servant d'équations dont les ordonnées (appellées aussi y, quoique finies) suivant lesquelles tendroit le corps *décrivant*, seroient paralleles entr'elles, & terminées à un axe dont les élémens seroient dx.

Application de la précédente Regle à toutes les Sections coniques.

Par exemple, en se servant de l'équation $yy = \frac{abx \pm bxx}{a}$ commune à toutes les Sections coniques, cette nouvelle formule $f = \frac{-2phddy}{ds^2}$ (en faisant dx constante) donnera en géneral $f = \frac{2aabbph}{4aay^3 \mp y \times \overline{ab \pm 2bx}^2}$ pour toutes les Sections coniques : c'est-à-dire,

1°. $f = \frac{2aabbph}{4aay^3 \mp y \times \overline{ab \mp 2bx}^2}$ pour l'Hyperbole ;

2°. $f = \frac{2aabbph}{4aay^3 \mp y \times \overline{ab \mp 2bx}^2}$ pour l'Ellipse.

3°. $f = \frac{2aaph}{4y^3 + y \times \overline{a - 2x}^2}$ pour le Cercle en faisant $b = a$;

4°. $f = \frac{2bbph}{4y^3 + bby}$ pour la Parabole en prenant a infini.

Ce qui donne (dis-je) encore par tout là, $f = \frac{2aabbph}{o}$ (en prenant $x = o$ & $y = o$); c'est-à-dire les forces centrales (f) infinies dans les points d'attouchement des touchantes paralleles aux ordonnées (y), ou aux directions de ces forces. Et ainsi d'une infinité d'autres Courbes ausquelles on pourroit appliquer de même la formule $f = \frac{-2phddy}{ds^2}$. Mais l'usage de cette formule d'ordonnées paralleles, de même que celui de toutes les autres formules que l'art. 29. fournit encore, & que les autres Regles de l'art. 28. pourroient fournir aussi à l'infini pour les ordonnées concourantes, & ensuite pour les ordonnées paralleles par la supposition de y infinie, étant le même que celui qu'on vient de faire de $f = \frac{ds^2 - yddy}{yds^2} \times 2ph$, l'on ne s'y arrêtera pas davantage.

REMARQUE II.

Sur le raport de la pesanteur aux forces centrales dont le foyer ou centre est different de celui des ordonnées de la Courbe en question.

Regle de comparaison des forces centrales avec les pesanteurs des corps qui décriroient des Courbes dont le centre des ordonnées seroit differens de celui de ces forces, en considerant les élémens des Courbes comme courbes eux-mêmes.

XLVI. Il est aussi à remarquer que si le centre des Forces, tant centrifuges que centripetes, du corps qui décrit une Courbe quelconque, étoit different du centre des ordonnées de cette Courbe sur le plan de laquelle il fût; la formule $f = \frac{4phxPl}{ds^2}$ des art. 4, 5, 6, & 8. fourniroit encore des Regles plus generales que celles de l'art. 28. puisqu'en confondant ces deux centres en un, les regles de cet art. 28. deviendroient autant de Corollaires de celles-là.

Pour le voir, soit encore la Courbe MLN telle qu'on voudra, décrite par un corps L dont les forces centrales (f) soient toutes dirigées par F suivant LF, pendant que les ordonnées LC de cette Courbe continuënt de s'assembler en C. Soient aussi $Ll = ds$, les élémens de cette même Courbe; CL ou $Cl = y$, ses ordonnées; $LD = dx$, perpendiculaire sur Cl, & qui prolongée rencontre Fl FIG. II.

en A; laquelle Fl rencontre aussi en K la tangente LQ, que Cl prolongée rencontre pareillement en S. Soient de plus FL ou $Fl = q$, les rayons des forces (f). Soient enfin lo, lP, paralleles à LD, LF; & du diametre CF, le cercle CBF que CL, Cl, rencontrent en B, b; & dont CB ou $Cb = m$, FB ou $Fb = n$, sont les cordes.

Cela fait, les triangles (*constr.*) semblables Fbl, ADl, donneront $bl\,(y-m)$. $Fl\,(q)$ :: $Dl\,(dy)$ Al ou $AK = \frac{qdy}{y-m}$. Et $bl(y-m)$. $Fb\,(n)$ :: $Dl\,(dy)$. $AD = \frac{ndy}{y-m}$. Ce qui donne $AL = dx + \frac{ndy}{y-m} = \frac{ydx - mdx + ndy}{y-n}$. Mais les triangles (*hyp.*) semblables KAL, Klo, donnent aussi $AK\left(\frac{qdy}{y-n}\right)$. $AL\left(\frac{yd-mdx+ndy}{y-m}\right)$ :: lK. $lo = \frac{ydx-max+ndy}{qdy} \times lK$. De plus les triangles (*hyp.*). semblables SDL, Slo, donnent pareillement SD ou $lD\,(dy)$. $DL\,(dx)$ :: Sl. $lo = \frac{dx}{dy} \times Sl$. Donc $\frac{dx}{dy} \times Sl = \frac{ydx-mdx+ndy}{qdx} \times lK$; & par conséquent aussi $Sl = \frac{ydx-mdx+ndy}{qdx} \times lK$.

Or en considerant l'élément Ll de la Courbe proposée, non comme un côté droit de polygone réctiligne, mais comme un véritable arc de cercle, on a aussi trouvé ci-dessus (*art.* 13.) $Sl = \frac{ds^3}{2rdx}$. Donc on aura ici $\frac{ydx-mdx+ndy}{qdx} \times Kl = \frac{ds^3}{2rdx}$; & par conséquent $Kl = \frac{qds^3}{2r \times ydx - mdx + ndy}$. Mais on vient de supposer $q = LF = \sqrt{\overline{LB}^2 + \overline{FB}^2} = \sqrt{\overline{y-m}^2 + nn}$. Donc $Kl = \frac{ds^3}{2r} \times \frac{\sqrt{\overline{y-m}^2+nn}}{ydx-mdx+ndy}$. Or les triangles (*constr.*) semblables KlP, KFL, donnant $Pl.lK$ :: $LF.FK$. Et l'angle LFK (*hyp.*) infiniment petit, rendant $LF = FK$, l'on aura de même $Pl = Kl$. Donc $Pl = \frac{ds}{2r} \times \frac{\sqrt{\overline{y-m}^2+nn}}{ydx-mdx+ndy}$. Donc aussi en substituant cette valeur de Pl dans la formule générale $f = \frac{4ph \times Pl}{dt^2}$ des art. 4, 5, 6, & 8. l'on aura enfin $f = \frac{2phds}{r} \times$

$\frac{\sqrt{y-m^2+nn}}{ydx-mdx+ndy}$ pour une Regle infiniment génerale de comparaiſon des péſanteurs des corps avec leurs forces centrales, dont le centre ſeroit tout autre que celui des ordonnées de la Courbe qu'il décrit. *Ce qu'il falloit trouver.*

XLVII. Si preſentement on ſuppoſe que le centre de ces forces centrales devienne le même que celui des ordonnées de la Courbe en queſtion, c'eſt-à-dire que ces forces tendent toutes ſuivant ces mêmes ordonnées; ces centres *C* & *F* alors confondus en un ſeul & même point, rendant par-là *CB* (*m*) & *FB* (*n*) nulles, c'eſt-à-dire, $m=o=n$, la précedente Regle generale $f=\frac{2phds}{r}\times\frac{\sqrt{y-m^2+nn}}{ydx-mdx+ndy}$ de l'article 46. ſe changera pour lors en $f=\frac{2phds}{r}\times\frac{\sqrt{yy}}{ydx}=\frac{2phds}{rdx}$, qui eſt celle qu'on a déja trouvée pour ce cas-ci dans les art. 9, 14, & 18. *Regles des art. 9. 14. & 19. tirées de la précedente.*

XLVIII. La Regle du centre des forces different de celui des ordonnées de la Courbe en queſtion, qu'on vient de trouver dans l'art. 46. en conſiderant les élémens de cette Courbe comme Courbe eux-mêmes, ſe peut encore trouver en les conſidérant comme autant de petites lignes droites ou de côtés infiniment petits du polygone infinitilatere rectiligne ſous la forme duquel cette Courbe ſe peut auſſi conſiderer. *Autre démonſtration de la Regle du penultiéme art. 46. tirée preſentement de la conſideration des courbes ſous la forme de polygones infiniti-lateres rectilignes.*

Pour cela, ſuppoſons preſentement *LQ* en ligne droite avec le petit côté *ZL* de ce polygone *MLN*, qui prolongé vers *Q*, fera ici une nouvelle tangente *LQ* ſuivant laquelle la vîteſſe de rotation en *L* du corps *décrivant* tendra à l'emporter. Tout le reſte demeurant le même par raport à cette nouvelle tangente que ci-deſſus (*art.* 46.) par raport à l'autre, on trouvera ici non-ſeulement *Pl* double de ce qu'elle étoit dans cet art. 46. comme l'on a trouvé dans l'art. 17. Fig. 5. *Yl* double de *Pl*; mais encore $LP. Pl :: p\times LQ. f\times LP.$ comme l'on a trouvé $LY. LG$ ou $Yl :: p\times TL. f\times LY.$ dans l'art. 18. Fig. 5. en ſuppoſant encore ici *LQ* double de la hauteur (*h*) d'où le corps

tombant aquieroit en L la viteſſe qu'il y a ſuivant LQ, de même qu'on a ſuppoſé là LT double de cette même hauteur. Donc on aura pareillement ici $LP. Pl :: p \times 2h. f \times LP.$ ou $f = \frac{2ph \times Pl}{LP \times LP} = \frac{2ph \times Pl}{Ll \times Ll}$.

Mais en prenant encore r pour le rayon oſculateur de la Courbe MLN en L, on trouvera de plus ici $Sl = \frac{Ll \times Ll \times Ll}{r \times DL}$ de la même maniere qu'on a trouvé $Xl = \frac{Ll \times Ll \times Ll}{RL \times DL}$ dans l'art. 19. Fig. 5. où cette Courbe étoit pareillement conſiderée ſous la forme de polygone infiniti-latere réctiligne. Donc ayant auſſi en général (*art.* 46.) $Sl = \frac{ydx - mdx + ndy}{qdx} \times Kl$, ſoit que cette Courbe ſoit conſiderée ſous la forme de polygone ou non, l'on aura pour ici $\frac{ydx - mdx + ndy}{qdx} \times Kl = \frac{Ll \times Ll \times Ll}{r \times DL}$ (en appellant encore Ll, ds; & LD, dx) $= \frac{ds^3}{rdx}$. Et par conſéquent $Kl = \frac{ds^3}{r} \times \frac{q}{ydx - mdx + ndy}$. Or les triangles ſemblables KlP, KFL, donnant $Pl. Kl :: LF. FK$. Et l'angle LFK (*hyp.*) infiniment petit, rendant $LF = FK$, l'on aura de même $Pl = Kl$. Donc $Pl = \frac{ds^3}{r} \times \frac{q}{ydx - mdx + ndy}$ (à cauſe que $q = \sqrt{\overline{y - m}^2 + nn}$ ſuivant l'art. 46.) $= \frac{ds^3}{r} \times \frac{\sqrt{\overline{y-m}^2 + nn}}{ydx - mdx + ndy}$. Donc auſſi en ſubſtituant cette valeur de Pl dans l'équation $f = \frac{2ph \times Pl}{Ll \times Ll} = \frac{2ph \times Pl}{ds^2}$ trouvée cy-deſſus, la preſente hipotheſe de la Courbe polygone donnera encore la même formule $f = \frac{2phds}{r} \times \frac{\sqrt{\overline{y-m}^2 + nn}}{ydx - mdx + ndy}$ qui a été trouvée dans l'art. 46. en conſiderant cette Courbe comme faite d'élémens courbes eux-mêmes. *Ce qu'il falloit encore trouver.*

Regle du raport que doivent avoir entr'eles les forces centrales dont le centre ſeroit different.

XLIX. Puiſque l'article 46. & ce dernier 48. donnent $f = \frac{2phds}{r} \times \frac{\sqrt{\overline{y-m}^2 + nn}}{ydx - mdx + ndy}$, ſoit que la Courbe MLN ſoit conſiderée ſous la forme de polygone ou non, & que $2p$ eſt (*hyp.*) une grandeur conſtante; les forces centrales dont il

s'agit

s'agit ici, seront entr'elles dans l'une & dans l'autre de ces deux hypothêses, comme les fractions correspondantes $\frac{bds}{r}\times\frac{\sqrt{\overline{y-m}^2+nn}}{ydx-mdx+ndy}$. Mais les hauteurs ($h$) d'où le corps *décrivant* devroit tomber pour acquerir les vîtesses qu'il a aux différens points de la Courbe qu'il décrit, étant comme les quarrés de ces vîtesses, c'est-à-dire (en prenant v pour le nom de chacune de ces vîtesses, & dt pour celui de chacun des instans que le corps *décrivant* employe à parcourir chacun des élémems de la Courbe qu'il décrit) $h = vv = \frac{ds^2}{dt^2}$; ces mêmes forces seront aussi entr'elles comme les fractions $\frac{ds^2}{rdt^2}\times\frac{\sqrt{\overline{y-m}^2+nn}}{ydx-mdx+ndy}$ correspondantes.

de celui des ordonnés de la Courbe sur laquelle elles se trouvent.

L. Pour faire usage de cette expression du rapport que doivent avoir entr'elles les forces centrales dont il s'agit ici, & de la Regle $f=\frac{2phds}{r}\times\frac{\sqrt{\overline{y-m}^2+nn}}{ydx-mdx+ndy}$ de leur rapport aux pesanteurs des corps, trouvée ci-dessus art 46. & 48. il est à remarquer que ces formules en fourniront encore six autres toutes aussi générales pour le même sujet que chacune d'elles, en y substituant les six valeurs infiniment générales du rayon osculateur, qui se trouvent dans les Mem. de 1701. pag. 27. & 29. art. 10. & 14. en supposant pour les trois derniéres l'arc de cercle MG (z) décrit du centre C, & de tel rayon CM (a) qu'on voudra, ainsi qu'on les a substitués ci-dessus art. 28. dans la formule $f=\frac{2phds}{r}$ des art. 9. 14. & 19. pour en tirer les six autres Regles de cet art 28. Et les six qui resulteront ainsi de l'expression $\frac{ds^2}{rdt}\times\frac{\sqrt{\overline{y-m}^2+nn}}{ydx-mdx+ndy}$ qu'on vient de trouver (*art.* 49.) du rapport que doivent avoir entr'elles les forces centrales dont il s'agit ici, seront précisément les mêmes que les six qui sont aussi pour le même sujet dans les pag. 35. & 36. art. 23. de ces Mem. de 1701. le signe d'égalité n'y signifiant qu'égalité de rapports. Voici donc seulement celles qui résultent de même de la précédente

Manieres de rendre les deux Regles des trois articles precedens 46, 48, & 49. facilement applicables à toutes sortes de Courbes où le centre des ordonnées seroit différent de celui des forces centrales.

$f = \frac{2phds}{r} \times \frac{\sqrt{\overline{y-m}^2+nn}}{ydx - mdx + ndy}$, où le signe d'égalité signifie égalité de grandeurs, lesquelles sont ici homogenes, au lieu que là elles sont hétérogenes.

REGLES DES FORCES CENTRALES.

Comparées aux pesanteurs des corps, plus génerales encore que l'article 28.

1°. $f = \frac{2ph\sqrt{\overline{y-m}^2+nn}}{ydyds} \times \frac{dxdyds + ydsddx - ydxdds}{ydx - mdx + ndy}$

2°. $f = \frac{2ph\sqrt{\overline{y-m}^2+nn}}{ydxds} \times \frac{dsdx^2 + ydydds - ydsddy}{ydx - mdx + ndy}$

3°. $f = \frac{2ph\sqrt{\overline{y-m}^2+nn}}{yds^2} \times \frac{dxds^2 + ydyddx - ydxddy}{ydx - mdx + ndy}$.

4°. $f = \frac{2ph\sqrt{\overline{y-m}^2+nn}}{adyds} \times \frac{2dzdyds + ydsddz - ydzdds}{ydx - mdx + ndy}$.

5°. $f = \frac{2ph\sqrt{\overline{y-m}^2+nn}}{aydzds} \times \frac{ydsdz^2 + aadydds - aadsddy}{ydx - mdx + ndy}$.

6°. $f = \frac{2ph\sqrt{\overline{y-m}^2+nn}}{ads^2} \times \frac{dzds^2 + dzdy^2 + ydyddz - ydzddy}{ydx - mdx + ndy}$.

On fera sur ces nouvelles Regles du raport des forces centrales aux pesanteurs des corps, les mêmes reflexions qui se trouvent dans les Mem. de 1701. pag. 36. & 37 art. 24. sur de pareilles Regles du raport de ces forces entr'elles. En voici seulement deux exemples, pour en faire voir l'usage.

Raport des forces centrales à la pesanteur d'un corps qui décriroit un cercle dont les ordonnées auroient leur centre à sa circonference pendant que ces forces auroient le leur au centre même de ce cercle.

EXEMPLE I.

LI. Supposons, si l'on veut, que la Courbe proposée *MLN* soit un cercle dont *F* soit le centre, auquel tendent toutes les forces centrales (f) du corps *L* qui le décrit, pendant que les ordonnées *LC*, *lC*, concourent à la circonference de ce cercle. Alors tout le reste demeurant le même que dans l'art. 46. Fig. 11. l'égalité des rayons *FC* & *FL* de ce cercle *MLN*, & *FB* perpendiculaire sur *LC*, donnant *BC* (m) $= \frac{1}{2}$*CL* ($\frac{1}{2}y$); par consequent

$\overline{y-m}^2 = \frac{1}{4}yy$; & delà $nn = rr - \frac{1}{4}yy$, ou $4nn = 4rr - yy$, en prenant r pour le nom du rayon FC de ce cercle MLN: la prémiere des Regles du précedent art. 50. se changera ici en $f = \frac{2rph}{ydyds} \times \frac{dxdyds + ydsddx - ydxdds}{\frac{1}{2}ydx + ndy} =$ $= \frac{4rph}{ydyds} \times \frac{dxdyds + ydsddx - ydxdds}{ydx + 2ndy}$. Et si l'on suppose dx constante, c'est-à-dire $ddx = 0$, cette Regle se changera même ici en $f = \frac{4rph}{ydyds} \times \frac{dxdyds - ydxdds}{ydx + 2ndy}$ (à cause que cette hypothêse de dx constante, donne aussi $dds = \frac{dyddy}{ds}$) $= \frac{4rph}{ydyds^2} \times \frac{dxdyds^2 - ydxdyddy}{ydx^2 + 2ndy} = \frac{4rph}{ydx^2 + ydy^2} \times \frac{dx^3 + dxdy^2 - ydxddy}{ydx + 2ndy}$.

Mais la ressemblance des triangles LCD, BCE, donnera aussi $BC(\frac{1}{2}y) . LC(y) :: EB(dn) . LD(dx) = 2dn$ ($nn = rr\frac{1}{4}yy$ donnant $dn = \frac{ydy}{4\sqrt{rr - \frac{1}{4}yy}} = \frac{ydy}{4n}$ positif, à cause que n & y croissent alternativement) $= \frac{ydy}{2n}$ Ce qui dans la presente hypothêse de dx constante, donne aussi $ddx (0) = \frac{nyddy + ndy^2 + ydndy}{2nn}$, dont le dernier terme du numerateur est positif à cause de ces mêmes accroissemens alternatifs de n & de y; d'où résulte $ddy = \frac{-ndy^2 - ydndy}{ny}$ (à cause de $dn = \frac{ydy}{4ny}$) $= \frac{-4nndy^2 - yydy^2}{4nny}$ (à cause de $4nn = 4rr - yy$) $= \frac{-4rrdy^2}{4nny} = -\frac{rrdy^2}{nny}$.

Donc en substituant ces valeurs de dx & de ddy dans la précedente équation $f = \frac{4rph}{ydx^2 + ydy^2} \times \frac{dx^3 + dxdy^2 - ydxddy}{ydx + 2ndy}$, il en résultera $f = \frac{4rph}{y^3 + 4nny} \times \frac{y^3 + 4nny + 4rry}{yy + 4nn}$ (à cause de $4nn =$ $= 4rr - yy$) $= \frac{4rph}{4rry} \times \frac{4rry + 4rry}{4rr} = \frac{ph}{r} \times 2 = \frac{2ph}{r}$; ce qui donne ici $f . p :: h . \frac{1}{2}r$. comme dans les art. 26, 32, 35, 40, & 43.

LII. La même chose se peut encore trouver autrement sans rien supposer ici de constant que les rayons du cercle MLN. En effet ayant trouvé ci-dessus (*art.* 51.) *Autre maniere de démontrer le même raport.*

$f = \frac{4rph}{ydyds} \times \frac{dxdyds + ydsddx - ydxdds}{ydx + 2ndy}$, dont dx, dy, ds, sont toutes variables; Et les Mem. de 1701. pag. 27. art. 10. nombre 1. donnant alors $r = \frac{ydyds^2}{dxdyds + ydsddx - ydxdds}$, ou $\frac{r}{ydyds} = \frac{ds}{dxdyds + ydsddx - ydxdds}$, à cause que le rayon du cercle est celui de sa Dévelopée, laquelle se confond toute en son centre: la substitution du second membre de cette égalité pour le premier dans la précedente valeur de f, donnera $f = \frac{4phds}{ydx + 2ndy}$.

Or les triangles semblables Fbl, lDL, donnent Ll (ds). Dl (dy) :: Fl (r). Fb $(n) = \frac{rdy}{ds}$. Donc en substituant cette valeur de n dans l'égalité précedente, l'on aura $f = \frac{4phds^2}{ydxds + 2rdy^2}$.

Mais les mêmes triangles Fbl, lDL, donnent aussi bl $(\frac{1}{2}y)$. Fl (r) :: LD (dx). Ll $(ds) = \frac{2rdx}{y}$. Donc en substituant cette même valeur de ds dans le diviseur de la derniére valeur de f, l'on aura enfin $f = \frac{4phds^2}{2rdx^2 + 2rdy^2} = \frac{2ph}{r}$. Ce qui donne encore $f.p :: h.\frac{1}{2}r$. Ainsi qu'on le vient de trouver dans le précedent art. 51. conformément aux art. 26 32, 35, 40, & 41.

EXEMPLE III.

Fig. XIII

Quel seroit ce rapport dans le cas où le centre de forces, & celui des ordonnées du cercle en question, seroient aux deux extremités d'un même diametre de ce cercle.

LIII. Si l'on veut que la Courbe proposée MLN soit encore un cercle, mais qui ait presentement le centre C des ordonnées LC, & le centre F des forces du corps *décrivant*, aux extremités d'un de ses diametres; & que par consequent elle se confonde ici avec le demi-cercle CBF. Alors cette Courbe ayant CB $(m) = CL$ $[y]$, ou $y - m = 0$, la premiere des Regles infiniment générales trouvées dans l'art. 50. se changera ici en $f = \frac{2nph}{ydyds} \times \frac{dxdyds + ydsddx - ydxdds}{ndy} = 2ph \times \frac{dxdyds + ydsddx - ydxdds}{ydyds}$. Et si l'on supose dx constant, & par consequent $dds = \frac{dyddy}{ds}$, elle se changera même en

$f = 2ph \times \frac{dxdys^2 - ydxddy}{ydy^2ds^2} = 2ph \times \frac{dxds^2 - y\ xddy}{ydyds^2}$.

Mais si l'on prend $2r$ pour le nom du diametre CF, l'on aura ici $4rr - yy = nn$, ou $\sqrt{4rr - yy} = n$; ce qui donne $\frac{-ydy}{\sqrt{4rr - yy}} \left(\frac{-ydy}{n}\right) = -dn = -dx$ négatif, à cause que n & y croissent alternativement, & que $EB\,(dn)$ se confond ici avec $DL\,(dx)$. Et pour cette même raison l'équation résultante $ydy = ndx$ donnera aussi $yddy + dy^2 = -dndx = -dx^2$ négatif encore pour la même raison, & sans $nddx$ à cause de dx (*hyp.*) constante; d'où résulte enfin $yddy = -dx^2 - dy^2 = -ds^2$.

Donc en substituant cette valeur de $yddy$ dans la derniere équation $f = 2ph \times \frac{dxds^2 - ydxddy}{ydyds^2}$, l'on aura $f = 2ph \times \frac{dxds^2 + dxds^2}{ydyds^2} = 2ph \times \frac{2dx}{ydy}$ (à cause de $dx = \frac{ydy}{n}$) $= 2ph \times \frac{2ydy}{nydy} = \frac{4ph}{n}$. D'où résulte $f.p::h.\frac{1}{4}n$. conformement à l'art. 41.

REMARQUE III.

Sur le raport de la Pesanteur aux forces centrales de differens foyers ou centres.

Regle de comparaison des forces centrales dirigées par plusieurs centres ou foyers avec la pésanteur du corps où elles se trouveroient.

LIV. Il est aussi à remarquer que quoique jusqu'ici nous n'ayons consideré à chaque point de la Courbe en question, qu'une seule force centrale dans le corps qui la décrit, la comparaison que nous en avons faite avec la pesanteur de ce corps, se pourra faire de même avec autant d'autres forces centrales qu'on lui en voudra suposer à la fois à chaque point de cette Courbe, par le concours desquelles il l'auroit décrite, en donnant le raport de ces forces entr'elles de chaque foyer aux autres; & cela de la même maniére que les Regles que nous avons données de ces forces en 1701. nous ont conduit à celles que nous avons données de ces forces concourantes en 1703.

Fig. XIV.

Pour le voir, soit encore une Courbe quelconque MLN, mais décrite presentement à la maniere de M. *Tschirnhausen*, par le corps L mû suivant LN par le con-

cours de tant de forces centrales qu'on voudra ; qui agiſſent toutes à la fois ſur lui ſuivant des lignes qui paſſent par leurs foyers ou centres fixes *A*, *B*, *C*, &c. placés d'abord comme l'on voudra dans le plan de cette Courbe. Soit *ILQ* la tangente de cette même Courbe en tel point *L* qu'on voudra, avec l'arc *Ll* infiniment petit, par les extremités duquel ſoient tirées des centres ou foyers *A*, *B*, *C*, &c. les droites *AL*, *Al*; *BL*, *Bl*; *CL*, *Cl*, &c. dont *Bl*, *Cl*, prolongées rencontrent la tangente *LQ* en *V*, *S*. Soient auſſi *lK*, *LG*, *LD*, perpendiculaires ſur *AL*, *Bl*, *Cl*, & dont la premiere *Kl* prolongée du côté de *l*, rencontre en *O* la tangente *LQ*, ſur laquelle ſoient pareillement *lF*, *KT*, *GY*, *DX*, perpendiculaires en *F*, *T*, *Y*, *X*. Soient de plus *RL*, *Rl*, deux des rayons oſculateurs de la Courbe *MLN*, dont le ſecond prolongé du côté de *l*, rencontre auſſi en *E* la tangente *LQ*. Soient *A*, *B*, *C*, &c. les noms des forces centrales dirigées ſuivant les droites *LA*, *LB*, *LC*, &c. qui paſſent par les foyers ou centres fixes *A*, *B*, *C*, &c.

Cela fait, les triangles rectangles ſemblables *LKO*, *LTK*, donneront *OL* ou *Ll*. *OK*, ou *Kl* : *LK*. *TK* : : *A*. $\frac{A \times Kl}{Ll}$ effort de la force *A* ſur le corps *L* ſuivant *TK* perpendiculaire (*hyp.*) à *LQ*. Les triangles réctangles ſemblables *LGV*, *GYV*, donneront pareillement *VL* ou *Ll*. *LG* : : *VG*. *YG* : : *B*. $\frac{B \times LG}{Ll}$ effort de la force *B* ſur le même corps *L* ſuivant *YG* perpendiculaire (*hyp.*) à *LQ*. De même encore les triangles réctangles ſemblables *LDS*, *DXS*, donneront auſſi *SL* ou *Ll*. *DL* : : *SD*. *XD* : : *C*. $\frac{C \times DL}{Ll}$ effort de la force *C* ſur le même corps *L* ſuivant *XD* perpendiculaire encore (*hyp.*) à *LQ*. On trouvera de même les efforts perpendiculaires à *LQ* de tant d'autres forces centrales qu'on voudra ſuppoſer agir auſſi ſur le corps *L*. Donc en retranchant ce que ce corps reçoit ainſi d'impreſſion vers le dehors de ce qu'il en reçoit vers le dedans de la Courbe *ML N*, perpendiculairement à *LQ*, & en

ſuppoſant que B eſt de la premiére eſpece, & A, C, de ſeconde ; l'on aura ici $\frac{A \times KL}{Ll} + \frac{C \times DL}{Ll} - \frac{B \times LG}{Ll} \pm$ &c. ou $\frac{A \times Kl + C \times DL - B \times LG \pm \&c.}{Ll}$ pour tout ce que ces forces lui donnent enſemble d'effort ou d'impreſſion perpendiculaire à LQ vers le dedant de cette Courbe dans l'inſtant qu'il parcourt l'élément Ll, en vertu duquel effort il eſt attiré de la tangente LQ ſur cette même Courbe de la valeur de Fl, auſſi perpendiculaire (*hyp.*) à cette tangente, pendant le même inſtant.

Cela étant, ſi l'on prend HL pour la hauteur d'où ce corps tombant en vertu de ſa ſeule peſanteur, aquieroit en L une viteſſe égale à celle qu'il a effectivement ſuivant Ll ; il eſt viſible que le tems de cette chute de H en L, ſeroit au tems que ce même corps met à parcourir Ll :: $2HL$. Ll puiſque cette viteſſe demeurant uniforme, lui feroit parcourir le double de HL dans le tems de cette chute ; & qu'à viteſſes égales les eſpaces ſont comme les tems employés à les parcourir. Donc en appellant dt l'inſtant que ce corps emploïe à parcourir Ll, l'on aura $\frac{2HL \times dt}{Ll}$ pour le tems de ſa chute faite de H en L en vertu de ſa ſeule peſanteur (p). Par conſequent les eſpaces parcourus par un même corps en vertu de forces conſtantes & continuellement appliquées, toutes qu'on ſuppoſe d'ordinaire la peſanteur, & que toute force centrale l'eſt à chaque inſtant, étant (*art.* 10.) en raiſon composée de ces forces & des quarrés des tems employés à les parcourir, l'on aura ici $Fl. HL :: \frac{A \times Kl + C \times DL - B \times LG \pm \&c.}{Ll} \times dt^2$. $p \times \frac{4HL \times HL \times dt^2}{Ll \times Ll}$. Ce qui donnera $A \times Kl + C \times DL - B \times LG \pm$ &c. $= \frac{4p \times HL \times Fl}{Ll}$.

Introduction du rayon oſculateur dans la précedente Regle, en conſiderant les élemens des courbes comme courbes eux-mêmes.

LV. Mais en regardant (ainſi que l'on vient de faire) Fl comme parcouruë d'un mouvement acceléré pendant le tems que LF eſt parcouruë d'un mouvement uniforme, l'élément Ll décrit par le concours de ces deux mouve-

mens, doit être ici regardé comme courbe, & comme un veritable arc dans lequel la Courbe *MLN* est baisée par son cercle osculateur en cet endroit; & par consequent comme un veritable arc de cercle dont *R* seroit le centre, & non comme un côté droit de polygone. Ce qui donnera $El = \frac{Ll \times Ll}{2 LI}$ comme dans l'art. 9. De sorte que les triangles (*constr.*) réctangles & semblables *EFL*, *ELR*, donnant $Fl. El :: LR. ER$. Et l'élément Ll rendant $LR = ER$, l'on aura ici $Fl = El = \frac{Ll \times Ll}{2 LR}$. Donc en substituant cette valeur de Fl dans la formule par où finit le précédent art. 54. l'on aura enfin $A \times Kl + C \times DL - B \times LG \pm$ &c. $= \frac{2p \times HL \times Ll}{LR}$. Et par conséquent en appellant encore HL, h; LR, r; & Ll, ds; l'on aura de même $A \times Kl + C \times DL - B \times LG \pm$ &c. $= \frac{2phds}{r}$ pour une Regle générale de comparaison de la pésanteur d'un corps avec tout ce qu'on lui peut imaginer de forces centrales conspirantes ensemble à lui faire décrire quelque Courbe que ce soit, le raport de ces forces entr'elles étant donné de chacun de leurs foyers aux autres, comme dans le Memoire du 5 Sept. de 1703. ces efforts se faisant ici tous suivant le plan de la Courbe *MLN* qu'ils font décrire au corps *L*. Et lorsqu'ils seront dans des plans differens, cette même Regle en fournira encore une autre toute aussi générale pour ce cas, en le faisant revenir à l'autre de la maniére qu'on l'a fait dans ce Mem. du 5 Sept. 1703. Ainsi il n'est pas necessaire de nous y arrêter davantage, ni d'avertir que le rayon (r) de la Dévelopée de la Courbe *MLN* doit ici être pris par raport à tous les foyers *A*, *B*, *C*, &c. Et le reste comme dans ce même Memoire.

Regles des art. 14, 19. & 47, tirée de la précedente.

LVI. Si l'on compare cette Analyse avec celle des art. 5. & 9. on verra qu'elle n'en différe presque point. La Regle qu'elle vient de nous donner, pourroit se trouver de même en suivant l'Analyse des art. 2, 3, 4, & 6. Aussi lorsque tous les foyers qu'on y suppose, se réduisent à un sur le plan de la Courbe en question, cette même Regle du précédent

cédent art. 55. se change-t-elle en celle de l'art. 9. concluë de ces articles-là. En effet, si de tous ces foyers il ne restoit que *C*, l'anéantissement des autres *A*, *B*, &c. réduiroit cette Regle à $C \times DL = \frac{2phds}{r}$: De sorte qu'en appellant la force *C*, *f*; & *DL*, *dx*; l'on auroit aussi $fdx = \frac{2phds}{r}$, ou $f = \frac{2phds}{rdx}$, comme dans cet art. 9.

LVII. La regle qu'on vient de trouver dans l'art. 55. en considérant les élémens des Courbes comme courbes eux-mêmes, se peut encore trouver en les considérant comme autant de petites lignes droites ou de côté infiniment petits des polygones sous la forme desquels ces Courbes se peuvent aussi considérer.

Autre démontrastion de la Regle du penultieme art. 55. tirée présentement de la consideration des Courbes sous la forme de polygones infiniti-lateres rectilignes.

Pour cela, soit encore une Courbe quelconque *MLN* décrite à la maniére de M. de *Tschirnhausen* par le corps *L* mû suivant *LN* par le concours de tant de forces centrales qu'on voudra, qui agissent toutes à la fois sur lui suivant des directions qui passent par leurs centres fixes *A*, *B*, *C*, &c. placés comme ci-dessus art. 54. Soient présentement *ZL*, *Ll*, deux des côtés infiniment petits de ce polygone infiniti-latere, dont le premier *ZL* prolongé en devienne la tangente sur laquelle je suppose présentement *LQ*, ensorte que *LQ* soit présentement ce petit côté lui-même prolongé. Soit aussi présentement *lF* un arc de cercle décrit du centre *L* par *l*. Soient encore *LR*, *lR*, les rayons de la Dévelopée de cette Courbe *MLN*. Ensuite après avoir encore fait les droites *AL*, *Al*; *BL*, *Bl*; *CL*, *cl*; &c. Soient encore aussi *lK*, *LG*, *LD*, &c. des perpendiculaires aux droites *AL*, *Bl*, *Cl*, &c. ou des arcs de cercles décrits des centres *A*, *B*, *C*, &c. Soit présentement *DX*, &c. perpendiculaire au petit côté *Ll* de la Courbe.

FIG. XIV.

Cela fait, les triangles semblables *LDl*, *DXl*, donneront $Ll. DL :: Dl. XD :: C. \frac{C \times DL}{Ll}$ effort de la force *C* sur le corps *L* suivant *XD* perpendiculaire (*hyp.*) à *Ll*. On trouvera de même $\frac{A \times lK}{Ll}$, $\frac{B \times LG}{Ll}$, &c. pour ce que les

forces A, B, &c. font d'efforts perpendiculaires à Ll sur le même corps *décrivant*. Donc en retranchant encore ce que ce corps reçoit ainsi d'impression vers le dehors de ce qu'il en reçoit vers le dedans de la Courbe MLN, perpendiculairement à son petit côté Ll, l'on aura encore ici

$$\frac{A\times Kl}{Ll}+\frac{C\times LD}{Ll}-\frac{B\times LG}{Ll}\pm\&c.\ \text{ou}\ \frac{A\times Kl+C\times LD-B\times GL\pm\&c.}{Dl}$$

pour tout ce que ces forces centrales A, B, C, &c. lui donnent ensemble d'effort perpendiculaire à Ll vers le dedans de cette Courbe dans l'instant qu'il en parcourt cet élément Ll, en vertu duquel effort il est encore attiré de la tangente LQ sur cette même Courbe de la valeur de Fl pendant cet instant, laquelle Fl se trouvera ici double de ce qu'elle étoit dans les art. 54. & 55. comme l'on a trouvé Yl double de Pl dans l'art. 17. Fig. 5.

Si l'on regarde presentement cette force centrale résultante du concours de toutes les autres A, B, C, &c. vers le dedans de la Courbe MLN, comme une force simple suivant Fl perpendiculaire au petit côté Ll de cette Courbe considerée sous la forme de polygone infiniti-latere réctiligne, ainsi qu'on fait ici ; & qu'après avoir encore ici supposé LQ double de HL, on multiplie cette force par lF, & la pésanteur (p) du corps L par LQ: la raison qui a donné $LY.\ LG$ ou $Yl::p\times LY.\ f\times LY.$ dans l'article 18. Fig. 5. donnera de même ici $LF.\ Fl::p\times LQ.\ \frac{A\times Cl+C\times Dl-B\times GL\pm\&c.}{Ll}\times LF.$ D'où résultera $A\times Kl+C\times DL-B\times GL\pm\&c.=\frac{p\times LQ\times Fl\times Ll}{LF\times LF}$ (à cause de $LQ=2HL$, & de $LF=Ll$) $=\frac{2p\times HL\times Fl}{Ll}$.

Mais la Courbe MLN considerée (ainsi qu'elle l'est ici) sous la forme de la polygone infiniti-latere réctiligne, donne de plus $LR.\ Ll::Ll.\ Fl=\frac{Ll\times Ll}{LR}$. en prenant encore ici LR pour un des rayons de sa Dévelopée. Donc en substituant cette valeur de Fl dans la formule ou équation précédente, l'on aura enfin $A\times Kl+C\times DL-B\times GL\pm\&c.=\frac{2p\times HL\times Ll}{LR}$ (en supposant encore $HL=h$,

$LR = r$, & $Ll = ds$) $= \frac{2phds}{r}$ pour la Regle cherchée de tant de forces centrales qu'on voudra faire conſpirer à la deſcription d'une même Courbe quelconque conſiderée comme polygone infiniti-latere rectiligne, laquelle Regle on voit être la même que celle qui a été trouvée dans l'art. 55. en conſiderant cette Courbe comme faite d'élémens courbes eux-mêmes. *Ce qu'il falloit encore trouver.*

LVIII. Puiſque les art. 55. & 57. donnent $A \times Kl + C \times DL - B \times GL \pm$ &c. $= \frac{2\,hds}{r}$, ſoit qu'on conſidére la Courbe *MLN* ſous la forme de polygone, ou non; que $2p$ eſt une grandeur conſtante, & que les hauteurs (h) d'où le corps *décrivant* devroit tomber pour acquerir les vîteſſes qu'il a aux differens points de la Courbe qu'il décrit, ſont comme les quarrés de ces vîteſſes, c'eſt-à-dire, (en prenant v pour le nom de chacune de ces viteſſes, & dt pour celui de chacun des inſtans que le corps *décrivant* emploïe à parcourir chacun des élémens ds de la Courbe qu'il parcourt) $h = vv = \frac{ds^2}{dt^2}$; l'on aura $A \times Kl + C \times DL - B \times GL \pm$ &c. $= \frac{ds^3}{rdt^2}$ pour l'expreſſion de la raiſon que chacune des forces centrales A, B, C, &c. dont il s'agit ici, doit ſuivre pendant ſa variation par les differens points de la Courbe *MLN* qu'elles font décrire au corps L par leur concours d'action ſur ce même corps, quel que ſoit le raport (*hyp.*) donné de chacune de ces forces à chacune des autres: Et cette expreſſion eſt préciſement la même que celle que j'ai trouvée pour le même ſujet dans les Memoires de 1703. pag. 214. art. 2. Le ſigne d'égalité ne ſignifiant ici, non-plus que là, que des égalités de raports, & non de grandeurs, puiſqu'elles n'y ſont pas homogenes comme dans les articles précedens.

Regle du raport ou des raports que doivent avoir entr'elles les forces centrales à plusieurs centres ou foyers.

REMARQUE IV.

Touchant les Forces centrales de differens corps sur une même ou differentes Courbes, ou d'un même corps sur des Courbes differentes.

Regle de comparaison des forces centrales de differens corps sur une même ou sur differentes Courbes, ou d'un même corps sur des Courbes differentes.

LIX. Jusqu'ici nous n'avons consideré les Forces centrales que d'un même corps quelconque sur une seule & même Courbe aussi quelconque ; voici présentement pour de pareilles forces de differens corps sur une même ou sur differentes Courbes, ou d'un même corps sur des Courbes differentes : Voici, dis-je, quelles doivent être aussi les regles de comparaison de ces dernieres forces entr'elles, & avec les pesanteurs constantes de ces corps. Pour cela soient,

Les forces centrales	f,	F,	ϕ.
de trois corps dont les Masses soient . .	m,	m,	μ.
Leurs Pésanteurs	p,	π,	π.
Elémens des Courbes qu'ils décrivent	ds,	$d\sigma$,	$d\sigma$.
Vîtesses avec lesquelles ils parcourent ces élémens	u,	v,	v.
Hauteurs déterminatrices de ces vîtesses	h,	λ,	λ.
Rayons osculateurs de ces Courbes terminés aux élémens précedens	r,	ϱ,	ϱ.
Elémens des abscisses de ces mêmes Courbes, tels que *LD* par tout ci-dessus.	dx,	dz,	dz.

Cela posé les articles 9, 14, 18, 47, & 56. donneront $f = \frac{2phds}{rdx}$, & $F = \frac{2\pi\lambda d\sigma}{\varrho dx}$.

Ainsi l'on aura déja $f.\ F :: \frac{phds}{rdx} . \frac{\pi\lambda d\sigma}{\varrho dx}$.

L'on aura aussi de plus $F.\ \phi :: m.\ \mu$.

Donc on aura aussi $f\ \phi :: \frac{mphds}{rdx} . \frac{\mu\pi\lambda d\sigma}{\varrho dx}$.

pour la Regle génerale de comparaison cherchée, laquelle est aisée à détailler, quelque differens que les raports des masses des corps entr'elles, & de leurs pesanteurs

entr'elles, puiſſent être ſupoſés lorſque ces corps ſont differens, &c. *Ce qu'il falloit encore trouver.*

Toutes ces Regles ainſi établies, il ne reſte plus (ce me ſemble) qu'à expliquer le Paradoxe marqué à la fin de l'art. 44. En voici l'éclairciſſement.

ECLAIRCISSEMENT.

Sur le Paradoxe marqué à la fin de l'art. 44.

LX. Ce Paradoxe a raport à une difficulté qui me fut faite au mois de Fevrier ou de Mars de 1701. par M. L. C. D. L. fort habile en ces matieres. Il trouvoit étrange que les forces centrales qu'on vient de voir par tout ci-deſſus (à quelques cas près marqués dans l'article 22.) être finies, ou de même genre que la péſanteur des corps où elles ſe trouvent, ne leur fiſſent cependant parcourir que des eſpaces infiniment petits du ſecond genre, tels que Pl, Kh, Tu, Fe, dans les Fig. 1, 2, 3, 4. ci-deſſus art. 10. pendant chaque inſtant qui eſt un tems infiniment petit du premier genre. Cette force finie, diſoit-il, doit faire parcourir un eſpace fini à un corps fini dans un tems fini. Par conſéquent elle doit auſſi lui faire parcourir un eſpace infiniment petit du premier genre dans un tems infiniment petit du premier genre, c'eſt-à-dire, dans un inſtant. Par exemple, ajoûta-t'il, ſi x eſt l'eſpace fini que cette force fait parcourir à ce corps dans le tems fini t, elle devroit auſſi lui faire parcourir dx dans l'inſtant dt; cependant elle ne lui fait parcourir ddx pendant cet inſtant; comment concilier cela?

Quelque force centrale finie que ce ſoit non plus que la péſanteur d'un corps fini quelconque, ne peut par elle-même, c'eſt-à-dire elle ſeule, lui faire parcourir qu'un eſpace infiniment petit du ſecond genre pendant chaque inſtant, par exemple, pendant le premier inſtant qu'elle agit ſur lui.

Je lui répondis qu'il en étoit de même de la péſanteur au premier inſtant de chaque chute; & que cela venoit de ce que ſi l'on ſuppoſe l'une & l'autre de ces deux forces comme la même dans tout le tems t dès ſon premier inſtant dt, c'eſt-à-dire, comme conſtante & toûjours agiſſante ſur ce corps ainſi qu'on le penſe d'ordinaire de la peſanteur, les eſpaces que chacune d'elles lui doit faire parcourir pendant ces tems, doivent être comme les quarrés de ces mêmes tems à commencer dès l'origine de l'un & de l'au-

tre de ces eſpaces, c'eſt-à-dire : : $tt. dt^2$. Mais dt^2 eſt de même genre que $tddt$; puiſque tous les ddt ſont entr'eux de même genre, & que celui d'entr'eux qui eſt troiſiéme proportionel à t & à dt, donne $tddt = dt^2$. Donc le genre de l'eſpace x que cette force fait parcourir (*hyp.*) pendant le tems t au corps ſur lequel elle agit, doit être au genre de ce qu'elle lui en doit faire parcourir pendant le premier inſtant dt de ſon action ſur ce corps, comme le genre de tt eſt au genre de $tddt$, c'eſt-à-dire, comme le genre de t eſt au genre de ddt, ou comme le fini à l'infiniment petit du ſecond genre. Donc x étant (*hyp.*) l'eſpace fini parcouru dans le tems fini t en vertu de cette force centrale ſuppoſée finie & la même pendant tout ce tems t que dans l'inſtant dt, ou de la péſanteur ſuppoſée pareillement finie & conſtante; ddx doit être ce qu'elle en fait parcourir au même corps fini pendant l'inſtant dt. Mais quand ces forces de l'inſtant dt variroient de quelque maniere que ce fût dans le reſte du tems t, cette variation ne changeant rien à leurs valeurs conſtantes de l'inſtant dt, il eſt viſible qu'elles devroient encore faire faire à ce corps chacune le même eſpace pendant l'inſtant dt, que ſi elles demeuroient conſtantes pendant tout le tems t. Donc quelques variables que les forces centrales ſoient, & quand la péſanteur des corps le ſeroit auſſi, chacune de ces forces ne feroit encore parcourir que ddx pendant le premier inſtant dt de leur action, c'eſt-à-dire, un eſpace infiniment petit du ſecond genre à un corps fini dans un tems infiniment petit du premier genre. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Autre démonſtration du précedent art. 59.

LXI. La même choſe ſe peut démontrer encore ſans calcul. Car puiſque la force totale réſultante de l'aſſemblage de tout ce que la péſanteur du corps qui tombe, lui en imprime de nouvelle à chaque inſtant de ſa chute dans un tems fini, ne lui fait parcourir qu'un eſpace fini dans ce tems fini, cette même force totale ne lui doit faire parcourir qu'une infinitiéme ou differentielle du premier genre de cet eſpace dans une infinitiéme de ce tems, c'eſt-

à-dire, dans un inſtant. Donc la péſanteur de ce corps n'étant d'elle-même qu'une infinitiéme de cette force totale faite d'une infinité d'accroiſſemens inſtantanés égaux chacun à cette péſanteur, ne doit plus lui faire parcourir par elle ſeule à chaque inſtant qu'une infinitiéme de cette premiere différentielle d'eſpace fini, c'eſt à-dire, ſeulement une differentio-différentielle ou une ſeconde différentielle de cet eſpace. Par conſéquent auſſi la force centrale d'un corps à chaque inſtant pouvant être regardée comme une eſpece de péſanteur ou de force conſtante de même genre que la péſanteur de ce corps, elle ne doit non-plus lui faire parcourir qu'une différentielle d'eſpace du ſecond genre pendant cet inſtant. *Ce qu'il falloit encore démontrer.*

Puiſque (art. 60. & 61.) *la péſanteur d'un corps fini, priſe comme une force conſtante à la maniere de* Galilée, *ne peut lui faire parcourir qu'une différentielle (d'eſpace) du ſecond genre, pendant que ſa force de rotation lui en fait parcourir une du premier; il ſuit néceſſairement que ſa péſanteur eſt infiniment petite par raport à ſa force de rotation, quoiqu'on regarde auſſi d'ordinaire cette force de rotation comme une force finie; mais ce ſont deux genres différens de forces finies, comme les lignes, les ſurfaces, & le corps, ſont trois différens genres de grandeurs finies: De même, dis-je, que les corps, les ſurfaces, & les lignes, ſont également appellées des grandeurs finies, quoique les lignes ſoient infiniment petites par raport aux ſurfaces, & les ſurfaces par raport aux corps; De même auſſi les forces de rotation, les péſanteurs, & les forces centrales trouvées ci-deſſus de même genre que les péſanteurs, ſont également regardées comme des forces finies, quoique les deux dernières ſoient infiniment petites par raport à la premiere: De ſorte que lorſqu'on a dit ci-deſſus* (art. 22.) *qu'il y a des cas où les forces centrales ſe trouvent infinies, on a ſeulement voulu dire qu'elles ſe trouvent alors infinies par raport aux péſanteurs, & de même genre que les forces de rotation. C'eſt ainſi que cela ſe doit entendre dans tout cet Ecrit.*

LXII. Des articles 60. & 61. ſuit néceſſairement la *Solution de la premiere*

partie au paradoxe marqué à la fin de l'art. 44. Solution du Paradoxe de l'art 44. duquel il eſt ici queſtion. En effet, puiſque ſuivant ces deux derniers art. *60.* & *61.* une force centrale finie ou de même genre que la péſanteur du corps fini où elle ſe trouve, ne peut faire parcourir à ce corps qu'un eſpace infiniment petit du ſecond genre dans un inſtant, il eſt manifeſte que pour lui en faire parcourir un du premier genre dans ce même inſtant, cette force devroit être infinie par raport à cette péſanteur ; puiſque cet eſpace ſeroit infini par raport à l'autre, & que les effets ſont toûjours proportionnels aux cauſes. Or c'eſt juſtement ce que font les forces centrales

FIG. XV. du corps *L* aux points *T* où les touchantes tirées du centre *C* de ces forces, rencontrent le cercle *MLN* que ce corps eſt ſuppoſé décrire avec telle varieté ou variation de vîteſſe qu'on voudra : ces forces (dis-je) font parcourir chacune au corps L en *T*, un eſpace infiniment petit du premier genre dans un ſeul inſtant.

Pour le voir ſoit la ſecante *CL* infiniment proche de la tangente *CT*, avec deux autres touchantes *LP*, $\lambda\tau$, aux points *L*, λ, où cette ſecante rencontre le cercle, leſquelles touchantes rencontrent la premiere *CT* en *P*, π,

Cela fait, il eſt viſible que dans l'inſtant que le corps *L*, venant de *N* en *T*, parcourt l'élément circulaire *LT*, il parcourroit la tangente *LP* s'il n'en étoit point empêché par la force centrale qui dans cet inſtant le tire vers *C* de la valeur de *PT*; & qu'ainſi *PT* eſt ce que cette force lui fait faire alors d'eſpace pendant cet inſtant. Or il eſt viſible auſſi que *PT*, ici égale à *LP*, eſt de même genre que *LP* & *IT*. Donc la force centripete de ce corps vers *C*, lui feroit parcourir alors un infiniment petit du premier genre. Par conſéquent ſuivant le commencement de cet article-ci, cette force doit auſſi être pour lors infinie par raport à la péſanteur de ce corps.

On trouvera de même que ce corps allant de *M* en *T*, ſa force centrifuge ſuivant *CL*, doit le repouſſer de la valeur de πT dans l'inſtant qu'au lieu de parcourir la tangente $\lambda\pi$, comme il feroit ſans cette force, cette même

force

force l'oblige de ſuivre λT; & qu'ainſi πT étant encore un infiniment petit du premier genre, cette force centrale doit encore être infinie par raport à la peſanteur de ce corps.

Donc de quelque côté *N* ou *M*, que le corps L vienne au point d'attouchement *T*, ſes forces centrales ſuivant la touchante *CT*, doivent toûjours être infinies par raport à ſa peſanteur. Et ainſi des Forces centrales tendantes ſuivant les touchantes de toute autre Courbe, conformément à l'article 22. & à la premiere partie du Paradoxe marqué à la fin de l'art. 44.

LXIII. L'autre partie de ce Paradoxe eſt que quelque changement qu'il arrive en chaque point d'attouchement T, aux forces centrales (*f*) du corps L, en devenant centrifuges ou centripetes, de centripetes ou de centrifuges qu'elles étoient juſqu'à ce point; ce corps ne ſçauroit continuer ſa route ſuivant *NTM* ou *MTN*, c'eſt-à-dire, décrire ſeulement le demi-cercle *NTM*, tant que le centre *C* de ces forces (*f*) ſera hors ce demi-cercle du côté de ſa convexité. *Solution de la ſeconde partie du même paradoxe.*

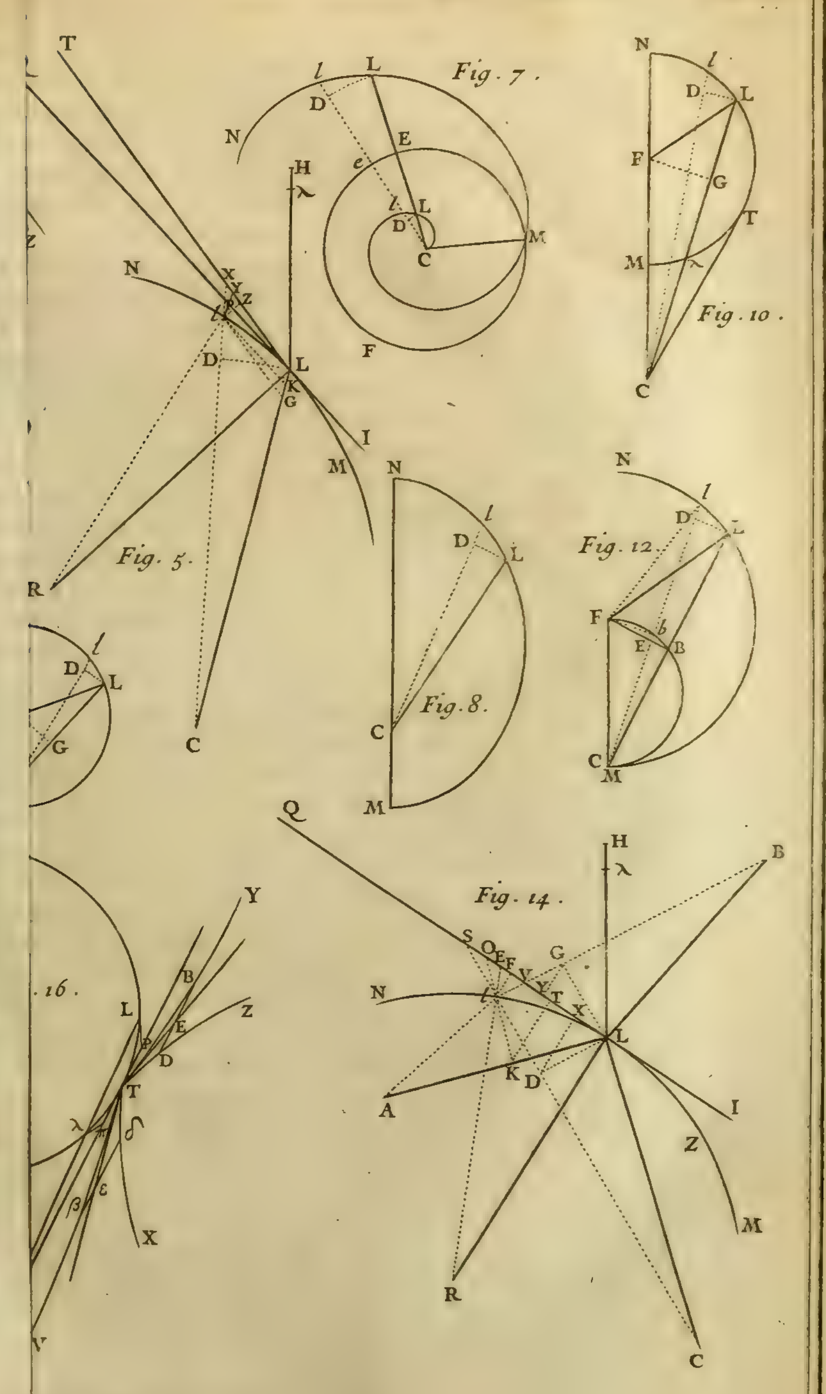
Pour le voir il faut conſiderer que puiſque le corps *L* venant de *N* en *T*, n'arrive en ce point d'attouchement T, qu'en ſuivant LT, & ſeulement en vertu du concours d'action de ſon effort ſuivant LP, & de ſa force ſuivant *PT*; ce corps abandonné à lui-même, au lieu d'aller vers *M* ſuivant Tλ, continuëroit ſa route ſuivant la droite *LT* prolongée vers ε: de ſorte que quelque changement qu'il arrive alors à ſa force centrale (*f*) tendante ſuivant CT, elle ne portera jamais ce mobile ſur l'arc TM; mais ſur l'arc *TX*, ſi elle devient centrifuge; ou ſur l'arc *TV* d'une Courbe qui embraſſera ou paſſera par ce point C, ſi cette force continuë d'être centripete. Fig. XVI.

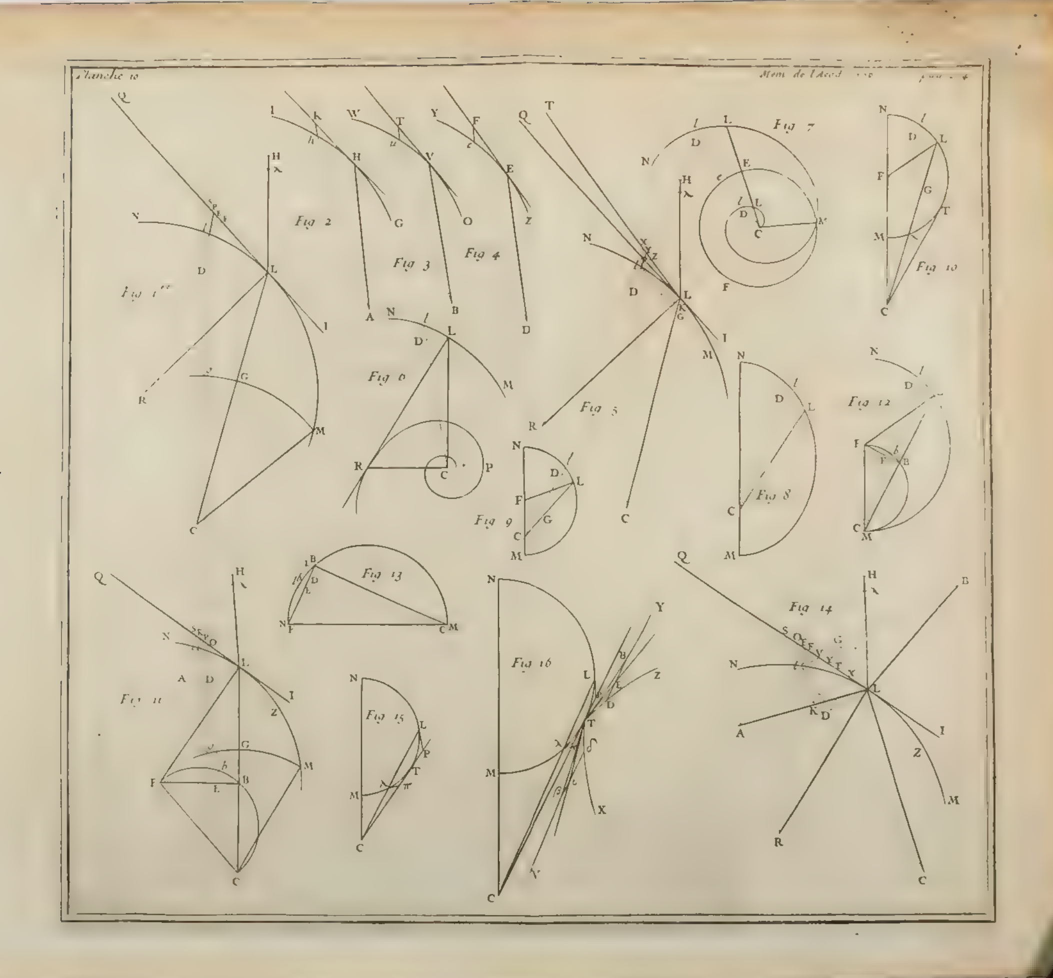
Par exemple, en ſuppoſant Tε = LT, & en faiſant par ε la droite βδ parallele à CT; il eſt manifeſte que le corps L parcourroit Tε dans un inſtant égal à celui qu'il a emploïé à parcourir LT, ſi toute ſa force centrale ceſſoit en T; & que ſi cette force continuë d'être centripete, de

quelque valeur de $\epsilon\beta$ qu'elle attire ce corps vers *C*, il pourſuivra ſa route ſuivant *T*β élement d'une Courbe *T*β*V* compriſe entre *T*ϵ & la tangente *CT*, puiſque $\beta\epsilon$ & *CT* ſont ſuppoſées paralleles entr'elles. Au contraire, ſi cette force centrale du mobile *L* ſe change en centrifuge en *T*, de quelque valeur de $\epsilon\delta$ qu'elle repouſſe ce corps parallelement a *CT*, il pourſuivra ſa route ſuivant *T*δ élement d'une Courbe *T*δ*X* encore plus écartée de *CT* cette Courbe ſe trouvant au-delà de *T*ϵ.

De même que l'on conſidere que le mobile venant de *M* en *T*, n'arrive en ce point d'attouchement *T*, qu'en ſuivant λ*T*, on verra que ce corps abandonné à lui-même ſuivroit la droite λ*T* prolongée vers *E*, & que quelque changement qu'il arrive là à ſa force centrale, elle ne le portera jamais ſur l'arc *TN*, mais ſur l'arc *TZ* ſi elle devient centripete, ou ſur l'arc *TY* ſi elle continuë d'être centrifuge, en le tirant de la valeur de *ED* dans le premier cas, ou en le repouſſant de la valeur de *EB* dans le ſecond, le tout ſuivant *BD* auſſi parallele & infiniment proche de *CT*. De ſorte que l'arc *BY* que ce corps décrira dans ce ſecond cas, ſe trouvera entre l'arc *TN* & la droite *TE*; & l'arc *TZ* du premier cas, ſera encore plus écarté de *TN*, cet arc *TZ* ſe trouvant en deça de *TE*.

Donc quelles que ſoient les forces centrales du mobile *L*, elles ne pourront jamais lui faire parcourir le demi-cercle *NTM* entier, tant qu'elles auront pour centre un point *C* pris hors ce demi-cercle du côté de ſa convexité, ſoit que ce corps vienne de *N* ou de *M* vers *T*, ainſi que le porte la ſeconde partie qui reſtoit à reſoudre du Paradoxe marqué à la fin de l'art. 44. Au contraire il ſuit de ce qui vient d'être démontré, qu'en ce point d'attouchement *T* ce corps, au lieu de ſuivre *TM* en venant de *N* vers *T*, continuëra ſa route ſuivant *TV* ou *TX*, ſelon que ſa force centrale en *T* continuëra d'être centripete, ou qu'elle y deviendra centrifuge. De même en allant de *M* vers *T*, au lieu de ſuivre l'arc *TN*, ce corps continuëra ſa route par une autre Courbe *TY* ou *TZ*, ſelon que ſa force


Fig. 5.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 10.
Fig. 12.
Fig. 14.
.16.


Planche 10
Mem. de l'Acad.
Fig. 1re
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 7
Fig. 8
Fig. 9
Fig. 10
Fig. 11
Fig. 12
Fig. 13
Fig. 14
Fig. 15
Fig. 16

centrale en *T* continuëra d'être centrifuge, ou qu'elle y deviendra centripete. On voit aussi que ces Courbes *TV*, *TX*, *TY*, *TZ*, se diversifieront selon les differens raports des Forces centrales du corps qui les décrira. Ce que l'on voit ici du demi-cercle *NTM*, se démontrera de même de toute autre Courbe en pareilles circonstances. *Et c'est tout ce qui restoit ici à faire voir.*

SOLUTION

Du Problême proposé par M. Jacques Bernoulli dans les Actes de Leipsik du mois de May de l'année 1697. trouvée en deux manieres par M. Jean Bernoulli son Frere, & communiquée à M. Leibnitz au mois de Juin 1698.

Cette Solution étoit Latine dans un paquet cacheté, présenté à l'Académie le 1. Fev. 1701. Il n'y fut ouvert que le 17. Avril 1706. & elle n'y fut luë que le 12. May suivant: cela pour les raisons qui se voient dans l'Histoire.

SUR LES ISOPERIMETRES.

PROBLEME I.

De toutes les Courbes isopérimetres décrites sur un même axe déterminé BN, *trouver la Courbe* BFN *telle que ses appliquées* FP *élevées à une puissance donnée, ou generalement telle que les fonctions quelconques de ces appliquées, exprimées par d'autres appliquées* PZ, *forment ou remplissent un espace* BZN *qui soit le plus grand de tous ceux qui peuvent être formés de la même maniere : ou bien (ce qui revient au même) une Courbe* BH, *qui ait pour axe* BG *perpendiculaire à* BN, *étant donnée, déterminer la Courbe* BFN *dont les appliquées* FP *prolongées jusqu'en* Z *ensorte que* PZ *soit égale à* GH, *fassent un espace* BZN *qui soit le plus grand de tous ceux qui peuvent être formés de la même maniere & compris par d'autres courbes quelconques décrites sur* BN *& de même longueur que* BFN. FIG. I.

SOLUTION.

Que *BFφ* soit une partie de la Courbe cherchée, & que *BZζ* soit partie de l'autre Courbe engendrée par celle-ci FIG. II.

ſuivant les appliquées de la Courbe donnée *BH*. Je regarde *FO*φ élement de la Courbe *BF*φ, comme composé de deux petites lignes droites *FO*, *O*φ; & de même l'élément *ZL*ζ de la Courbe *BZ*ζ, comme composé de deux petites lignes droites *ZL* & *L*ζ. Maintenant parce que toute Courbe qui doit donner un *maximum*, conſerve auſſi dans toutes ſes parties les loix de ce même *maximum*, il ſuit que ſi des points *F* & φ on mene deux autres petites lignes droites *F*ω, $\omega\varphi$, leſquelles priſes enſemble ſoient égales à $FO + O\varphi$, & que de ces lignes on en forme par la même loi $Z\lambda$, $\lambda\zeta$, de même que de *FO*, *O*φ, on a formé *ZL*, *L*ζ; il ſuit, dis-je, que l'eſpace $ZP\pi\zeta\lambda Z$. doit être plus grand que tout autre $ZP\pi\zeta\lambda Z$. Afin donc de trouver la poſition requiſe des petites lignes *FO*, *O*φ, qui doivent donner ce *maximum*, & delà de trouver la nature de la Courbe *BF*φ; je conçois que des foyers *F*, φ, & de la longueur du fil *FO*φ, on ait décrit une petite Ellipſe, ſur la circonference de laquelle les deux points *O*, ω, ſoient infiniment proches l'un de l'autre, c'eſt-à-dire, dont la diſtance *O*ω ſoit infiniment plus petite que la diſtance des foyers *F*, φ, quoique la droite *F*φ ſoit déja infiniment petite par elle-même, étant la ſoûtendante de l'élement $FO\omega\varphi$ de la Courbe *BF*φ. Donc par la nature du *maxim.* les deux eſpaces $ZP\pi\zeta LZ$ & $ZP\pi\zeta\lambda Z$ ſeront égaux entr'eux; & en ayant ôté ce qu'ils ont de commun, il reſtera le triangle ZLY égal au triangle $\zeta\lambda Y$; ou bien menant les paralleles *LO*, $\lambda\omega$ (en négligeant les parties infiniment plus petites *LYM* & $Y\lambda\mu$) le triangle *ZLM* ſera égal au triangle $\zeta\lambda\mu$, c'eſt-à-dire, qu'ayant méné *ZC* & ζD paralleles à l'axe $B\pi$, comme auſſi *FI* & φK, l'on aura $ZC \times LM = \zeta D \times \lambda\mu$. Mais parceque *LM* eſt la difference des lignes *LR*, *MR*, de même que $\lambda\mu$ l'eſt des lignes $\lambda\varrho$, $\mu\varrho$; & que *LR*, *MR*, & $\lambda\varrho$, $\mu\varrho$, ſont les fonctions des lignes reſpectives *RO*, *RT*, & $\varrho\omega$, $\varrho\theta$; il eſt clair que *LM* repreſentera la difference des fonctions qui ſont entre *RO*, *RT*; & que $\lambda\mu$ repreſentera de même la difference des fonctions qui ſont entre, $\varrho\omega$ $\varrho\theta$. Il faut bien remarquer que la difference des

fonctions de deux lignes comme RO, RT, qui ſe ſurpaſſent d'une quantité TO infiniment petite du ſecond genre, ſe trouve en différentiant ſimplement la fonction de RO, & en multipliant par TO ce qui en vient, ayant omis les differentielles : Par exemple, ſi RL fonction de RO, étoit ſeulement la puiſſance n de la même RO, en quoi conſiſte le cas de mon Frere, c'eſt-à-dire, que ſi la Courbe BH étoit une Parabole du degré n, alors LM ou $\overline{RO}^{n} - \overline{RT}^{n}$ ſeroit $= n\overline{RO}^{n-1} \times TO$, De même ſi la Courbe BH étoit un cercle dont le rayon fût $= a$, alors LM ou

$$\sqrt{2a \times RO - \overline{RO}^{2}} - \sqrt{2a \times RT - \overline{RT}^{2}} \text{ ſeroit} = \frac{a - RO}{\sqrt{2a \times RO - \overline{RO}^{2}}} \times TO.$$

& ainſi des autres. Il faut auſſi remarquer qu'en général on exprimera les differences des fonctions de RO, RT, par $\Delta RO \times TO$, en prenant Δ pour le ſigne ou la caractériſtique des differences des fonctions où l'on omet les differences des grandeurs dont elles ſont fonctions. Donc ayant déja $ZC \times LM = \zeta D \times \lambda\mu$, l'on aura auſſi $FI \times \Delta RO \times TO = \phi K \times \Delta \varrho\omega \times \theta\omega$.

Maintenant des centres F & ϕ ſoient décrits les petits arcs OX, $\omega\xi$, leſquels par la nature de l'Ellipſe ſont égaux entr'eux. Donc TO eſt à $\theta\omega$, comme la ſecante de l'angle XOT ou IFO eſt à la ſecante de l'angle $\xi\omega\theta$ ou $K\phi\omega$. Mais on a auſſi FI. ϕK : : $FO \times$ ſin. FOI. $\phi\omega \times$ ſin. $\phi\omega K$. Donc ſi à la place de FI, ϕK, & de TO, $\theta\omega$, on ſubſtituë les grandeurs qu'on leur voit ici proportionnelles, on aura $FO \times$ ſin. $FOI \times \Delta RO \times$ ſec. $IFO = \phi\omega \times$ ſin. $\phi\omega K \times \Delta\varrho\omega \times$ ſec. $K\phi\omega$. Or par les loix des ſinus, tangentes, & ſecantes, le réctangle fait du ſinus de l'angle FOI par la ſecante de l'angle IFO, eſt égal au réctangle fait du ſinus de $\phi\omega K$ par la ſecante de $K\phi\omega$. Donc $FO \times \Delta RO = \phi\omega \times \Delta\varrho\omega$; ou ſi pour RO l'on prend ſon équivalente PF qui lui eſt jointe par la petite ligne droite FO, & que pour $\varrho\omega$ on prenne de même ſon équivalente $\pi\phi$, l'on aura $FO \times \Delta PF = \phi\omega \times \Delta\pi\phi$; & par conſequent ΔPF. $\Delta\pi\phi$: : $\phi\omega$ (ϕO). FO : : ſin. $OF\phi$. ſin. $O\phi F$. Et, permutando, ΔPF, ſin. $OF\phi$: : $\Delta\pi\phi$. ſin. $O\phi F$. Et par-

ce que $F\varphi$ est la soûtendante d'un arc infiniment petit $FO\varphi$ de la Courbe $BFO\varphi$; & qu'ainsi on peut regarder chacun des angles $OF\varphi$ & $O\varphi F$ comme la moitié de l'angle de la courbure en F & en φ ; il suit que ΔPF est au sinus de la courbure en F, comme $\Delta\pi\varphi$ est au sinus de la courbure en φ, c'est-à-dire, en raison constante. Ainsi ce Problême étant ainsi réduit à la pure Analyse, on peut l'énoncer en cette sorte.

Trouver la Courbe BFφ *dont la nature soit telle que le sinus de sa courbure dans un de ses points quelconques* F, *soit à la fonction differentiée de son appliquée respective* PF (*ayant negligé la difference de cette appliquée*) *en raison constante.*

FIG. III. Voici la maniere dont on peut résoudre ce Problême. Soit BF la Courbe cherchée, dont l'element (que l'on prend pour constant) soit $Fl = dt$, $BP = y$; $PF = x$, $Pp = dy$, $Cl = dx$; soit regardée Fm comme la tangente en $F = Fl$, & par consequent lFm comme l'angle de la courbure, dont le sinus est lm. Soit enfin le triangle réctangle mnl, dont les côtés mn, nl, soient paralleles aux côtés lC, CF, du triangle FCl ; l'on aura $mn = ddx$, & $nl = ddy$. De plus à cause de ces triangles semblables GFl, nml, on aura aussi Cl (dx) : : nl (ddy). $ml = \frac{dt\,ddy}{dx}$. Mais par la nature de la Courbe, ml est à ΔPF en raison constante. Donc en faisant $\frac{dt\,ddy}{dx} . \Delta x : : dt . a.$ l'on aura cette équation $addy = \Delta x \times dx$. Mais comme $\Delta x \times dx$ est la fonction elle-même differentiée, si l'on intégre, l'on aura la fonction elle-même ou GH. Soit donc cette ligne $GH = X$, ayant aussi pris l'integrale de l'égalité qu'on vient de trouver, on aura $ady = X \pm c$; ou bien ayant multiplié les parties homogenes par la constante dt, on aura $ady = Xdt + cdt$ (il faut bien remarquer que j'entends par c une quantité constante & arbitraire, dont il est permis d'augmenter ou de diminuer l'integrale d'une differentielle quelconque) ; & en quarrant de part & d'autre l'on aura aussi $aady^2 =$ $= dt^2 \times \overline{X \pm c}^2 = \overline{dx^2 + dy^2} \times \overline{X \pm c}^2$, d'où l'on tire enfin

$dy = \frac{dx \times X \pm c}{\sqrt{aa - X \pm c}^2}$, qui ſera l'équation générale à la Courbe cherchée, laquelle deviendra fort ſimple (il ſuffit d'en trouver une qui ſatisfaſſe) en ſupoſant $c = o$ dans cette équation : car il en réſultera $dy = \frac{Xdx}{\sqrt{aa - XX}}$, dont l'intégrale ſera ici $\int \frac{Xdx}{\sqrt{aa - XX}}$, ſuivant laquelle ſi l'on conſtruit une Courbe, je dis qu'elle ſera celle qu'on demande.

Corol. Ayant ſuppoſé $c = o$, & conſéquemment $ady = Xdt$, l'on aura $dy. X : : dt. a$. Mais en ſuppoſant dt conſtante, dy eſt le ſinus de l'angle BFP. Donc le ſinus de l'angle $BFP. X(GH) : : dt. a$. c'eſt-à-dire, en raiſon conſtante. Mais ſi BF eſt la Courbe *Brachyſtrochrone*, & BH la Courbe dont les ordonnées GH expriment les vîteſſes aux points F, j'ai fait voir * dans le tems, que le ſinus de l'angle BFP eſt à GH en raiſon conſtante. D'où l'on voit que la Courbe BF a en même tems ces deux proprietez ; puiſqu'elle eſt telle que $\int Xdx$ eſt un *maximum*, & en même tems $\frac{\int dt}{X}$ un *minimum*. Mais cette Courbe n'a pas cette proprieté lorſque c n'eſt pas $= o$.

* Voyez les actes de Leipſik de 1697 pag. 208. &c.

PROBLÊME II.

Les mêmes choſes étant poſée, ſi l'on ſuppoſe maintenant que PZ *ſoit comme la fonction donnée de l'arc* BF, *on demande la nature de la courbe* BFN. FIG. I.

SOLUTION.

Si l'on ſuit la même methode que ci-deſſus, on réſoudra facilement ce Problême. Car le triangle ZLY ſera toûjours égal au triangle $\zeta\lambda Y$ par la nature du *maximum*, ou $ZC \times LM = \zeta D \times \lambda\mu$. Mais LM ($LR = MR$) eſt la difference des fonctions des deux arcs BFO, BFT ; & $\lambda\mu$ ($\lambda\varrho - \mu\varrho$) la difference des fonctions des deux arcs $BF\omega$, $BF\theta$; & l'on trouvera la difference de ces fonctions de la même maniere que ci-deſſus, en multipliant ſimplement la fonction differentiée (ayant negligé la differentielle de l'arc dont FIG. II.

elle est fonction) par la difference des deux arcs BFO, BFT, c'est-à-dire, par TX. Donc à la place de $ZC \times LM = \zeta D \times \lambda\mu$, il faut écrire $FI \times \triangle BFO \times TX = \phi K \times \triangle BF\omega \times \theta\xi$. Maintenant par la proprieté de l'Ellipsée supposée décrite des foyers F, ϕ, par le moyen d'un fil $= FO + O\phi = F\omega + \omega\phi$, les petites lignes OX & $\omega\xi$ sont égales entr'elles. Donc TX. $\theta\xi$: : tang. IFO. tang. $K\phi\omega$. De plus on a encore FI. ϕK, & de TX, $\theta\xi$, on prend ces grandeurs qu'on voit leur être proportionelles, on aura $FO \times$ sin. $FOI \times$ tang. $IFO \times \triangle BFO = \phi\omega \times$ sin. $\phi\omega K \times$ tang. $K\phi\omega \times \triangle BF\omega$. Mais la proprieté des sinus, tangentes, & secantes, le sinus de $FOI \times$ tang. $IFO =$ sin. total $\times$ sin. IFO; de même le sinus de $\phi\omega K \times$ tang. $K\phi\omega =$ sin. total $\times$ sin. $K\phi\omega \times \triangle BF\omega$; ou bien si à la place de BFO on prend son équivalente BF; & à la place de $BF\omega$, son équivalente $BF\phi$; l'on aura $FO \times$ sin. $IFO \times \triangle BF = \phi\omega \times$ sin. $K\phi\omega \times \triangle BF\phi$. Donc sin. $IFO \times \triangle BF$. sin. $K\phi\omega \times \triangle BF\phi$: : $\phi\omega$ (ϕO) FO : : sin. $OF\phi$. sin $O\phi F$. Et, *permutando*, sin. $IFO \times \triangle BF$. sin. $OF\phi$: : sin. $K\phi\omega \times \triangle BF\phi$. sin. $O\phi F$. en raison constante. De sorte que ce Problême ainsi réduit à la pure Analyse, se peut proposer de cette maniere.

Trouver une Courbe BFϕ *de telle nature que le sinus de sa courbure dans un de ses points quelconque* F, *soit au sinus de* IFO $\times \triangle$BF *en raison constante.*

FIG. III. Pour résoudre ce Problême soit nommée, comme ci-devant BP, y; PF, x; BF, t; Pp, dy; Cl, dx; Fl ou Fm, dt; & la fonction donnée de l'arc BF, v; l'on aura $ml = \frac{dtddy}{dx}$. Donc en faisant (selon la proprieté que l'on vient de trouver de la Courbe cherchée) $\frac{dtddy}{dx} . dx \times \triangle v$, $\left(\frac{dxdv}{dt}\right)$: : $dt . a$, l'on aura cette équation $\frac{adtddy}{dx^2} = dv$, ou $\frac{adtddy}{dt^2 - dy^2} = dv$, dont l'intégrale est $v = \int \frac{adtddy}{dt^2 - dy^2}$, ou (parce que a & dt sont supposées constantes) $v = \int \frac{ddy}{dt^2 - dy^2}$;

laquelle

laquelle équation exprime la nature de la Courbe qu'on demande.

REMARQUE.

On trouvera avec la même facilité, si on le veut, la Courbe *BF*φ en prenant *PZ* pour quelqu'autre fonction que ce soit, composée à volonté des fonctions non-seulement de l'arc *BF*, ou de l'apliquée *PF*, mais aussi de toutes les deux ensemble de telle maniere qu'on voudra. Car on en viendra toûjours à cette proprieté que le sinus de la courbure dans un point quelconque *F*, est à une certaine quantité en raison constante. Ainsi ce Problême étant réduit à la pure Analyse, on trouvera facilement l'équation qui exprime la nature de la Courbe cherchée. FIG. I.

On peut aussi résoudre de la même maniere le Problême de *Catenaires* & des *Brachystochrones*, dont les Solutions s'accordent facilement avec celles que j'ay données & que j'avois trouvées par differentes methodes; ce qui ne contribuë pas peu à faire voir l'excellence de celle-ci. Au reste comme cette methode est directe, je vais en ajoûter une indirecte prise de la pression des liqueurs, laquelle donnera précisément la même solution; & cet accord merveilleux de ces deux methodes, tant directe qu'indirecte, nous assurera encore de leur certitude.

Soit un linge *BFN* étendu par une liqueur qui le presse par dessus, dont la pésanteur soit uniforme ou non. Il est clair que ce linge prendra une courbure telle qu'elle permettra à la liqueur de descendre le plus bas qu'il est possible: & cela arrivera lorsque les *gravitations* de toutes les parties de la liqueur jointes ensemble feront un *maximum*. Il faut bien remarquer que je ne dis pas que cela arrivera lorsque le centre de pésanteur de la liqueur sera le plus bas; car on ne peut considérer ici le centre de pésanteur, puisque la courbure *BFN* variant (quoiqu'elle soit isopérimetre) la quantité de liqueur contenuë dans cette courbure changera aussi: ainsi le centre de pésanteur n'y seroit pas le même. Que l'on imagine donc maintenant que l'espace *BFN* soit divisé en ses filamens par les apliquées FIG. I.

verticales *PF*, *pf*, &c. Et soit la Courbe *BL* dont les ordonnées *GL* expriment les gravitations de la liqueur suivant la hauteur *BG* ou *PF*, c'est-à-dire, dont les appliqués *GL* & *ED* expriment le raport de ce dont la particule *FC* de la liqueur suivant sa profondeur *PF* pese plus ou est plus pressée par le poids du filament ou de la colonne *PFCp*, qu'une égale particule *MN* suivant la profondeur *PM* n'est pressée par le poids de la colonne *PMnp* : comme donc *LG* exprime la gravitation de la particule *FC*; & de toutes les autres qui sont à la même profondeur, ou qui se trouvent dans la droite *GC* prolongée; de même comme *DE* marque la gravitation de la particule *Mn* & des autres qui se trouvent dans la droite *EM* prolongée; il est clair que toutes ces appliquées prises ensemble, c'est-à-dire, les espaces *BLG* & *BDE* marqueront toutes les gravitations (je ne dis pas les pésanteurs) prises ensemble de toutes les particules qui se trouvent dans les colonnes *PFCp*, *PMnp*. Si donc on décrit une autre Courbe *BH*, dont les appliquées *GH* soient respectivement comme les espaces *BLG*, & si à *P* on applique *PZ*=*GH*, l'on aura une nouvelle Courbe *BZN* dont les apliquées *PZ* exprimeront la somme des gravitations des particules par raport à leurs colonnes respectives *PFCp*; & par conséquent la somme des appliquées *PZ*, c'est-à-dire, tout l'espace *BZN* représentera les gravitations de toutes les parties de la liqueur contenuë dans le linge ou la voile *BFN*. Donc puisque la voile prend une telle figure ou courbure que toutes les gravitations prises ensemble (c'est-à-dire l'espace *BZN*) font un *maximum*, il est clair que si l'on emploïoit une liqueur d'une pésanteur continuellement differente avec cette loi ou condition que *LG*, *DE*, ou les gravitations des particules dans les profondeurs de *F*, *M*, fussent dans la raison des différentielles des appliquées *GH* (lesquelles dans le Problême de mon Frere marquent les fonctions des mêmes *PF*) il est clair, dis-je, qu'alors la courbure du linge ou de la voile seroit la même que la courbure que mon Frere m'a

proposée de chercher seulement pour les puissances de *PF*. Mais je l'ay resolu ci-dessus ce Problême par la methode directe pour une fonction quelconque.

Afin donc que je montre l'accord de cette methode directe avec l'indirecte, je vas chercher la nature de la Courbe ou courbure que prend un linge ou une voile chargée d'une liqueur dont la gravitation varie suivant le raport que j'ay marqué: que si je tombe dans la même équation trouvée ci-dessus, qui est-ce qui osera douter de l'infaillibilité de ces methodes? Il se presente ici d'abord un cas fort facile, qui est lorsque la pésanteur de la liqueur est uniforme, ce qui est ordinaire, c'est-à-dire, lorsque les gravitations *LG*, *DE*, sont entr'elles comme les profondeurs *BG*, *BE*; ce qui rend la Courbe *BL* une ligne droite, & la Courbe *BH* une parabole ordinaire: alors *BFN* sera la courbure ordinaire du linge, ou de la voile, laquelle courbure mon Frere a attribuée à son *Elastique*, & dont la nature s'exprime (comme je l'ay trouvé autrefois aussi-bien que mon Frere) par cette équation $y = \int \frac{xxdx}{\sqrt{a^4 - x^4}}$.

Maintenant si dans l'équation generale $y = \int \frac{Xdx}{\sqrt{aa - XX}}$ trouvée ci-dessus (*Sol. Probl.* 1.) par la methode directe, on met à la place de la fonction generale X, le cas particulier xx que l'on suppose ici, l'on aura $y = \int \frac{xxdx}{\sqrt{aa - x^4}}$, ou (ayant supléé aux termes homogenes) $y = \int \frac{xxdx}{\sqrt{a^4 - x^4}}$; ce qui fait voir déja en ceci l'accord des methodes.

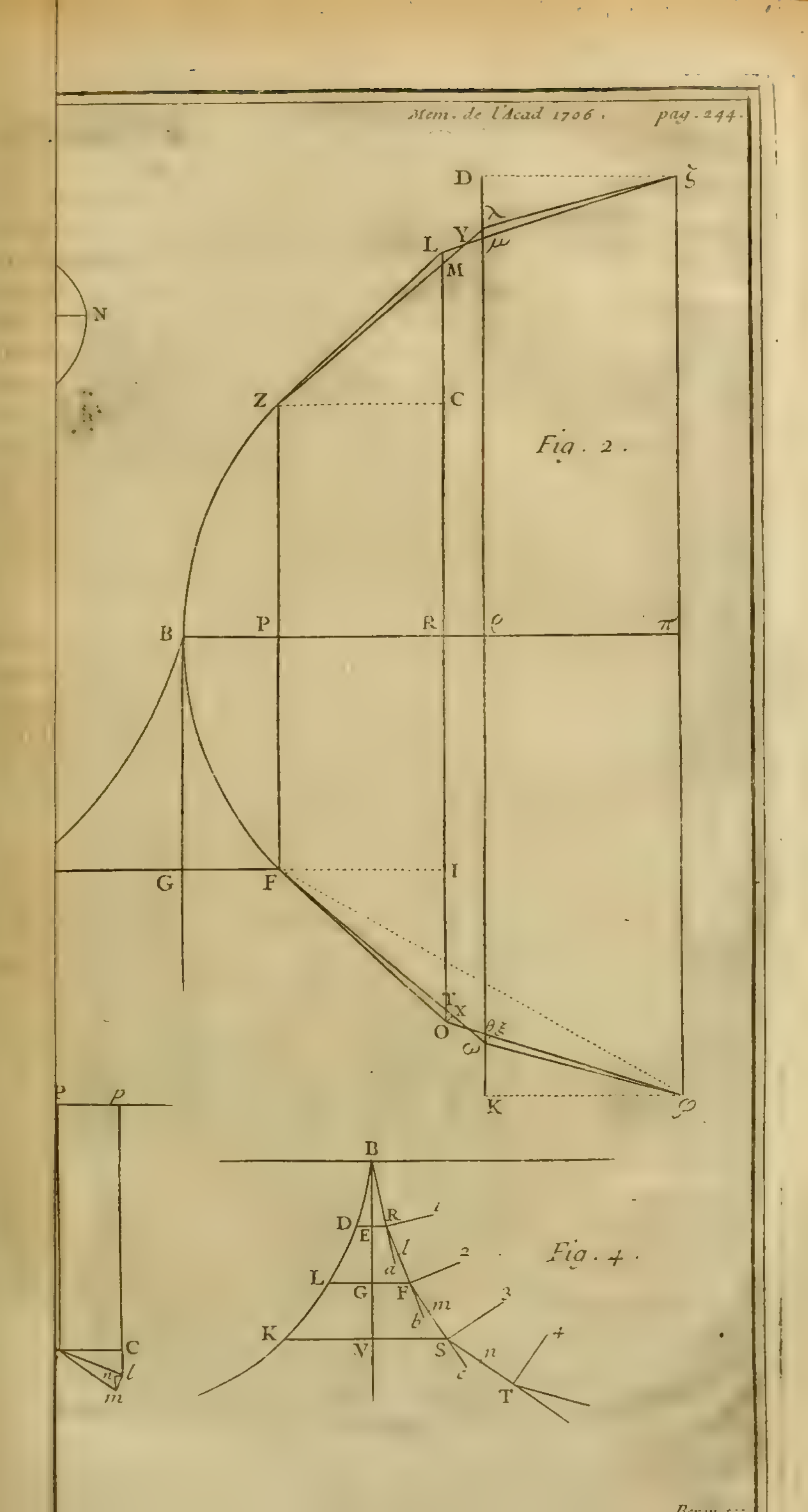
Si l'on suppose presentement par la loi generale de la gravitation de la liqueur que la Courbe *BDL* soit une Courbe quelconque, & qu'on veüille trouver la nature de la courbure de la voile *BFN*, on le peut faire par la methode dont je me suis servi autrefois pour trouver la courbure de la voile enflée par le vent, laquelle consiste en ceci que la direction de la pression de la liqueur, qui est par tout perpendiculaire à la Courbe, soit regardée

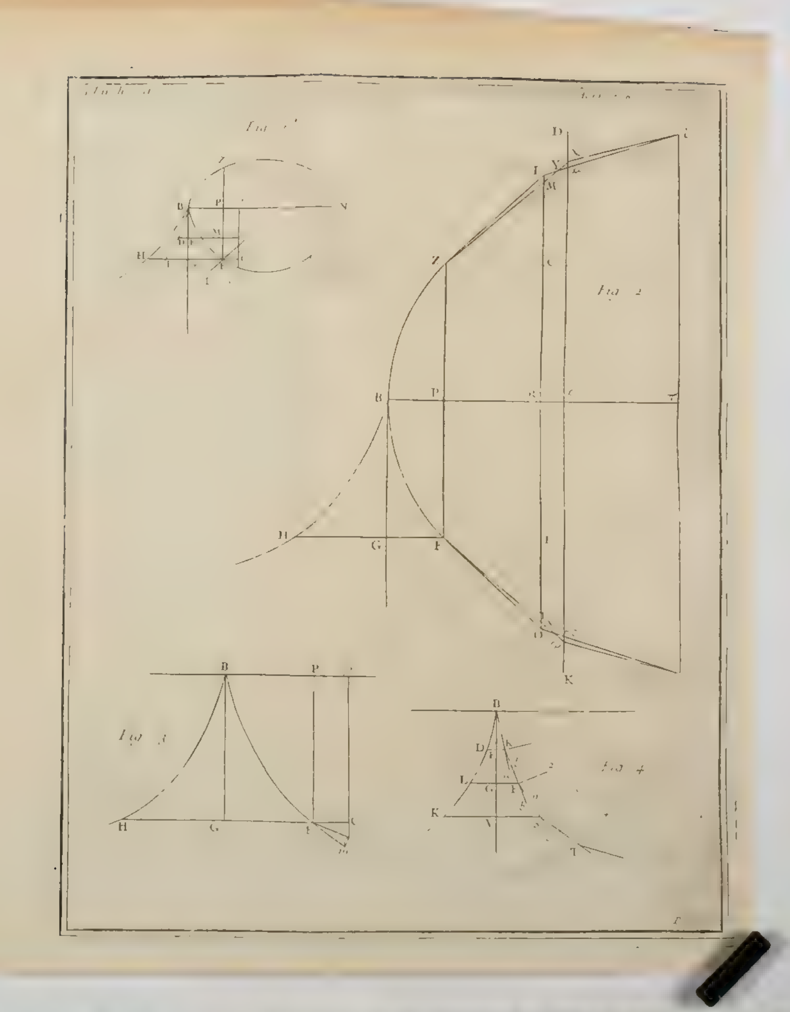
comme composée de deux pressions collaterales, l'une horizontale & l'autre verticale, & que par l'une & par l'autre prise séparément, on cherche quelle est la ténacité requise dans le point le plus bas, ou la force avec laquelle la voile dans le point le plus bas est étendue suivant la tangente *a*, qui est la force absoluë étant constante dans quelque point de la courbure que la voile soit suspenduë, ou (si on l'aime mieux) qu'elle soit attachée à un clou. Ainsi formant une équation de ce qui viendra, avec une quantité constante prise à volonté, de la maniere que je l'avois fait autrefois pour les funiculaires ou catenaires, on trouvera la même équation que j'ay trouvée ci-dessus par la methode directe. Cette maniere d'operer, quoique legitime, est neanmoins plus longue & n'est pas si naturelle que cette autre que j'ay découverte depuis peu de tems, & que je vas raporter ici.

FIG. I. Parce que chaque particule *Ff* du linge ou de la voile est pressée suivant *FI*, qui est une direction perpendiculaire à la Courbe, par le poids de la colonne de liqueur qui appuïe dessus, ou par la gravitation de la particule *FC* de la liqueur, laquelle gravitation est exprimée par la ligne *LG*, la Courbe sera la même que celle qui se formeroit, si je concevois que le fil *BRFST* fût étendu par des

FIG. IV. puissances *R*1, *F*2, *S*3, *T*4, &c. perpendiculairement appliquées à tous les points *R*, *F*, *S*, *T*, &c. & proportionnelles aux appliquées correspondantes *ED*, *LG*, *VK*, &c. Or je vas montrer d'une maniere facile que cette Courbe, & par consequent la courbure du linge, est la même que celle que j'ay trouvée ci-dessus par la methode directe.

Soit la Courbe conçûë comme un polygone d'une infinité de côtés *BR*, *RF*, *FS*, *ST*, &c. lesquels étant prolongés font des angles *aRF*, *bFS*, *cST*, &c. qui marquent les courbures de la Courbe dans les points *R*, *F*, *S*, &c. Maintenant on sçait par les loix de la Mécanique que la puissance 1*R* qui pousse, est à la puissance *l* qui soûtient, ou (ce qui est la même chose) à la force de la ténacité requise du fil dans un point quelconque moïen entre


D
ς
λ
Y
μ
L
M
N
Z
C
Fig. 2.
B
P
R
ρ
π
G
F
I
X
O
θ ξ
ω
K
φ
P
p
C
n
l
m
B
D
R
E
l
a
L
G
F
m
b
K
V
S
n
c
T
Fig. 4.



D
Y
I
M
Z
C
Fig. 2
B
P
R
H
G
F
O
K
B
P
H
G
F
Fig. 3
B
D
L
G
F
K
V
T
Fig. 4

R & *F*, comme le ſinus de l'angle *aRF* eſt au ſinus de l'angle *BR*I, c'eſt-à-dire, au ſinus total : de même la puiſſance qui ſoûtient en *l*, eſt à la puiſſance 2 *F* qui pouſſe, comme le ſinus de l'angle 2*Fm* ou le ſinus total eſt au ſinus de l'angle *bFS*; d'où il eſt évident que la puiſſance 1*R* eſt à la puiſſance 2*F*, comme le ſinus de l'angle *aRF* eſt au ſinus de l'angle *bFS*. On démontrera de la même maniere que la puiſſance 2 *F* eſt à la puiſſance 3 *S*, comme le ſinus de *bFS* eſt au ſinus de *cST*; & ainſi de ſuite. Donc la puiſſance 1*R* eſt à la puiſſance 3*S*, comme le ſinus de l'angle *aRF* eſt au ſinus de l'angle *cST*; & *permutando*, le ſinus de l'angle *cST* eſt à la puiſſance 3*S* (*KV*), comme le ſinus de l'angle *aRF* eſt à la puiſſance 1*R* (*DE*) : c'eſt-à-dire, que le ſinus de l'angle de la courbure dans un point quelconque *R* eſt à *DE* que je ſuppoſe exprimer la fonction differentiée de *BE*, en raiſon conſtante. Or j'ay prouvé par la methode directe cette même proprieté. Donc la courbure du linge ou de la voile chargée de la maniere qu'on le vient de dire, & celle des Iſopérimetres, eſt la même. Donc la methode directe & l'indirecte ſe confirment l'une l'autre. *Ce qu'il falloit démontrer.*

DESCRIPTION

D'UNE EXOSTOSE MONSTRUEUSE.

PAR M. MERY.

SUr la fin de l'hyver dernier on amena à l'Hôtel-Dieu un Soldat Irlandois, âgé d'environ 40 ans, dont les deux condils *A*, *A*, premiere Fig. *B*, *B*, ſeconde Fig. du femur *C*, formoient par leur dilatation extraordinaire une Exoſtoſe monſtrueuſe, tant par ſa groſſeur que par ſa figure. 1706. 2. Juin.

La violente douleur qu'elle cauſoit à ce pauvre malade, le força à me demander avec empreſſement que je lui

coupaſſe la cuiſſe;ce que je fis pour apporter quelque ſoulagement à ſes ſouffrances.

Après cette operation, j'examinai à loiſir dans mon cabinet cette monſtrueuſe Exoſtoſe, ſur laquelle je fis les remarques que je vais raporter.

Premierement, j'obſervay que cette Exoſtoſe ſeparée du corps du femur *C*, & de la jambe; mais recouverte encore des tégumens communs, & des aponevroſes des muſcles qui envelopent le genou, peſoit environ quinze à ſeize livres. Revêtuë de ces parties, elle formoit une eſpece de globe, qui avoit 9 pouces de large, ſur 9 $\frac{1}{2}$ de haut: ſa ſuperficie paroiſſoit aſſez unie & aſſez égale; mais dépoüillée de ces parties, elle parut fort inégale & raboteuſe, ſon poids diminua de 4 livres ou environ, ſa largeur fut reduite à 7 pouces $\frac{1}{2}$, & ſa hauteur à 8, comme il paroît dans les deux Figures que l'on en donne à la fin de ce Memoire.

Secondement, je remarquay que tous les tendons des muſcles qui ſervent au mouvement de la jambe, étoient ſi violemment bandez ſur ce globe, que le genou ne pouvoit nullement ſe plier. Cette extenſion extraordinaire n'étoit pas cependant la ſeule cauſe qui empêchât les mou-
FIG. I. vemens de la jambe. Les deux condils du femur *A*, *A*. *B*, *B*. avoient tellement changé de figure, que leur partie
FIG. II. convexe étoit devenuë plate & même enfoncée *E*, *E*, dans ce globe, de ſorte qu'il étoit abſolument impoſſible qu'elle pût rouler dans la partie concave ſuperieure du tibia. Ces deux cauſes jointes enſemble s'oppoſoient donc également aux mouvemens de la jambe.

Troiſiémement, après avoir enlevé le perioſte qui couvroit cette Exoſtoſe, je m'apperçûs qu'elle étoit d'une eſpece particuliere. Les Exoſtoſes communes ne ſont qu'un bourſouflement ou enflure des os mêmes, cauſée par un ſuc trop abondant, qui ſe change en leur ſubſtance ſans ſortir de leurs porroſitez, ou une eſpece de vegetation qui ſe fait de ce même ſuc qui s'en échape, & s'oſſifie entre le perioſte qui couvre les os & leur ſurface exterieure

avec laquelle il s'unit, tantôt en se confondant avec l'os même, tantôt en ne faisant que s'appliquer sur sa superficie.

L'Exostose dont je fais la description étoit differente de celle-cy, en ce qu'elle formoit un globe creux, rempli en dedans d'une matiere semblable à celles des polypes, qui s'engendrent dans le cœur & dans ses vaisseaux; de sorte qu'il paroît fort vrai-semblable que cette matiere ayant d'abord rompu les fibres osseuses de la partie spongieuse interieure des condils du femur, elle en avoit dilaté ensuite la partie solide exterieure.

Mais parce que cette partie solide qui formoit ce globe, étoit percée d'une infinité de trous de figures irregulieres, & de grandeur fort differente; il y a aussi-bien de l'apparence que les sels corrosifs dont cette matiere étoit empreinte, avoient détruit une partie de ce globe, & dissout les fibres osseuses qui forment par leur assemblage les petites cellules des condils du femur; ce qui donne lieu à cette conjecture, c'est que je trouvay un tartre rougeâtre attaché au dedans & au dehors de ce globe, qui en avoit rongé les surfaces.

Mais aussi parceque ce globe osseux étant dépoüillé de toutes les parties charnuës qui le couvroient, & vuide entierement de toute la matiere polypeuse qu'il renfermoit dans sa capacité, pesoit étant sec beaucoup plus que ne peuvent faire (en cet état) les condils du femur du plus grand homme; on ne peut, ce me semble, douter qu'une partie de cette matiere n'ait servi à son augmentation.

Quatriémement, j'observay sur la surface posterieure de ce globe une rainure *F*, *F*, *F*, fort profonde, dans laquelle passoient les arteres & les nerfs qui descendoient à la jambe, & les veines qui de cette partie remontoient à la cuisse. Cette rainure étoit percée dans son fond de plusieurs trous, par lesquels quelques rameaux de ces vaisseaux entroient & ressortoient de la capacité de ce globe. FIG. II.

Dans le même endroit je découvris de plus quatre cavernes osseuses, de grandeur & de figure differente. Elles FIG. II. 1, 2, 3, 4.

étoient remplies d'une matiere semblable à celle qui étoit renfermée dans ce globe. Ces cavernes avoient aussi plusieurs ouvertures : par les unes elles communiquoient avec sa capacité, & par les autres avec les parties membraneuses & charnuës qui couvrent le genou. Leur cavité étoit fort raboteuse, & paroissoit avoir été rongée par la partie tartareuse de la matiere qui s'y étoit amassée.

Cinquiémement, enfin la derniere observation que je fis sur cette monstrueuse Exostose, fut qu'en plongeant un instrument dans sa concavité pour en ôter la matiere polypeuse qui y étoit renfermée, il sortit du centre de cette matiere deux palettes ou environ d'une liqueure jaune & fort claire; ce qui me fit croire qu'il y avoit dans le centre de cette matiere une cavité dans laquelle cette liqueur pouvoit être contenuë.

EXPLICATION DES FIGURES.

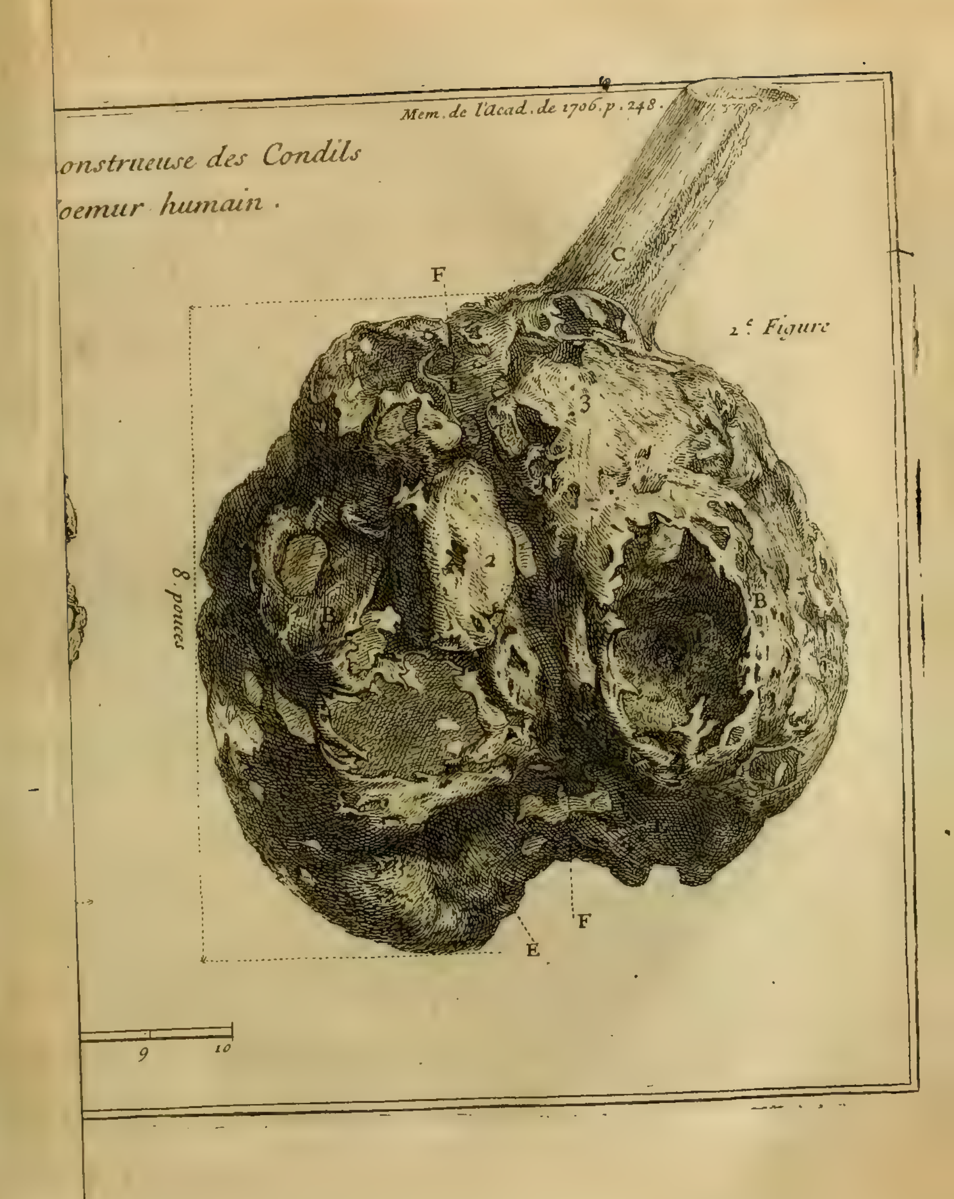
Premiere Figure. Moitié de grandeur & faisant le quart de cette Exostose vûë par devant.

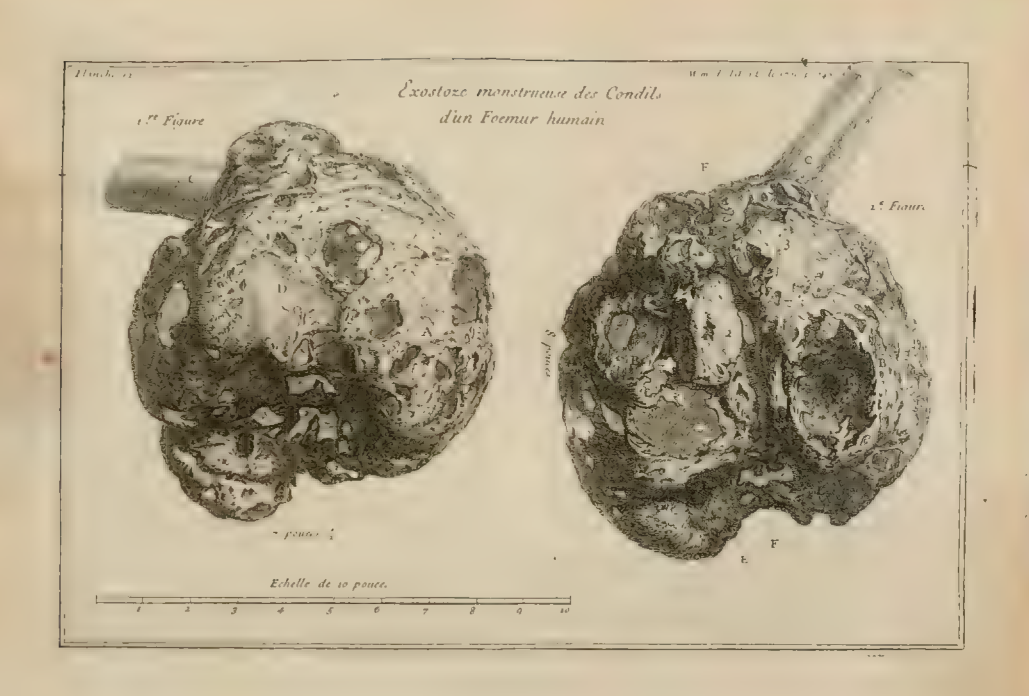
A, *A*. Les deux condils du femur.
C. Le corps du femur.
D. La place de la rotule.
E, *E*. La place de la partie superieure du tibia.

Seconde Figure vûë par derriere.

B, *B*. Les deux condils du femur.
C. Le corps du femur.
E, *E*. La place de la partie superieure du tibia.
F,*F*,*F*. La rainure par laquelle passoient les vaisseaux de la jambe.
1, 2, 3, 4. Cavernes osseuses en partie ouvertes & en partie fermées.

REFLEXIONS


Mem. de l'Acad. de 1706. p. 248.
onstrueuse des Condils
oemur humain.
2.e Figure
F
C
3
2
B
B
8. pouces
F
E
9
10


Exostoze monstrueuse des Condils
d'un Foemur humain
1.re Figure
2.e Figure
Echelle de 10 pouce.
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

REFLEXIONS

SUR L'ECLIPSE DU SOLEIL

Du 12 May 1706.

PAR M. CASSINI.

JAmais Eclipse n'a eu d'Observateurs plus illustres que celle du Soleil qui est arrivée le 12 May de cette année 1706. 1706. 23 Juin.

Elle a été observée attentivement à Marli par le Roy & par les Princes en diverses manieres, avec divers instrumens preparés par des Astronomes de l'Academie Royale des Sciences. On l'a vûë directement avec des verres colorés & avec des Lunetes, dont quelques-unes avoient au foyer un reticule qui divisoit le disque du Soleil en 12 doigts, & avec d'autres Lunetes à deux verres convexes, qui étant placées sur des machines dirigées au Soleil, envoyoient son image assez grande & assez distincte sur un carton opposé, où étoit un cercle égal à cet image divisé par des circonferences concentriques en doigts & en demi-doigts.

Le Soleil ayant été couvert au commencement de l'Eclipse, on observoit ses phases à mesure qu'il sortoit des nuages.

Le tems des phases étoit marqué par une pendule à secondes, reglée le jour précedent & le même jour de l'Eclipse par l'observation des hauteurs du Soleil & de quelques étoiles fixes, & rectifiée par des observations semblables, réïterées à la presence des Princes.

A l'Observatoire Royal, où il y eût un grand concours de Sçavans & de personnes illustres par leurs dignités & par leur rang, on observa l'Eclipse par les mêmes manieres qu'elle fut observée à Marli, & par d'autres où l'on

mit en uſage les inſtrumens plus propres pour les obſervations.

On y emploïa la grande Lunete excellente de 34 pieds expoſée ſur la terraſſe, qui avoit au foyer un papier ſur lequel on avoit décrit un cercle égal à l'image du Soleil qu'il recevoit, diviſée en doits par des circonferences concentriques, dont l'exterieure étoit diviſée en 360 degrés pour meſurer la diſtance des cornes pendant la durée de l'Eclipſe ; ce qui joint à l'obſervation des doits auroit ſervi à bien déterminer la proportion des diametres du Soleil & de la Lune, ſi quelque agitation de l'air & la foule des ſpectateurs n'en avoit rendu les obſervations un peu douteuſes.

On obſerva avec plus d'exactitude par le Micrometre placé au foyer des Lunetes, dont l'une étoit placée ſur la machine parallatique, & une autre Lunete ſur un autre ſupport convenable. Par ce Micrometre on meſuroit les phaſes de l'Eclipſe quand le Soleil étoit dégagé des nuages, & quand les perſonnes conſiderables qui vouloient voir cette methode d'obſerver ne l'empêchoient point.

La plus grande phaſe de cette Eclipſe, tant à Marli qu'à l'Obſervatoire Royal, aprocha de 11 doits, à un ſixiéme près, comme on peut voir dans le détail des obſervations.

Nous avons depuis eu des relations de cette Eclipſe obſervée en pluſieurs Villes du Languedoc, de Provence & de Suiſſe, & particulierement à Narbonne, à Montpellier, à Arles, à Tarraſcon, à Marſeille, à Avignon, à Geneve & à Zuric, où cette Eclipſe a été totale avec une durée de quelques minutes d'heure.

En toutes ces Villes l'air s'obſcurcit, de ſorte que l'on fut obligé d'allumer les chandelles pour lire & pour travailler, & de quitter le travail à la campagne.

Dans cette obſcurité on vit au Ciel proche du Soleil éclipſé Saturne, Venus & Mercure. A Arles où l'Eclipſe totale a duré un peu plus que dans ces autres Villes, on a vû plus loin du Soleil un grand nombre d'autres étoiles comme en pleine nuit.

Le peuple qui en ce jour-là étoit en grand nombre dans les ruës fit des exclamations, & donna des marques d'une grande épouvante.

Les animaux mêmes sentirent cette Eclipse. Dans les Villes les oiseaux nocturnes étant sortis de leurs trous, voltigoient dans l'air en grand nombre ; les autres oiseaux s'étant retirés, comme ils ont coûtume de faire pendant la nuit. A la campagne ils montroient avoir de la peine à voler ; & étant chassés avec des pierres, ils voloient bas, comme quand ils sont poursuivis par des oiseaux de proye.

Dans toutes ces Villes au tems de l'Eclipse totale, on a vû autour de la Lune, qui éclipsoit le Soleil, une couronne d'une lumiere pâle.

A Narbonne M. l'Abbé le Pech l'a observée en forme d'un fil lumineux, distinguée en deux anneaux concentriques, dont la lueur étoit neanmoins bien pâle.

A Montpellier M[rs] de Plantade, Bon & Clapies virent cette lumiere très-blanche, qui formoit autour du disque de la Lune une espece de couronne de la largeur d'un doit Ecliptique. Dans ces bornes la lumiere conservoit une égale vivacité, qui se changeant ensuite en une foible lueur formoit autour de la Lune une aire circulaire d'environ huit degrés de diametre, & se perdoit insensiblement dans l'obscurité.

A Marseille le P. Laval & M. Chazelle on observé la lumiere qui environnoit immediatement la Lune de la largeur d'un doit Ecliptique comme à Montpellier.

A Tarascon M. le Comte Marsigli vit cette lumiere comme une couronne de rayons pressés ensemble. Il vit aussi dans la partie occidentale du Ciel des nuages d'une couleur extraordinaire.

Ce n'est pas la seule fois qu'on a observé un semblable Phenomene dans les Eclipses totales du Soleil.

Dans le recüeil que le Pere Riccioli en a fait dans son Almageste, il y en a plusieurs où l'on a vû un cercle de lumiere autour de la Lune, qui éclipsoit le Soleil.

On a crû que c'étoit un reste du bord du Soleil vû directement, en supposant que c'étoit une Eclipse annulaire. Une apparence semblable à celle qui a été observée dans cette derniere Eclipse, pourroit bien avoir fait juger quelquefois annulaires des Eclipses du Soleil, qui à la verité étoient totales. On les peut examiner par les Tables des modernes, qui depuis l'usage de la Lunete donnent la proportion des diametres apparens du Soleil & de la Lune beaucoup plus exacte que les Tables anciennes.

Tycho Brahé qui travailloit à l'Astronomie avant l'invention de la Lunete, avoit reglé la proportion de ces diametres de sorte que suivant ses dimensions la Lune ne pouvoit jamais cacher entierement le Soleil à la terre. Il auroit donc pû juger qu'un anneau de lumiere semblable à celui qu'on a observé autour de la Lune en cette Eclipse étoit le bord même du Soleil qui ne fut point éclipsé entierement, ce que nous ne pouvons pas appliquer à cette Eclipse, dans laquelle on a distingué parfaitement cette lumiere pâle d'avec le bord du Soleil, qui parut avec un grand éclat, aussi-tôt que sa moindre partie sortit de la Lune; & d'ailleurs nous sçavons certainement que le diametre apparent de la Lune étoit plus grand de près de deux minutes que le diamettre apparent du Soleil.

Kepler dans son Astronomie optique attribuë l'apparence de cette couronne autour de la Lune, lorsqu'elle éclipse entierement le Soleil, à une matiere celeste qui environne la Lune, & qui est d'une densité capable de recevoir & envoyer vers la terre les rayons du Soleil, & representer cette apparence de l'anneau lumineux. Il ne fait pas difficulté d'accorder à la Lune une espece d'atmosphere analogue à celle qui environne la terre, capable de causer de la refraction aux rayons du Soleil. Il examine encore dans son Traité de la nouvelle Etoile du Serpentaire d'autres causes qui peuvent faire cette apparence, où parlant de la densité de la matiere celeste autour de la Lune, il dit qu'elle n'est pas toûjours de la même maniere.

Nous avons souvent observé des Eclipses de Saturne, de Jupiter & des Satellites, & de quelques Etoiles fixes causées par la Lune sans nous être apperçû d'aucun changement dans ces astres dans leur Immersion ; ce qui nous donna occasion de juger qu'il n'y avoit pas pour lors d'atmosphere sensible autour de la Lune à l'endroit qui cachoit l'Etoile : mais en quelques-autres observations il nous a paru que l'Etoile s'allongeoit un peu en se cachant derriere la partie tant obscure que claire de la Lune ; ce qui nous a fait juger que pour lors il y avoit en cet endroit de la Lune quelque matiere dense capable d'alterer les rayons de ces Astres & causer ces apparences ; ce qui seroit assez conforme à la pensée de Kepler.

Il y a un grand Phenomene dans le Ciel qui nous a persuadé depuis long-tems qu'il pourroit bien faire paroître une chevelure lumineuse au Soleil dans ses Eclipses totales.

C'est cette lumiere répanduë sur le Zodiaque que nous commençâmes d'observer avec admiration au mois de Mars de l'année 1683. Dans le raport que nous en donnâmes au Journal du mois de Juin de la même année, nous jugeâmes *que si on avoit pû voir cette lumiere à la presence du Soleil, elle lui auroit formé peut-être une espece de chevelure.*

Voici le cas qui est arrivé de la pouvoir voir à la presence du Soleil élevé sur l'horison, lorsqu'il étoit entierement caché par la Lune dans cette Eclipse totale. On commença de voir cette couronne lorsque l'air étoit à un tel degré d'obscurité qu'on pouvoit distinguer des Etoiles qu'on ne commence à voir ordinairement qu'à l'heure que notre Phenomene est prêt de paroître, & lorsque le Soleil est assez plongé sous l'horison pour terminer le crepúscule.

On peut voir les raisonnemens que nous avons faits sur cette lumiere dans le Traité qui est inseré dans le Livre des voyages de l'Academie sur les observations du Printems de l'an 1683, & sur celles que nous continuâmes d'en faire dans la suite.

On peut voir auſſi ce qui en a été écrit dans la ſuite par M. Fatio, auquel nous fîmes voir ce Phenomene à l'Obſervatoire Royal, & qui en continua les obſervations avec une grande aſſiduité & nous les communiqua avec ſes reflexions dans une Lettre qu'il donna depuis au public.

Nous avons ſuppoſé qu'il y a alentour du Soleil une matiere lumineuſe plus denſe proche de cet Aſtre, & plus rare à une plus grande diſtance, où elle eſt facilement effacée par les crepuſcules & par la clarté de la Lune. Dans cette Eclipſe on aura pû voir aiſément la partie de cette lumiere plus denſe qui environne immediatement le Soleil, comme il eſt arrivé en divers Villes. La partie la plus rare qui lui ſuccedoit à une plus grande diſtance du Soleil n'aura pas pû être obſervée aiſément ; neanmoins les Aſtronomes de Montpellier qui aporterent une attention particuliere pour voir s'ils ne diſtingueroient point notre lumiere, remarquerent autour de cette couronne une aire lumineuſe plus pâle qui s'étendoit juſqu'à la diſtance de quatre degrés de côté & d'autre. Le reſte de la lumiere qui s'étend à une diſtance beaucoup plus grande n'aura pas été viſible, à cauſe que l'obſcurité de l'air n'étoit pas aſſez grande pour pouvoir diſtinguer la partie la plus rare qui eſt plus éloignée du Soleil, & qui ne paroît le matin qu'avant que le crepuſcule commence, & le ſoir qu'après qu'il eſt fini. En effet les Obſervateurs de Montpellier ont remarqué que cette plus grande obſcurité ne pouvoit être comparée ni à la nuit ni au crepuſcule.

Au reſte nous avons ſupoſé que cette matiere lumineuſe eſt ordinaire au Soleil, quoiqu'elle puiſſe n'avoir pas toûjours la même étenduë ni le même éclat, & nous avons cherché tous les Memoires que nous avons pû avoir des obſervations d'une apparence ſemblable à celle-ci.

Après avoir raporté toutes celles que nous avions pû recüeillir dans notre Traité, nous en avons trouvé encore d'autres, dont la plus évidente parmi les anciennes nous paroît celle qui eſt raportée par Samüel Maïoli Evêque de Volturara dans ſon Ouvrage des jours Cani-

culaires, où il dit au Chapitre des Meteores qu'il avoit vû très-souvent, particulierement dans les crepuscules d'Automne, une matiere éclatante & comme ardente en forme d'une colonne, ou d'une poutre, tantôt droite, tantôt oblique.

Ayant donc supposé cette matiere lumineuse, on en pourra voir la partie plus dense qui environne immediatement le Soleil dans les Eclipses totales, avec quelques differences en divers lieux de la terre, suivant la diverse constitution de l'air.

Les observations de cette Eclipse étant comparées au calcul tiré de nos Tables Astronomiques, ont fait voir qu'il n'y avoit pas deux minutes de difference entre les tems des phases observées & le tems des mêmes phases calculées, & qu'il n'y avoit que quelques minutes de doit de difference dans la grandeur des phases. Ayant corrigé cette difference, nous avons trouvé qu'après cette petite correction, le calcul representoit exactement l'Eclipse totale, & sa durée dans les lieux où elle a été observée, & qu'elle representoit aussi avec la même justesse les tems & les phases observées en d'autres lieux où elle a été partiale. Nous en avons une de Rome faite par M. Bianchini, une de Gennes faite par M. le Marquis Salvago, de Bologne faite dans l'Observatoire de M. le Comte Marsigli par Mrs Manfredi & Stancari, une de Strasbourg faite par M. Eisenchmid, une de Madrid faite par le Pere Cassani, outre celles de l'Eclipse totale que nous avons déja raportées.

Après une semblable rectification des hypoteses, nous avons entrepris de décrire avec la précision que l'état present de la Geographie le peut permettre les autres lieux où cette Eclipse a été totale, comme nous fîmes dans l'Eclipse de l'année 1699, où nous déterminâmes la route de l'Eclipse centrale sur la surface de la terre, de la maniere qu'elle est décrite dans les Memoires de l'Academie de la même année, qui a été depuis verifiée par les observations de ces païs-là qui nous ont été communiquées.

On a emploïé dans cette recherche la methode que nous avons accoutumé de pratiquer depuis que nous travaillons à l'Astronomie, dont il est fait mention il y a près de 50 ans par M. l'Abbé Giustiniani dans son Livre des Auteurs de la Ligurie. Il en a été aussi parlé dans l'Histoire de l'Academie de M. Duhamel, & dans les Ouvrages de quelques autres Auteurs ausquels nous l'avons communiquée.

Mon fils & M. Maraldi ont trouvé par notre methode que cette Eclipse a commencé de paroître totale au lever du Soleil dans l'Ocean atlantique, au milieu du trajet qui est entre l'Isle de Cayenne & les Isles du Cap vert. Ensuite l'Eclipse parut totale un peu à l'Occident des Isles du Cap vert, l'ombre totale de la Lune ayant parcouru plus de 10 degrés de la circonference de la terre en 4 minutes d'heure. Après elle traversa les Canaries, d'où elle passa vers Cadix, & parcourut la partie Meridionale de l'Espagne, passant par Seville, par Valence, par la Catalogne. Elle entra ensuite dans le Royaume de France par le Roussillon, & passa par la partie Meridionale du Languedoc, l'Eclipse ayant été observée totale à Perpignan, à Narbonne, à Besiers, à Montpellier & à Arles, où elle a été centrale.

Elle a été aussi observée totale à Tarascon, à Marseille, à Avignon, à Geneve & à Zuric. Elle aura aussi été totale à Valence en Dauphiné, à Grenoble, dans la partie Orientale de la Savoye, à Sion dans les Suisses, à Ausbourg, à Ratisbonne, dans la Boheme, dans la Prusse, dans la partie Septentrionale de la Moscovie, dans la grande Tartarie, & elle aura cessé de paroître totale au coucher du Soleil à 150 degrés de longitude & 52 degrés de latitude Septentrionale, l'ombre totale de la Lune ayant parcouru tout cet espace de terre compris entre l'Ocean atlantique & la Tartarie Orientale en 2 heures 50 minutes.

Les lieux de la terre qui ont été éloignés de la trace décrite par le centre de l'ombre jusqu'à la distance d'un degré, c'est-à-dire, de 25 lieuës vers le Midy & d'autant

vers

vers le Septentrion, un peu plus, ou un peu moins, auront eu aussi l'Eclipse totale, mais par un moindre espace de tems; de sorte qu'il y aura des lieux qui ne l'auront vûë totale que pendant un instant.

La durée de l'obscurité totale qui a été estimée à Arles d'environ 6 minutes (quoiqu'en comparant le commencement & la fin de l'obscurité, où l'on n'a point marqué de secondes, elle ne s'y trouve que de 5 minutes) aura été des plus grandes; car l'excès du diametre apparent de la Lune au Soleil diminué par la paralaxe, devoit être parcouru environ en 5 minutes de tems.

Les païs qui ont eu l'Eclipse centrale auront eu la durée de l'obscurité totale un peu differente les uns des autres, à cause de la difference qui résulte de la distance de la Lune en diverses heures du jour à diverses parties de la surface de la terre, & à diverses distances de la Lune à son Perigée, d'où elle s'éloignoit dans cette Eclipse, outre la difference qui est causée par la diverse obliquité des rayons du Soleil à diverses parties de la terre.

Cette trace que le centre de l'ombre dans l'Eclipse a parcouru sur la surface de la terre, a croisé obliquement la trace qui fut décrite dans l'Eclipse centrale du Soleil de l'an 1699, dont on a fait la description dans les Memoires de l'Academie de la même année. On marqua que l'Eclipse centrale alla du Groëlande par la partie Septentrionale de l'Ecosse, par la partie Meridionale du Danemark, par les parties Septentrionales de la Pomeranie, entre la Pologne & la Transylvanie, par la petite Tartarie, par la Mer noire, par l'Armenie, par la Perse, par le Royaume de Mogol, par les Indes Orientales jusqu'aux confins du Royaume de Siam, y étant toûjours allée du Nord-Oüest vers le Sud-Est, au lieu que celle de cette année est allée du Sud-Oüest vers le Nord-Est. Ces deux traces se sont croisées en Pologne.

Nous avons aussi décrit les lieux où l'Eclipse de cette année a été de six doigts, tant du côté du Midy que du côté du Septentrion. Du côté du Midy la phase de six

doigts est arrivée au lever du Soleil dans la mer, où l'Equinoxial coupe le premier Meridien. Delà elle est passée par l'Afrique suivant une ligne qui la traverse depuis la Guinée jusqu'au Golphe de la Sidre. Ensuite elle a traversé la Mediteranée & a passé par l'Isle de Candie, par l'Asie mineure, par la Georgie, par la petite Tartarie & par la partie Meridionale de la grande Tartarie.

La phase Septentrionale de 6 doigts a commencé dans la mer qui est entre l'Isle de Terre-neuve & les Açores, a passé par la partie Orientale de l'Irlande, à l'Occident de l'Isle de Spitberg, & dans les païs qui sont proches du Pole Septentrional.

La ligne qui distingue les païs Meridionaux qui ont eu un peu d'Eclipse de ceux qui ne l'ont point vûë, passe à l'Occident de l'Isle de S. Thomé par la partie Meridionale de l'Egypte, par la partie Septentrionale de l'Arabie, & par le milieu de la Perse & du Mogol.

Du côté du Septentrion une partie de la penombre tombe hors de la terre.

La difference de 2 à 3 minutes d'heure qui s'est trouvée entre les mains des phases de cette Eclipse observée à Paris, & le tems qui avoit été calculé dans les Ephemerides & la Connoissance des Temps, & la difference de quelques parties de doigts qui s'est trouvée dans la grandeur de l'Eclipse ne paroîtra pas considerable à ceux qui n'ignorent point la multitude des principes qui concourent à déterminer une de ces Eclipses, & les observations qu'il faut comparer ensemble pour établir chacun de ces principes.

Du côté du Soleil il y a sa longitude moïenne, le lieu de son Apogée, sa plus grande équation, la methode de la distribuer par divers degrés de distance de l'Apogée pour déterminer son lieu veritable, le demi-diametre apparent du Soleil & les regles de sa variation, sa parallaxe, sa refraction sujette à des irregularités physiques très-difficiles à réduire à quelques regles exactes, & l'obliquité de l'Ecliptique à l'Equinoxial. Il y a aussi l'équation du tems,

qui consiste dans la reduction du tems moïen au tems veritable, dans laquelle les Astronomes modernes different entr'eux de plusieurs minutes, comme il est arrivé même dans cette Eclipse.

Du côté de la Lune il y a les principes correspondans à ceux du Soleil que nous venons d'indiquer, & plusieurs autres équations qui ne conviennent point au Soleil. Une qui dépend de la distance du Soleil à l'Apogée de la Lune. Une qui dépend de la distance de la Lune au Soleil. Une de la distance même du Soleil à son propre Apogée, qui ont toutes des regles particulieres de variation, aussi-bien que le diametre apparent de la Lune & sa parallaxe, qui font la plus grande diversité des Eclipses totales & partiales. Il y a aussi à déterminer les nœuds de la Lune, leurs moïens mouvemens, leurs équations, l'inclinaison de l'orbite de la Lune à l'Ecliptique & sa variation, d'où dépend la latitude de la Lune.

Du côté de la terre il y a son exposition au Soleil, qui varie à chaque instant en des sens differens par le mouvement journalier suivant l'Equinoxial & ses paralleles, & par le mouvement annuel suivant le Zodiaque: les longitudes & les latitudes des lieux dont on veut sçavoir s'il y aura Eclipse ou non; quelle doit être la difference de sa grandeur & de sa durée en differens lieux.

Pour la détermination de chacun de ces principes on emploïe differentes hypotheses sur lesquelles on peut avoir quelque doute, parce qu'on n'a pas toutes les observations qui seroient necessaires à une détermination précise, & celles qu'on a ne sont pas toûjours faites avec assez d'exactitude.

Nonobstant toutes ces difficultez on a réduit la methode des Eclipses à un tel état, qu'elle peut servir à trouver la longitude Geographique des lieux éloignez où la même Eclipse a été observée avec assez de précision. Nous en avons fait l'experience dans cette derniere Eclipse sur les observations qui nous en ont été envoyées de differens lieux. Nous les donnerons suivant l'ordre des longitudes

des lieux où cette Eclipse a été observée dans un autre Memoire.

SUITE DE L'ARTICLE TROIS DES ESSAIS DE CHIMIE.

PAR M. HOMBERG.

1706. 30. Juin.

J'Ay proposé dans mon dernier Memoire la matiere de la lumiere pour mon souffre principe, & pour le seul principe actif. J'ay prouvé que cette matiere est continuellement en mouvement, & qu'elle penetre sans cesse tous les corps poreux qui sont dans l'univers ; ce que j'ai crû un attribut necessaire du principe actif. J'ay prouvé aussi que la matiere de la lumiere en penetrant les corps poreux s'y peut arrêter, les augmenter de poids & de volume, les changer de figure, & joindre differens principes ensemble pour en composer des mixtes nouveaux, ce qui est le caractere que je donne à mon souffre principe ; il me reste maintenant à proposer une idée vrai-semblable de la maniere que la matiere de la lumiere s'introduit & s'arrête dans les autres principes, & comment ces autres principes par-là changent de figure & deviennent des matieres sulphureuses, qui sont la partie active de tous les mixtes.

Il faut se souvenir ici que nous avons supposé dans tous les corps non-seulement des pores qui donnent un passage très-libre à la matiere de la lumiere, mais aussi une partie solide, qui est proprement la substance de chaque corps, contre laquelle la matiere de la lumiere est poussée continuellement par le Soleil & par les autres flames, & de dessus laquelle cette matiere reflechit & ne la penetre que fort difficilement.

Nous devons considerer la matiere solide d'un corps en deux manieres : La premiere est quand nous la regar-

dons comme un corps composé, ou sa substance entiere, par exemple, du bois, de l'argent, &c.

La seconde est lorsque nous en considerons seulement les parties integrantes, ou les principes dont ces corps sont composez. Il m'a toûjours paru que les corps pris dans la premiere consideration sont dans leur derniere perfection, particulierement les corps organisez, comme sont tous les animaux & toutes les plantes, & que pour lors ils ne changent par le frapement de la matiere de la lumiere, que pour redevenir peu à peu des matieres simples ou des principes dont ils avoient été composez ; ce qui arrive toûjours en plus ou moins de tems que la matiere de la lumiere les frape plus ou moins fortement : mais en considerant seulement les parties dont ces corps sont composez, ils reçoivent continuellement les impressions de la matiere de la lumiere qui les change differemment selon que cette matiere s'y attache en plus ou en moins de quantité, & qu'elle s'y attache superficiellement, ou qu'elle entre dans la substance même de ces principes, ce qui leur donne une forme nouvelle, comme nous l'avons remarqué fort sensiblement dans l'observation que nous avons raportée dans notre dernier Memoire sur le mercure, dont une partie s'est changée en poudre par la simple coction qui pesoit plus qu'elle ne faisoit avant que d'avoir été mise sur le feu, mais qui s'est remise en mercure coulant quand on l'a exposé à un très-grand feu. L'autre partie de ce mercure s'est fixée tout-à-fait par une plus forte & plus longue coction en un corps solide & metallique, qui ne s'est plus remis en mercure coulant quand on l'a exposé à un très-grand feu, la matiere de la lumiere ne s'étant arrêtée que superficiellement au premier, & étant entrée dans la substance même de ce dernier mercure. L'aplication de ce raisonnement au fait que nous avons vû dans ce mercure, nous fera concevoir de quelle maniere ce changement lui est arrivé, & quelle sorte de matiere sulphureuse en a été produite ; ce qui nous donnera en même tems un moyen d'expliquer facilement la

production de toutes les autres matieres sulphureuses. Nous supposons d'abord que les parties du mercure sont des petites goutes fort menuës, ou des petits grains ronds & polis, qui glissent fort aisément les uns sur les autres, ce qui fait sa fluidité ; la matiere de la lumiere poussée violemment par le moyen de la flamme & pendant long-tems contre ces petits grains qui font la partie solide du mercure, elle hache & en dérange peu à peu la superficie, & s'y introduit ; & comme elle ne trouve pas un passage aisé pour la traverser, elle y demeure attachée superficiellement, & y produit de petites éminences qui rendent la superficie de ces petits grains raboteuse ou herissée de ronde & de polie qu'elle étoit ; car il faut s'imaginer ces grains de mercure comme lardez de matiere de lumiere, dont les petites éminences corrompent sensiblement le poli de ces petits grains ; ce qui est d'autant plus aisé à accorder, que les petits grains de mercure sont plus petits qu'il ne faut pour être apperçûs par les yeux, même armez d'un microscope, & plus petits que les parties de l'air, parce que le mercure passe par des endroits où l'air ne passe pas ; ainsi quelque petite que soit la matiere de la lumiere lorsqu'elle s'arrête dans la superficie des parties du mercure, elle en doit changer sensiblement la figure.

Les parties du mercure étant ainsi devenuës herissées par le lardement de la matiere de la lumiere, nous pouvons nous les representer comme des chataignes couvertes de leurs coques vertes & herissées, qui se soûtiennent plûtôt les unes les autres que de couler sur un plan incliné, comme elles feroient si c'étoit des boules rondes & polies ; & dans cet état le mercure n'est plus fluide, étant changé en une poudre rouge, dont les petits grains collez les uns contre les autres par leurs propres herissons, composent de gros morceaux assez durs & de figures irregulieres, comme feroient les coques herissées des chataignes si on les pressoit les unes contre les autres, qui composeroient des gros plotons de figure irreguliere, & qui tiendroient fort bien ensemble : ces pointes herissées du

mercure par la longueur du temps qu'on les expose au feu s'augmentant en nombre & en grandeur, s'entrelassent & se soûtiennent si fort que le mercure devient dur comme une pierre ; & comme ces pointes qui rendent chaque grain du mercure herissé sont une matiere sensible & pesante, le mercure dans cet état augmente de volume, & pese plus qu'il ne faisoit avant que d'avoir été mis au feu, & lorsqu'il étoit encore coulant.

Si on broye ce mercure avec du nouveau mercure coulant, il s'en fait un amalgame comme si c'étoit un metal ; & en le remettant pendant long-tems à un feu plus violent, la matiere de la lumiere qui s'étoit attachée seulement sur la superficie des petits grains du mercure dans le premier feu, commence au plus grand feu de penetrer plus avant dans la substance même de ces petits grains. Si on broye ce mercure plusieurs fois avec du nouveau mercure coulant, la matiere de la lumiere penetrera par la forte cuisson si avant dans les petits grains du mercure, qu'en l'exposant au feu de fonte, il en restera une partie en forme de metal, qui ne changera plus sensiblement à quelque degré de feu qu'on le mette.

Dans les premieres digestions la matiere de la lumiere ne s'attache que superficiellement aux petits grains du mercure, & les envelope peu à peu entierement : elle continuë ensuite de fraper ces grains envelopez, & ne pouvant pas toucher en cet état le mercure à nud, mais seulement son envelope, elle ne fait plus d'impression sensible sur le mercure ; ensorte qu'on pourroit le tenir pendant plusieurs années en digestion, sans qu'il changeât pour cela en aucune maniere : mais en broyant ce mercure digeré & qui est devenu poudre par la simple cuisson, on brise toutes les envelopes des petits grains du mercure, qui par-là se presentent nuds à la matiere de la lumiere que le feu de la seconde digestion y peut pousser ; & comme la premiere digestion n'a pas laissé d'entamer la superficie de ces petits grains & d'y faire une espece de hachure, comme nous l'avons remarqué ci-dessus, la se-

conde digeſtion pouſſe ces hachures un peu plus avant, & enſuite envelope encore les grains du mercure : le ſecond broyement dépoüillera ces petits grains de leur ſeconde envelope, & une troiſiéme digeſtion enfoncera encore plus avant ces hachures dans les petits grains ou dans la partie ſolide du mercure, juſqu'à ce qu'en réïterant ceci pluſieurs fois, les petites hachures deviennent aſſez profondes que la matiere de la lumiere s'y puiſſe loger entierement ; & pour lors la flame étant trop groſſiere pour entrer dans ces petites logettes, elle ne fait que paſſer par deſſus, & la matiere de la lumiere reſte noyée dans ces logettes, ſans qu'aucune autre matiere l'en puiſſe faire ſortir, à moins qu'elle ne fût auſſi petite & même plus petite que la matiere de la lumiere : le mercure dans cet état eſt devenu metal, & la flame n'a plus de pouvoir ſur lui ; & comme il n'y a aucun corps qui ſoit plus petit que la matiere de la lumiere, pour arracher celle qui s'eſt logée dans la partie ſolide du mercure, ce qui ſeroit détruire le metal, il reſte impunément dans le plus grand feu : mais en l'expoſant à un pouſſement très-violent de la matiere de la lumiere par les rayons concentrez du verre ardent, celle qui s'étoit logée dans le mercure s'enfonce davantage & le traverſe, comme un cloud eſt chaſſé par un autre, la ſubſtance ſolide du mercure devient criblée & poreuſe, qui prête un paſſage libre à la matiere de la lumiere, & pour lors il n'eſt plus metal, ni même du Mercure, mais une matiere terreuſe & legere, comme nous avons remarqué dans nos obſervations ſur le verre ardent.

La matiere de la lumiere qui s'eſt introduite & attachée au corps du mercure, eſt à ſon égard une matiere étrangere, laquelle conſiderée ſeule & avant que d'être attachée au mercure, eſt une matiere non encore déterminée, que nous avons apellée notre ſouffre principe : mais après s'être introduite & attachée au mercure, elle ſe détermine ſouffre metallique, & demeure telle pendant tout le tems qu'elle ſera attachée au mercure ; & ſi par quelque operation on la détachoit du mercure, & qu'on

qu'on introduisit dans quelqu'autre corps qui ne fut pas mercuriel : ce souffre metallique changeroit de nature & de nom, & deviendroit un souffre vegetal, animal ou bitumineux, selon la nature du corps auquel il se joindroit, ces transformations se pouvant faire fort aisément, comme nous le verrons ci-après.

Nous appellons souffre metallique la matiere de la lumiere, ou nôtre souffre principe lorsqu'il s'est joint ou attaché au mercure, ou à quelqu'autre corps mercuriel que ce soit. Nous l'appellons souffre vegetal lorsqu'il s'est introduit à demeure dans quelque matiere vegetale. Nous l'apellons souffre animal lorsqu'il s'est attaché & uni à quelque partie animale; & nous l'appellons souffre bitumineux lorsqu'il s'est uni à quelque matiere simplement terreuse.

Je ne connois que ces quatre differentes matieres sulphureuses, & encore pourroit-on les distribuer en trois classes seulement ; parceque le souffre vegetal & le souffre animal se ressemblent si fort, que l'on pourroit n'en faire qu'une seule classe. Nous ne laisserons pas cependant de les diviser pour avoir des distinctions plus précises dans le raisonnement.

L'union du souffre principe aux matieres animales, vegetales, mercurielles & terreuses pour produire les differens souffres, se peut faire immediatement par le poussement du Soleil & par le feu, ou mediatement par la transposition d'une matiere sulphureuse, d'un certain genre dans le corps d'un autre genre ; par exemple, l'huile d'olive qui est un souffre vegetal, faisant partie de la nourriture de quelque animal, peut devenir de la graisse de cet animal, qui est un souffre animal ; & la racine d'une plante suçant la matiere graisseuse du fumier, qui est un souffre animal, se changera en une huile vegetale dans la plante, & ainsi des autres.

Les transpositions des matieres sulphureuses d'un genre à un autre sont aisées à faire lorsque les souffres sont volatils ; mais quand c'est un souffre fixe, il est très-difficile de

le changer d'un corps à un autre. Nous appellons une matiere fixe, lorſqu'étant miſe au feu elle y reſte ſans être enlevée par la flame. Nous appellons une matiere volatile, lorſqu'elle ne peut pas ſuporter la violence du feu ; & celle-là eſt plus ou moins volatile, ſelon qu'elle eſt enlevée par un degré de feu plus ou moins violent. La maniere comment le feu ou la flame enleve les matieres volatiles, & comment elle laiſſe les matieres fixes, a été expliquée dans l'article 2 de ces Eſſais.

Toutes les matieres ſulphureuſes animales, vegetales & bitumineuſes ſont volatiles ; mais les metalliques ſont en partie fixes, en partie volatiles. Dans l'or & dans l'argent il n'y a que du ſouffre metallique fixe, parceque la flame ne ſçauroit enlever ces metaux ni en ſeparer le ſouffre. Je ne parle ici que de la flame ſeulement, qui eſt le feu connu dans nos laboratoires, & non-pas des rayons du Soleil concentrez par le verre ardent, qui enlevent auſſibien l'or & l'argent que les autres metaux, & à l'égard deſquels il n'y a rien de fixe ; car la matiere de la lumiere heurte par cette concentration avec une violence extrême contre la partie ſolide des corps, & elle la penetre promptement, mais c'eſt en la briſant & en la détruiſant ; & alors bien loin de compoſer un nouveau mixte, elle réduit ce corps dans les principes les plus prochains dont il étoit compoſé ; & ſi on continuë à expoſer ces principes au méme feu, ils ſont encore diviſez en principes plus ſimples dont ces premiers étoient compoſez, ce qui n'arrive jamais au feu de la flame.

Je dis donc que nous ne connoiſſons de ſouffre fixe que celui qui ſoûtient les efforts de la flame, & qui n'eſt que d'une ſeule ſorte ; ſçavoir, le ſouffre metallique fixe, qui ſe trouve pur dans l'or & dans l'argent, & mêlé de differens ſouffres volatils dans les autres metaux, qui ne laiſſent pas d'être metalliques quoique volatils, parcequ'ils ſont propres à ces metaux, & cependant differens dans chacun d'entr'eux.

Nous appellons encore ſouffre metallique volatil celui

qui s'attache ſuperficiellement au mercure par les longues digeſtions, parceque le grand feu l'en ſepare : mais ſi par une plus longue ou par une plus forte cuiſſon ou par quelqu'autre induſtrie ce ſouffre volatil a penetré juſques dans l'interieur & dans la ſubſtance même du mercure; alors il ne peut plus être enlevé par la flame, le mercure devient metal, & ſon ſouffre volatil ſe change en ſouffre fixe metallique, enſorte que la difference du mercure qui eſt devenu metal, & celui qui a été précipité ſeulement par lui-même, conſiſte en ce que dans ce dernier la matiere de la lumiere s'eſt attachée ſuperficiellement aux petits grains du mercure, ou elle s'eſt changée en un ſouffre metallique volatil, qui s'en ſepare fort aiſément par le feu, en remettant le mercure dans ſa premiere forme liquide: mais quand le mercure eſt devenu metal, la matiere de la lumiere a penetré dans la ſubſtance même du mercure, & par-là elle eſt devenuë un ſouffre fixe metallique qui ne quitte plus le mercure quelque grand feu qu'on lui donne, le conſervant toûjours dans la forme de metal; & ſelon la quantité du ſouffre fixe qui s'y eſt arrêté, le metal eſt plus ou moins peſant, c'eſt-à-dire, eſt or ou argent. De ſorte que la ſeule difference qu'il y a entre l'or & l'argent, eſt que l'un eſt du mercure qui dans ſon interieur contient beaucoup de ſouffre metallique fixe, c'eſt-à-dire en plus grande quantité qu'il ne lui en faut pour être ſimplement metal; & que l'autre eſt du mercure qui dans ſon interieur contient peu de ſouffre metallique fixe, c'eſt-à-dire autant ſeulement qu'il lui en faut pour devenir metal.

Nous voyons par-là que les parties qui compoſent l'or & l'argent ne ſont que du mercure & du ſouffre fixe, ce qui eſt une compoſition fort ſimple; au lieu que la ſubſtance des autres metaux conſiſte en un aſſemblage de pluſieurs matieres, dont la baſe neanmoins eſt du mercure avec très-peu de ſouffre metallique fixe, mais qui ſont accompagnez de differens ſouffres metalliques volatils, des ſouffres bitumineux, des differentes terres & des matieres

ſalines, qui ſont des compoſitions très-compoſées, dont les parties de differentes configurations ne pouvant pas ſe joindre fort étroitement, ſont par conſequent de peu de durée dans le feu, & dont la production artificielle ſeroit d'autant plus difficile que celle de l'or & de l'argent, que la compoſition des uns eſt plus ſimple que celle des autres.

Nous avons vû que les ſouffres metalliques fixes ou volatils ne ſont que la matiere de la lumiere jointe plus ou moins étroitement au mercure ; mais tous les autres ſouffres ſont des compoſitions beaucoup plus amples. J'ai fait les analyſes du ſouffre commun, du Petrole, du ſouffre de Quito, du Jayet, des charbons de terre & des differens ſuccins, qui ſont les ſouffres bitumineux les plus connus ; j'y ai toûjours trouvé beaucoup de terre, beaucoup de ſel volatil acide, une quantité conſiderable de matiere aqueuſe, & une huile très-penetrante, laquelle ayant été analyſée encore, s'eſt réduite en beaucoup d'eau, en un peu de terre & en un peu d'huile, laquelle par pluſieurs operations réïterées s'eſt enfin tout-à-fait diſſipée, laiſſant à chaque fois un peu des autres principes dont ces huiles étoient compoſées : le ſouffre principe, ou la matiere de la lumiere qui étoit entrée dans la compoſition de ces ſouffres, ſe perdant à la fin entierement par les analyſes, comme une matiere qui ceſſe de nous être palpable & ſenſible quand elle eſt dégagée des autres principes plus materiels, comme nous l'avons remarqué dans le commencement de cet article.

J'ai fait auſſi les analyſes des huiles diſtillées eſſentielles & fœtides des plantes, de leurs graiſſes & huiles exprimées, & de differens ſucs réſineux, qui ſont des matieres ſulphureuſes vegetales. J'ai fait auſſi les analyſes de differentes parties des animaux qui contiennent les matieres ſulphureuſes animales, dont les operations ſouvent réïterées ont entierement diviſé les huiles en beaucoup d'eau, en ſel & en terre comme dans les matieres bitumineuſes, perdant pareillement & par les mêmes raiſons leur ſouf-

ſtre principe dans toutes ces operations analytiques ; enſorte que les matieres ſulphureuſes tant animales & vegetales que bitumineuſes, ſont toujours compoſées de quatre matieres ; ſçavoir, d'eau, de ſel, de terre & de ſouffre principe, au lieu que le ſouffre metallique n'eſt compoſé que de deux matieres ſeulement, ſçavoir, de mercure & de ſouffre principe, à moins qu'on ne veüille dire que le mercure ſoit auſſi compoſé de matieres plus ſimples, ce que nous n'avons pas encore pû découvrir ; & comme nous avons remarqué dans les metaux que les plus ſimples ſont les plus parfaits, nous pourrions bien dire auſſi que parmi les ſouffres les plus ſimples ſont les plus parfaits & les moins alterables, ce que les experiences confirment ; car la flame qui détruit tous les autres ſouffres, ne ſçauroit faire aucune impreſſion ſenſible ſur le ſouffre metallique fixe : mais ſi la fixité du ſouffre metallique & ſon peu de ſujetion au changement eſt une perfection en ſoi, ce doit être un défaut à l'égard de nous ; car la facilité de changer & de diſſoudre les autres ſouffres nous les rend familiers & utiles, tant pour nos nourritures que pour nos remedes, aulieu que le ſouffre fixe eſt encore tout-à-fait inabordable à la plûpart des hommes, même aux plus ſçavans Phyſiciens, ce qui eſt un très-grand dommage pour la matiere medicale.

L'introduction de la matiere de la lumiere dans les autres principes, dont les vegetaux, les animaux & les bitumes ſont compoſez, eſt à peu près la même que celle qui ſe fait dans le mercure : mais comme les parties de ces autres principes ne ſont pas ſi fines ni ſi compactes ou ſolides que celles du mercure, la matiere de la lumiere le penetre plus aiſément & en moins de tems ; mais elle ne s'y joint pas ſi étroitement qu'au mercure, à peu près comme un clou eſt fort aiſément enfoncé dans une pomme ou dans une citroüille, & beaucoup plus difficilement dans un ais de chêne : mais auſſi quand le clou y a été une fois enfoncé à coups de marteau, il en eſt difficilement retiré, au lieu qu'on le retire ſans peine de la pomme ou

de la citroüille ; ce qui fait que toutes ces matieres sulphureuse-là sont non-seulement volatiles , mais aussi fort aisément détruisibles par le feu , c'est-à-dire, que la matiere de la lumiere s'en separe sans beaucoup de peine , laissant les autres principes dans le même état qu'ils étoient avant que de les avoir penetré.

Les sels reçoivent avec beaucoup d'avidité les souffres , mais c'est sans les changer de nature, en quoi leur transposition est differente de celles dont nous venons de parler, c'est-à-dire, qu'un souffre animal, par exemple, transplanté dans une matiere saline n'est pas changé en un souffre bitumineux ou autre, il demeure le même, mais il caracterise le sel auquel il se joint ; & comme les souffres volatils changent aisément de nature, si par quelque accident le souffre, par exemple, qui aura caracterisé le sel commun , se peut changer en celui qui caracterise le salpetre , le sel commun deviendra salpetre , & ainsi des autres ; ensorte que la difference des sels ne consiste que dans les differens souffres qui les accompagnent. Nous en avons parlé amplement dans l'article du sel principe.

Toutes les matieres sulphureuses bitumineuses , vegetales & animales sont inflammables ; ce qui a donné occasion à la fausse idée, que ces matieres ne sont sulphureuses , que parce qu'elles sont inflammables : mais quand on considerera que parmi ces matieres il y en a qui sont plus inflammables les unes que les autres , & qu'elles le sont plus ou moins selon que dans leur composition il est entré plus ou moins de sel acide, nous comprendrons aisément que l'inflammabilité n'est pas le caractere du souffre, mais du mêlange d'une matiere huileuse quelconque avec un sel acide ; ce qui se prouve sensiblement par la composition des matieres résineuses artificielles. Par exemple , mêlez de l'huile de gerofle avec de l'esprit de nitre dans les forces & dans les doses requises , il en résultera une résine qui sera incomparablement plus inflammable que n'étoit l'huile de gerofle , ou l'esprit de nitre dont cette résine est composée ; cette grande inflammabilité ne pro-

vient donc pas de l'une des deux matieres séparément prise, mais de leur mêlange.

La décompoſition des matieres ſimples fort inflammables nous confirme la même choſe, le ſouffre commun prend feu ou s'enflamme à l'approche d'une petite étincelle de feu: mais quand on en a ſeparé la partie acide, comme je l'ai montré dans nos Memoires de l'année 1703, la partie huileuſe qui reſte dépoüillée de ſon acide, ne bruſle plus, même quand on la met dans la flame d'une chandelle, elle ne fait que petiller, & pour la faire brûler il la faut mettre ſur des charbons fort ardens. Le phoſphore de l'urine eſt de toutes les matieres inflammables celle qui s'enflamme le plus aiſément, puiſqu'elle prend feu par un ſimple frotement très-leger: mais quand on en fait l'analyſe, on trouve qu'il ſe ſepare en une liqueur aqueuſe très-acide, comme ſeroit l'eſprit de vitriol, & en une matiere terreuſe jaunâtre & un peu graſſe, dont la premiere n'eſt point du tout inflammable, & la ſeconde ne brûle qu'avec peine. La plûpart des matieres ſulphureuſes metalliques, même des volatiles, ne ſont point-du-tout inflammables; de ſorte que la propoſition ſeroit bien vraïe de dire que toutes les matieres inflammables ſont ſulphureuſes, mais non pas celle que toutes les matieres ſulphureuſes ſont inflammables.

Nous avons remarqué que tous les ſouffres non metalliques, comme la graiſſe, le ſang & la moëlle dans les animaux, les huiles, les gommes & les réſines dans les plantes, &c. ſont compoſez de ſel, d'eau, de terre & d'huile: mais quand on conſiderera que toutes les autres parties des animaux, des plantes & des bitumes ſont pareillement compoſez de ces mêmes quatre matieres là, ce ſera un ſurcroît de preuve que le ſouffre eſt le ſeul principe actif qui ſe trouve dans tous ces trois genres de corps, puiſque la matiere huileuſe, qui en eſt le ſouffre particulier, nonſeulement ſe trouve dans toutes les parties des animaux, des vegetaux & des bitumes, mais auſſi que la matiere huileuſe elle-même comprend ces autres trois principes & en

est composée, ce que l'on ne sçauroit dire des autres principes. Cette composition peut être variée infiniment ; car la substance d'un corps composé ne consistant que dans l'assemblage des matieres dont il est composé, si l'on change cet assemblage, ou en rangeant les parties autrement, ou en augmentant quelques-unes de ces parties, dont la combinaison est infinie, il est constant que le changement de la substance de ces corps pourra être infini aussi.

La matiere de la lumiere, en produisant les matieres sulphureuses, s'introduit dans la substance des corps, en change l'arrangement des parties & les augmente, & par consequent elle change la substance même de ces corps en autant de façons qu'elle se peut differemment placer & en differente quantité, ce qui fait une varieté infinie ; de sorte que si on vouloit comparer la varieté des matieres qui existent à celle qui pourroit être par toutes les combinaisons possibles, nous serions obligez de dire, que l'Univers connu n'est que très-peu de chose en comparaison de ce qu'il pourroit être, & même s'il y avoit plusieurs Mondes comme le nôtre, ils pourroient être tous differemment garnis d'objets sans changer la matiere, ni la maniere dont ces objets seroient composez ; ce qui marque une richesse & une puissance infinie de l'Estre qui a produit l'Univers.

DU MIEL

ET DE

SON ANALYSE CHIMIQUE.

PAR M. LEMERY.

1706. 20. Juillet. IL n'est pas necessaire que je traite ici de l'origine du Miel : tout le monde sçait assez que c'est une substance sucrine que les Abeilles ramessent des fleurs de diverses plantes ;

plantes, & qu'elles portent dans leur ruche pour leur nourriture & pour celle de leurs petites mouches. Cette ſubſtance ſucrine ou miellée ſe manifeſte aſſez au goût dans pluſieurs eſpeces de fleurs, comme dans celles du trefle des prez, dans celles des roſes, des œillets; car ſi on les léche principalement vers la partie d'embas, qu'on appelle onglets, & qui eſt contenuë dans le calice, on ſentira un goût doux & agréable. Cette ſubſtance reçoit dans l'Abeille & dans la ruche une élaboration qui la perfectionne & la reduit en miel.

Pluſieurs choſes contribuënt à faire de bon miel, comme la chaleur & la pureté de l'air, la bonté des Abeilles, la nature des plantes qu'elles ont lechées, l'adreſſe des Ouvriers qui y travaillent.

On retire le miel des ruches en deux ſaiſons, au Printemps & en Automne. Il me paroit que la premiere eſt la plus convenable, parceque c'eſt le tems où les Abeilles ſont dans leur plus grande vigueur; qu'elles vont humer & ſuccer les roſées qui tombent abondamment aux mois d'Avril & de May, & que la ſubſtance des plantes eſt plus pur dans le renouvellement de la chaleur.

La meilleure maniere de ſeparer le miel, eſt de mettre les tablettes ou gateaux qu'on a retirez des ruches ſur des clayes ou nattes d'oſier. Il en coule un beau miel blanc excellent qui ſe congelle : on l'appelle Miel vierge.

On tire encore du miel blanc des gateaux qui reſtent ſur les clayes d'oſier, en les mettant à la preſſe dans des ſacs de corde: mais il n'eſt pas ſi bon ni ſi blanc que le premier, tant à cauſe de la cire qui y donne une legere impreſſion, que par l'expreſſion des mouches vives ou mortes, & même des vers gros & blancs qui s'engendrent quelquefois dans les ruches, & qui y portent un grand préjudice ſi l'on n'y remedie, car on obſerve que quand ces inſectes ſe ſont rencontrez dans le miel qu'on a exprimé, il ne ſe congelle pas bien, à cauſe du vilain ſuc qui y eſt entré : le goût en eſt moins agreable, & il ſe garde difficilement ſans s'aigrir & ſe corrompre.

Le miel jaune eſt tiré de toutes ſortes de gateaux vieux & nouveaux qu'on a retirez des ruches : on les rompt, on les met dans des chaudieres, on y mêle un peu d'eau, & on les fait chauffer ; puis les ayant envelopez dans des ſacs de toile, on les met à la preſſe pour en faire ſortir le miel : la cire demeure dans les ſacs.

Pluſieurs cantons du Languedoc & du Dauphiné fourniſſent le meilleur miel blanc que nous ayons en France : mais le plus eſtimé & le plus recherché de tous, eſt celui qu'on fait en un petit bourg nommé la Corbiere, ſitué à trois lieuës de Narbonne : c'eſt celui que nous appellons miel de Narbonne. L'excellence de ce miel, à ce qu'on prétend, vient des Romarins qui ſont abondans & très-communs dans cette contrée, & dont les Abeilles ſuccent les fleurs ; neanmoins je remarquay en une année que je demeuray au Languedoc, qu'encore que la gelée qui y fut grande & extraordinaire l'hyver, eût fait perir preſque tous les Romarins, le miel qu'on recüeillit au Printems ſuivant ne ceda point en agrément ni en bonne qualité aux miels qui avoient été tirez les années précedentes.

Pour le miel jaune nous en voyons de pluſieurs ſortes qui different dans leur conſiſtance, dans leur couleur plus ou moins foncée, dans leur odeur & dans leur goût. Celui qui ſe tire de Champagne eſt le meilleur ; il doit être nouveau, de conſiſtance aſſez ferme, grenu, de couleur jaune dorée, d'un goût agreable. Les miels qui viennent de la Touraine & de Picardie ſont moins bons, ils ſont écumeux, mal liez, & ſouvent d'une conſiſtance trop liquide, de couleur jaune aſſez foncée, ſentant un peu la cire, & d'un goût moins agréable que celui du miel de Champagne. Le miel qui ſe fait en Normandie eſt le moins bon de tous, & le plus mal préparé : ſa conſiſtance eſt quelquefois aſſez ſolide, & ſouvent trop liquide : ſa couleur eſt rougeâtre, ſon odeur eſt deſagreable, il a un goût de cire.

Ces differentes qualitez de miels ne viennent pas tant de la temperature du climat, que de la bonne ou mauvai-

se manœuvre des Ouvriers. Ceux de Normandie mettent trop d'eau dans leurs gâteaux, & ils sont obligez ensuite d'en faire consommer une partie, c'est peut-être ce qui rend leur miel rougeâtre. Ils en separent mal la cire par les pressoirs, ce qui fait qu'il a un goût de cire : ce n'est pourtant pas leur profit, car la cire est bien plus chere que le miel.

Le miel est en usage dans quelques alimens & dans les remedes ; mais il l'étoit beaucoup davantage avant qu'on eût trouvé l'invention du sucre. Les anciens en assaisonnoient leurs ragoûts, & ils l'emploïoient pour leurs confitures, comme quand ils préparoient leur *Melimelum*, qui étoit du coing ou une autre pomme confite dans du miel. On en servoit sur leurs tables. Ils s'en servoient pour leurs sirops & pour leurs autres compositions medecinales, comme nous nous servons du sucre. Ils en composoient diverses sortes de boissons, comme de l'Hydromel qu'ils appelloient aussi *Melicratum*, *Aqua mulsa*, *Apomeli*. Nous nous servons souvent pour la délicatesse du goût à la place de cet Hydromel, de l'eau sucrée.

Ils beuvoient du vin miellé qn'ils appelloient *Oenomeli*. Nous nous servons à sa place du vin sucré, de l'Hypocras.

Ils beuvoient aussi de l'Oximel : c'étoit un mélange de miel & de vinaigre qu'ils temperoient avec beaucoup d'eau pour se rafraîchir. Nous nous servons à sa place du sirop aceteux, du sirop de limons, ou des autres sirops aigres, & nous n'emploïons plus gueres ces liqueurs miellées que pour les remedes.

Au reste le miel est souvent préferable au sucre, quand on n'a point tout-à-fait égard à la délicatesse du goût : car outre que c'est un ramas de la substance la plus pure & la plus étherée d'une infinité de fleurs qui possedent de grandes vertus, il est plus balsamique, plus pectoral & plus anodin que le sucre, qui n'est que le suc purifié & épaissi du seul roseau.

Le miel devient amer par une trop forte coction, de même que les autres choses douces : il s'enflamme au feu à peu près comme le sucre.

Les Abeilles ſauvages ſont ſur les rochers de gros amas de miel qui ne ſervent ordinairement que pour la nourriture des mouches & des oiſeaux. Pluſieurs croïent avec aſſez de vrai-ſemblance que l'Ambre gris en provient ; mais ce n'eſt pas dont il s'agit preſentement.

Analyſe du Miel.

J'ai mis en diſtillation au bain Marie dans une grande cucurbite de degrez trente-deux onces du plus excellent miel de Narbonne que j'aye pû trouver. J'en ay eu ſix onces d'une eau claire comme de l'eau commune. J'en aurois tiré davantage ſi j'avois continué la diſtillation ; mais je ne voulois que la premiere eau qu'on appelle Roſée de miel. Elle a l'odeur du miel, elle eſt inſipide ; cependant elle contient un acide, car elle a rougi le tourneſol. Elle n'a fait aucune ébulition avec l'huile de tartre, ni avec l'eſprit volatil de ſel armoniac. Cette roſée de miel eſt eſtimée propre pour faire perdre le lait aux Nourrices, pour exciter l'urine, pour aider à la reſpiration. On en prend trois ou quatre onces à la doſe, deux ou trois fois par jour.

J'ai retiré la cucurbitte du bain Marie, & je l'ai placée au bain de ſable où j'ai continué la diſtillation par un feu mediocre. Le miel s'eſt beaucoup gonflé, & il a rendu quatre onces d'une ſeconde eau claire, de couleur jaune, d'une odeur de miel aſſez agreable, d'un goût acide & acre, ſentant un peu le feu. Elle a donné au tourneſol une belle couleur rouge foncée.

J'ai pouſſé le feu un plus fort ſous le miel, il s'en eſt élevé beaucoup de fumées blanches qui ont rempli de nuages le chapiteau & le recipient, & elles ſe ſont réſoutes en une troiſiéme eau qu'on appelle Eſprit de miel, peſant trois onces, de couleur rouge, d'un odeur de brûlé, mais agréable & d'un goût acide fort âcre, penetrant & brûlant un peu la bouche. Elle a boüillonné avec les alkali : elle a donné au tourneſol comme la précedente une belle couleur rouge foncée.

J'ai augmenté fortement le feu sous la cucurbite, & je l'ai continué jusqu'à ce qu'il ne parût plus de nuages dans le chapiteau. Il a distillé une quatriéme eau pesant deux onces, ayant une odeur semblable à la précedente, de couleur orangée, d'un goût acide accompagné d'acreté, mais moindre qu'en la troisiéme eau, ce qui m'a paru étonnant; car ces liqueurs devroient étre de plus en plus acres à mesure qu'elles approchent de la fin de la distillation : c'est apparemment que cette derniere est plus empreinte de parties huileuses que l'autre, car l'huile adoucit & tempere l'acreté des sels. Elle a boüillonné avec les liqueurs alkalines, & elle a rougi le tournesol.

J'ai trouvé dans la cucurbite une masse très-rarefiée, legere, noire, pesant quinze onces & demie; je l'ai remise en distillation dans une cornuë, & j'en ai encore tiré par un grand feu sept onces d'une liqueur rouge brune, teignant fortement les doigts en couleur orangée, d'une odeur forte de brûlé, mais qui n'est pas beaucoup desagreable, d'un goût acide, acre & piquant, & deux dragmes d'huile épaisse & noire comme de la poix, d'un goût acre. Cette acreté procede d'une portion de sel qui s'y est attachée. Le miel doit contenir beaucoup plus d'huile qu'il ne s'en est separé par les distillations; mais il en demeure toûjours une bonne partie dans les dernieres liqueurs distillées : car si on les laisse reposer quelques jours, il s'en précipite un peu au fond du vaisseau, & il s'en attache aux côtez. Elle est estimée bonne pour la carie des os.

J'ai rectifié la liqueur rouge-brune derniere distillée, elle est fort claire, mais sa couleur tire un peu sur le jaune : son odeur est desagreable, & son goût a un peu diminué en acreté : C'est ce qu'on appelle Esprit ou aigre de miel rectifié.

J'ai retiré de la cornuë sept onces & six dragmes d'une espece de charbon noir, rarefié, terrestre, presqu'insipide, mais marquant pourtant au goût, quand on l'a mâché, quelque legere impression de sel. J'en parlerai encore dans la suite.

On voit par ces diſtillations que trente-deux onces de miel de Narbonne rendent vingt-quatre onces & deux dragmes de liqueur. Je n'en ai à la verité tiré que vingt-deux onces & ſix dragmes, mais le reſte s'eſt diſſipé par les jointures des vaiſſeaux ; car quelque exactitude qu'on apporte dans ces operations, il s'en perd toûjours.

Je ne me ſuis pas contenté d'avoir fait l'analyſe du miel blanc le plus pur tiré de la ruche ſans expreſſion, j'ai fait celle du ſecond miel tiré par une legere expreſſion. Il étoit de bonne conſiſtance, aſſez ferme, de couleur blanche tirant ſur le jaune, d'aſſez bonne odeur, d'un goût agréable ; je l'ai fait diſtiller au même poids comme le précedent, j'en ai tiré les mêmes principes ; mais les premieres eaux m'ont ſemblé moins odorantes que celles du miel de Narbonne, & il y en a eu ſur le total demie-once moins. Il m'eſt reſté dans la cornuë huit onces & deux dragmes de charbon ſemblable au precedent, mais un peu plus noir. Cette derniere diſtillation fait voir que le miel pour peu qu'il ait été exprimé au ſortir de la ruche, contient plus de terre que celui qui a été fait ſans expreſſion.

J'ai fait encore l'analyſe du miel de Champagne ; il étoit de bonne conſiſtance, de couleur jaune, d'une odeur fade, d'un goût moins agreable que celui des miels dont j'ai parlé. J'en ai mis trente-deux onces en diſtillation : les premieres eaux que j'en ai tiré ont une odeur miellée un peu plus foible que celle des précedentes ; mais les dernieres qu'on appelle Eſprit de miel, m'ont paru tant ſoit peu plus acres, & elles ont été moins abondantes, car je n'en ai tiré en tout que vingt-deux onces & demie. J'ai trouvé dans le chapiteau après la diſtillation, outre une petite quantité d'huile noire & épaiſſe, un morceau de cire jaune peſant deux dragmes, auſſi dure & auſſi parfaite qu'aucune autre. Cette cire avoit paſſé avec le miel quand on avoit preſſé les gateaux, & s'y étoit tenuë diſſoute, le feu l'a fait ſeparer & élever avec l'eſprit.

J'ai trouvé dans la cornuë après la derniere diſtillation neuf onces d'un charbon rarefié ſemblable aux précedens,

Ce miel commun de Champagne a donc contenu plus de terre que le miel blanc ; ce qui vient de l'expreſſion plus forte qu'on en a faite au ſortir de la ruche.

J'ay fait encore l'analyſe du miel de Normandie ; il étoit de conſiſtance aſſez ferme, de couleur jaune rougeâtre, d'une odeur & d'un goût moins agréable que les autres. J'en ay donc mis en diſtillation trente-deux onces, il en eſt ſorti des liqueurs pareilles à celles que j'ay tirées du miel de Champagne, & j'ay trouvé au chapiteau un morceau de cire peſant trois dragmes : il m'eſt reſté dans la cornuë neuf onces de charbon rarefié comme aux diſtillations précedentes.

J'ay ramaſſé tous les charbons de miel qui ſont ſortis des cornuës après les diſtillations d'ont j'ay parlé, j'en ay mêlé avec des acides les plus forts, ils n'ont point fermenté.

J'ay mis calciner à grand feu trois livres & demie ou cinquante-ſix onces de ces charbons de miel dans un pot de terre ſimple ſans verniſſure pendant dix heures : cette matiere s'eſt allumée comme le charbon ordinaire, mais elle ne s'eſt point reduite en cendres ; elle n'a diminué que de dix onces, & elle eſt reſtée noire & en charbon : elle a pris un goût un peu ſalé. J'ay verſé ſur une portion de cette matiere une liqueur acide, il s'y eſt fait efferveſcence. J'ay mis le reſte tremper dans de l'eau pour en faire une leſſive, le mêlange a boüillonné comme quand on éteint de la chaux. J'ay filtré la liqueur, & je l'ay miſe évaporer, il ne m'eſt reſté qu'une dragme & demie d'un ſel alkali acre & piquant au goût. Il a fermenté avec les acides, & il a troublé la diſſolution du ſublimé. Il eſt aperitif, fondant & réſolutif comme les autres ſels alkali fixes, lexiviels. On en peut donner juſqu'à deux ſcrupules à la doſe.

J'ay fait ſecher dans une terrine qui n'étoit point verniſſée la cendre ou plutôt le charbon de miel reſté aprés la leſſive, il eſt demeuré inſipide, & il n'a plus été alkali. Je l'ay remis calciner, il a pris feu & il a rougi, mais il ne s'eſt point reduit en cendres, quoique le feu que j'y ay

emploïé ait été fort grand. Il n'est point non-plus revenu alkali, & je n'en ay pû tirer de sel par une nouvelle leſſive que j'en ay faite. Je l'ay mis ſecher exactement comme devant, & j'ay fait ſur cette matiere une experience qui m'a paru ſurprenante, & qui merite d'être rapportée ici.

J'ay mis ſur un papier une portion de ce charbon de miel écraſé en poudre groſſiere, j'en ay approché un couteau aimanté, j'ay apperçû que beaucoup des particules du charbon ſe ſont auſſi-tôt heriſſées, ont été attirées par le couteau, & s'y ſont attachées tout de même que la limaille de fer eſt attirée par l'aimant & s'y attache.

Cette experience montre que le charbon de miel contient du fer; car juſqu'à preſent il ne nous a point paru de matiere autre que le fer qui fût attirée par l'aimant. Au reſte je puis aſſurer que toutes mes operations ſur les miels ont été faites dans des vaiſſeaux de terre ou de verre, ſans qu'il y ait eu communication du fer, ni même d'aucun autre metal. Le charbon de miel avant qu'il eût été calciné & dépoüillé de ſon ſel, étoit auſſi attiré par l'aimant; mais moins bien ou en plus petite quantité.

Cette experience confirme celles que M. Geoffroy a raportées à la Compagnie touchant le fer qu'il aſſure avoir trouvé dans les cendres de differens vegetaux. Mais quoique le miel ſoit tiré des plantes, il a reçû tant d'élaborations differentes qu'il ne laiſſoit gueres lieu de ſoupçonner avant cette experience qu'on en pût tirer du fer.

On explique ce phenomene en deux manieres differentes. La premiere eſt que les racines des plantes ſuccent un ſuc vitriolique ou ferrugineux dont on croit que toutes les terres ſont empreintes, & que ce ſuc monte & ſe diſtribuë par toute la plante pour ſa nourriture; d'où vient, dit-on, qu'après avoir brûlé la plante, on trouve dans ſes cendres le fer dont le feu a fait raſſembler & rejoindre les particules.

La ſeconde explication ne reconnoît point de fer dans les plantes en leur état naturel; mais elle prétend que le feu par la force de ſon action brûlant ou calcinant les plantes,

plantes, convertit une partie de leurs cendres en fer.

L'une & l'autre explication me paroît bien difficile à comprendre ; car pour la premiere il faut non-seulement admettre que toutes les terres où croissent les plantes soient ferrugineuses : il faut concevoir que la substance pesante du fer ait été portée & élevée jusqu'au sommet de la plante, qu'elle ait servi à composer le suc le plus volatil & le plus pur des fleurs, ressemblant à une rosée que les abeilles lechent & recüeillent : que cette substance ait souffert toutes les élaborations dans les mouches & dans les ruches, sans que la partie ferrugineuse s'en soit separée : & qu'enfin cette partie ferrugineuse ait été à l'abri de toutes les tortures qu'on a données au miel dans l'analyse qu'on en a faite.

La seconde explication n'est pas moins obscure que la premiere ; car on ne se persuadera pas aisément que la seule action du feu puisse convertir le charbon de miel en fer.

Je ne sçai si au milieu de ces deux explications, il n'y auroit point lieu de soupçonner qu'il se puisse rencontrer dans la nature plusieurs matieres autres que le fer capables d'être attirées par l'aimant. C'est peut-être ce qu'un grand nombre d'experiences nous découvrira avec le temps.

Il y a deux petites reflexions à faire sur l'analyse du miel. La premiere est, que quoique le miel en son état naturel ait une saveur très-douce, il n'y a pas un de ses principes qui étant separé ait retenu ce goût. On en tire par la distillation une eau presque insipide, beaucoup de liqueur acide qu'on appelle esprit, de l'huile, un peu de sel fixe ; mais en toutes ces substances son goût naturel ne se rencontre point, & même on a beau remêler ces principes ensemble, on n'y remettra point la douceur. Mon sentiment sur ce fait est que pour faire la douceur il faut un mêlange exact d'acide & d'huile: l'huile seule est fade & passe sur la langue sans y faire d'impression, l'acide au contraire piquotte la langue ; mais quand ces deux princi-

pes ſont mêlez enſemble, les pointes de l'acide ſont liées par les parties rameuſes de l'huile, enſorte qu'elles n'ont plus la force de faire de l'irritation ſur la langue, mais elles en ont aſſez pour faire penetrer doucement l'huile en lui ſervant de vehicule, & exciter ſur les nerfs du goût une agreable impreſſion ou chatoüillement que nous appellons douceur. Ce raiſonnement eſt confirmé par une infinité d'experiences, car de toutes les choſes douces on retire de l'acide & de l'huile, & alors il n'y a plus de douceur. On fait auſſi du doux en mêlant exactement un acide avec une matiere ſulfureuſe ; car ſi l'on fait diſſoudre le plomb qui eſt inſipide, mais ſulfureux, avec un menſtruë acide, la diſſolution ſera douce, & l'on en fera par évaporation un ſel qu'on appelle ſucre de Saturne, à cauſe de ſa grande douceur. Si enſuite l'on fait diſtiller ce ſel de Saturne, on en retirera une liqueur acide, & il n'y aura plus de ſaveur ſucrée. Il ne ſuit pourtant pas de ce raiſonnement que toutes les fois qu'on mêlera groſſierement une liqueur acide avec de l'huile ou avec une matiere ſulfureuſe, le mêlange en ſera doux : il faut pour faire la douceur que l'acide ſoit intimement & parfaitement incorporé & mêlé avec l'huile, ce qui eſt fait très-ſouvent par la nature, & quelquefois par l'art.

La ſeconde reflexion eſt que ſuivant toutes les apparences le miel en ſon état naturel ne contient aucun alkali : tout ce qui en provient par la diſtillation eſt acide. Le charbon même qu'on en retire au ſortir de la cornuë ne donne point de marque d'alkali, puiſqu'il ne fermente point avec les acides. Et ſi le peu de ſel fixe qu'on tire de ce charbon eſt alkali, ce n'eſt qu'après une grande & longue calcination, qui rendant la plûpart des ſels poreux & en chaux, les fait devenir alkali, d'acides qu'ils étoient. L'eſprit de miel rectifié eſt aperitif ; on en peut donner juſqu'à deux ſcrupules à la doſe. On s'en ſert auſſi exterieurement pour faire croître les cheveux. Celui qui reſte au fond de la cucurbite après la rectification, eſt bon pour déterger les vieux ulceres : il contient la partie la plus

âcre de la liqueur. Plusieurs Chimistes ont dit dans leurs écrits que l'esprit de miel rectifié dissolvoit l'or & plusieurs autres metaux : mais comme tout ce qui est écrit n'est pas toûjours veritable, j'en ay voulu faire l'experience. J'ay trouvé qu'effectivement ce menstruë avoit dissout quelque legere portion de l'or, mais sans qu'on y eût apperçû aucune fermentation.

L'argent ni l'étain n'ont point été penetrez par cet esprit : le fer en a été bien penetré, & il s'est fait une teinture noire & vitriolique.

Le plomb en a été aussi penetré, & le dissolvant a pris un goût doux & sucrin, ce qui marque une dissolution.

Le cuivre a donné au menstruë une impression & une odeur de Venus, mais il ne lui a point fait changer de couleur.

Le mercure en a été penetré, & il s'en est dissout une petite portion.



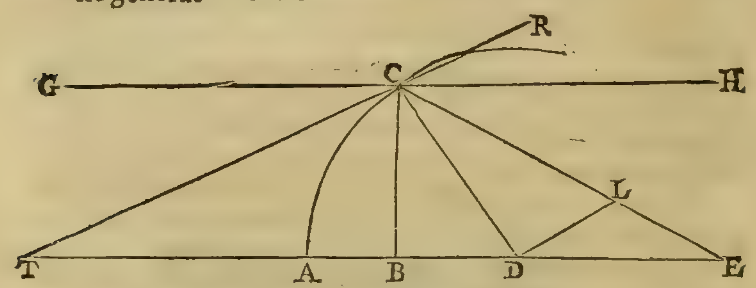
METHODE

Pour trouver les foyers des Lignes Geometriques de tous les genres.

PAR M. ROLLE.

ARTICLE PREMIER.

1706. 31. Juillet. SOit AC une Courbe telle qu'on voudra, & que l'on veüille trouver tous les foyers qui se forment dans son axe génerateur AE.



On observera en premier lieu les lignes qui doivent servir au calcul. Ensuite l'on exprimera chacune de ces lignes par des lettres : ce qui se peut faire en cette maniere.

AB abscisse quelconque dont l'appliquée BC fait un angle droit CBD avec l'axe AE, & le point C est un point pris à volonté sur la Courbe.

CD est une droite perpendiculaire à la Courbe proposée, ou le rayon de la tangente au point C.

T est un point donné sur l'axe AB.

TCR est un rayon de lumiere, ou le rayon incident, ou le rayon direct.

CE est le rayon lumineux rompu en C, qui rencontre l'axe en un point E.

DL parallele au rayon incident TC.

DCR ou *TCD* eſt l'angle d'incidence.

DCE eſt l'angle rompu, ou l'angle de refraction. Ainſi l'angle rompu *DCE*, & l'angle d'incidence *TCD* ou ſon égal *CDL*, ſont deux angles du triangle *CLD*; & delà il eſt aiſé de voir que le côté *CL* eſt au côté *LD*, comme le ſinus de l'angle d'incidence au ſinus de l'angle rompu.

On prendra m & n pour exprimer les rapports du ſinus de l'angle d'incidence eſt au ſinus de l'angle rompu.

y pour l'expreſſion des abſciſſes *AB*.

x pour les appliquées *BC*.

z pour la ſous-perpendiculaire *BD*.

t pour *TA*. l pour *TC*.

v pour *AE*. d pour *DE*.

h pour *DL*, & par conſequent $\frac{mh}{n}$ pour *CL*.

r pour *CE*. Ainſi l'on aura $r - \frac{mh}{n}$ pour *LE*.

s pour la ſoûtangente des y.

Cela poſé, on formera toutes les égalités que fournit la figure rectiligne. Ce qui ſe peut faire comme on le voit ici.

$y + z + d = v$. pour les parties de l'axe.

$s : x :: x :: z$. Donc $sz = xx$. Parceque l'appliquée eſt moïenne proportionelle entre la ſoûtangente & la ſoûperpendiculaire.

$ll = xx + yy + 2yt + tt$. à cauſe de l'angle droit *CBT*.

$rr = xx + zz + 2dz + dd$. à cauſe de l'angle droit *CBE*.

$d : h :: v + t : l$. Donc $ld = hv + ht$.

$h : r - \frac{mh}{n} :: l : r$. Donc $rh = lr - \frac{mhl}{n}$.

Ces deux dernieres égalités ſe tirent des triangles ſemblables *EDL*, *ETC*: Et ces deux triangles ſont ſemblables à cauſe que *DL* eſt parallele à *TC*.

Faiſant évanoüir toutes les inconnuës hors l, r, t, v, on trouvera cette égalité :

$$mvsl - mxxl - mysl = ntsr + nxxr + ntsr.$$

Où l'on voit que l & r ſont en ſituation réciproque, auſſi-bien que v & t. Ce qui ſervira dans la ſuite à faire voir que

le point E se peut considerer comme un point donné, & le point T comme celui que l'on cherche.

Et si l'on fait encore évanoüir l & r, on aura l'égalité ou la formule que l'on voit ici en M.

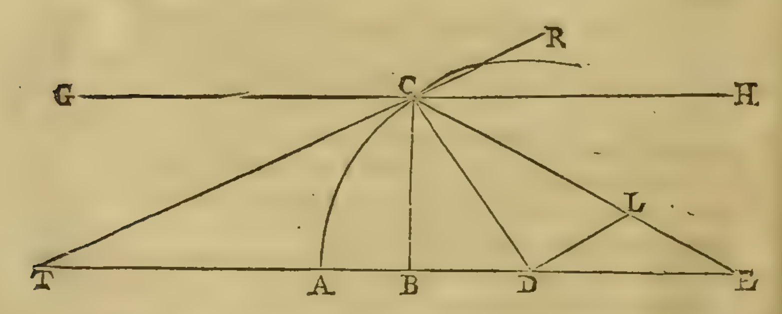
$$M. \quad \overline{\overline{mvs - mxx - mys}}^{2} \times \overline{tt + 2ty + yy + xx}$$

$$= \overline{\overline{nts + nxx + nys}}^{2} \times \overline{vv - 2vy + yy + xx}.$$

Dans cette formule M la lettre t exprime une ligne donnée ou indéterminée, & tandis que cette ligne sera finie, les rayons TC feront toûjours un angle oblique avec l'appliquée CB. Mais si l'on veut que cet angle soit droit, & que par consequent les rayons incidens soient paralleles à l'axe; alors l'inconnuë t deviendra infinie, & dans ce cas son premier coëfficient sera détruit dans la formule M, selon ce qui a été dit des premiers coëfficiens dans la methode des Questions indeterminées que je donnay au public en l'année 1699. Ensorte que la formule M se reduira à celle que l'on voit ici en N.

$$N. \quad mvs - mmx - mys^{2} = nns \times vv - 2vy + yy + xx.$$

Ainsi l'égalité N est une formule pour le cas où les rayons sont paralleles à l'axe, comme l'égalité M est une formule pour les rayons qui sont obliques à l'axe, & qui partent d'un point fixe T.



On trouveroit encore cette formule N par la comparaison des lignes ou des angles, en supposant que le rayon GC soit parallele à l'axe AB. Alors l'angle d'incidence

GCD feroit égal à l'angle *CDE* du triangle *CDE*; & l'on a dans le même triangle l'angle rompu *DCE* : de maniere que le côté *CE* feroit au côté *ED* , comme le finus de l'incidence au finus de la refraction, ou comme m eft à n. Et prenant les autres égalités qui fe prefentent, on en tireroit d'abord la formule *N*.

Comme les foyers qui fe forment des rayons paralleles font les premiers dont on fait quelque ufage, & que la formule en eft fimple, je la prendrai pour exemple dans la fuite de ce premier Memoire.

ART. II. Si on a l'égalité generatrice d'une Courbe, & que l'on veüille trouver les foyers de cette Courbe avec les conditions que l'on a marquées dans l'article précedent, on prendra l'égalité de la foûtangente qui appartient à l'axe fur lequel font les foyers ; & comparant ces deux égalités à celles du premier Article, ou feulement à la formule qui en réfulte, on en fera évanoüir toutes les inconnuës hors x & v. En quoi il faut obferver de mettre au lieu de m & de n les nombres qui leur font égaux, & il arrivera que les deux inconnuës x & v fe trouveront dans la réduite ; ou bien que cette réduite n'aura que la feule inconnuë v. Ce qui marque deux cas dans la Regle.

Si l'on prend pour exemple l'égalité generatrice marquée *P*, on aura pour la foûtangente des y, celle que l'on voit en *R*.

$$P.\ 9xx = 18ay - 5yy.\quad R.\ s = \frac{9xx}{9a - 5y}.$$

Et voulant trouver les foyers des rayons qui font paralleles à l'axe des y, on prendra ces deux égalités avec la formule *N* de l'Article précedent pour en faire évanoüir les inconnuës x & y. En quoy il faut fe fouvenir de fubftituer les nombres qui font égaux à m & à n, ou qui en marquent le rapport ; & fi l'on a $m = 3$ avec $n = 2$, comme on le fait ordinairement lorfque les rayons paffent de l'air dans le verre, la réduite fera telle qu'on la voit ici en *D*.

$$D\ldots\ 5vv - 18av + 9aa = 0.$$

ART. III. Lorfque l'inconnuë v eft la feule inconnuë

de la réduite, comme dans l'exemple du précedent Article, on a autant de foyers sur l'axe proposé, qu'il se trouve de racines réelles dans cette réduite, & chacun de ces foyers est un point geometrique.

Pour trouver ces foyers il n'y a qu'à prendre sur cet axe des parties comme AE qui soient égales à ces racines.

Dans l'exemple proposé les racines de la réduite sont $3a$ & $\frac{3}{5}a$. Ainsi du point A comme centre & des intervales $3a$ & $\frac{3}{5}a$, ayant décrit deux cercles, les deux points où ils coupent l'axe du côté de E, sont deux foyers de la Courbe proposée qui ont les conditions requises.

ART. IV. Si les deux inconnuës x & v se trouvent dans la réduite, on supposera que le dernier terme des x est égal à θ. Ce qui donnera une égalité dans laquelle il n'y aura que la seule inconnuë v : Et cette égalité étant resoluë, ses racines serviront à trouver les foyers qu'on demande, comme on le va dire ici.

Soit pour exemple l'égalité generatrice marquée ici en E.

$$E \ldots\ xx = 2ay - yy.$$

On aura pour l'égalité des soûtangentes celle que l'on voit ici en F.

$$F \ldots\ s = \frac{xx}{a - y}.$$

Comparant ces deux égalités avec la formule N pour avoir les foyers des rayons qui sont paralleles à l'axe, comme on l'a dit aux Articles qui précedent, & prenant $2m = 3n$ pour le rapport des sinus, on trouvera la réduite H.

$$H.\quad \begin{array}{ll} +64vvxx & +25v^4 = \theta. \\ -128avxx & -100av^3 \\ +64aaxx & +46aavv \\ & +108a^3v \\ & -63a^4 \end{array}$$

Et supposant que le dernier terme des x soit égal à θ, on aura l'égalité G.

$$G.\ 25v^4 - 100av^3 + 46aavv + 108a^3v - 63a^4\theta,$$

dont les racines sont $-a$. $\frac{3}{5}a$. $\frac{7}{5}a$. $3a$.

Les

Les racines d'une égalité ainſi trouvée, ſont les limites des foyers que l'on demande ſur l'axe propoſé *AB*, pour tous les rameaux de la Courbe propoſée : Et comme on ne demande pas ordinairement tous ces foyers, ni même l'étenduë entiere d'un ſeul, on peut en rabatre tout ce qui ne ſert point aux deſſeins particuliers que l'on peut avoir ſur ce ſujet, comme on le va dire icy.

Parmi tous ces foyers il s'en trouve d'imaginaires qui doivent être exclus, & ſouvent auſſi il s'en trouve de negatifs qui ne répondent pas à l'intention que l'on a. Mais la methode les diſtingue, & cela ſe peut faire en cette maniere.

On diſpoſera les racines de l'égalité *G* ſelon l'ordre de leur grandeur, comme on le voit en *K*.

$$K \ldots -a. \quad \tfrac{3}{5}a. \quad \tfrac{7}{5}a \quad 3a.$$

Et l'on prendra d'autres grandeurs dans leurs intervales une dans chacun, comme je l'ay dit dans la methode des indéterminées, & comme on le voit icy en *L*.

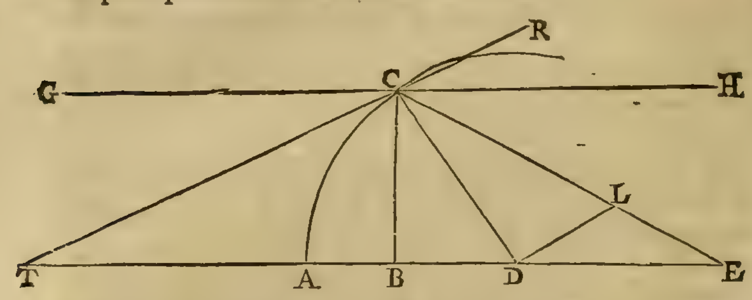
$$L \ldots -2a \quad 0 \quad \tfrac{2}{5}a. \quad 4a.$$

Enſuite on ſubſtituëra chacune de ces quantités au lieu de v dans la réduite *H*, pour ſçavoir ſi elle donne des valeurs réelles ou des imaginaires pour x, dans l'égalité qui réſulte de la ſubſtitution.

Si la réſultante renferme des valeurs réelles de x, alors l'intervale dans lequel aura été priſe la valeur ſubſtituée ſera un foyer lineaire où ſe vont rendre tous les rayons rompus. Ainſi l'on trouvera que l'intervale de $-a$ à $\tfrac{3}{5}a$ eſt un foyer, & que l'intervale de $\tfrac{7}{5}a$ à $3a$ eſt encore un foyer de la Courbe propoſée ſur l'axe propoſé : parceque la ſubſtitution de 0 & celle de $2a$ qui ont été priſes dans ces intervales donnent des valeurs réelles pour l'inconnuë x.

Mais il peut arriver que parmi ces foyers il y en ait quelques-uns qui n'ont pas toutes les conditions que l'on y a deſirées ; auquel cas on peut toujours s'en aſſurer par le calcul. Car toutes ces conditions doivent être exprimées par des égalités dans le Problême rectiligne, com-

me on l'a fait ici art. 1. & 2 De maniere que ce Problême étant pleinement résolu, il sera facile de voir si tous les segmens de la Figure sont tels qu'on les a supposés ou qu'on les desire. Quelquefois une partie de ces conditions suffiroit pour exclure les foyers qui ne conviennent pas, ou bien pour s'assurer de ceux qui conviennent. Par exemple, dans l'hypothese que l'action de la lumiere se fait de *G* en *C*, il faut que les foyers soient dans l'axe positif *AB*, & delà on voit que le foyer qui a pour limites $-a$ & $\frac{3}{5}a$ ne peut pas satisfaire à cette condition.



Mais delà on peut voir aussi que le foyer renferme entre $\frac{3}{5}a$ & $3a$ est un foyer lineaire qui a toutes les conditions que l'on y a demandées.

Cette methode est generale pour les lignes geometriques de tous les genres; mais elle suppose d'autres methodes que j'ay données au public: comme on le verra dans les Remarques suivantes.

REMARQUES.

Premiere. Souvent il arrive que l'égalité proposée fournit differentes Courbes, ou une Courbe composée de differens rameaux, & il est certain que tous ces rameaux ne peuvent pas également convenir aux differens desseins que l'on peut avoir sur la fabrique & sur l'usage des verres. Ainsi il est comme necessaire pour cette raison & pour d'autres raisons encore, de connoître les contours de tous ces rameaux & leur differente situation à l'égard de l'axe

generateur, & de l'origine qui leur eſt commune. Ce qui ſe peut faire par le moyen de la Methode que je donnay au public en l'année 1699 pour la réſolution des Queſtions indéterminées, ſelon ce qui en a été dit dans les Memoires de l'Academie de l'année 1702 pag. 174, & de l'année 1703 pag. 132.

Seconde. Dans l'hypotheſe que les foyers doivent être placés ſur l'axe, il eſt évident qu'en pluſieurs occaſions il faudroit le transferer, & par conſequent transformer l'égalité generatrice. Cela ſe peut faire en general par le moïen des formules que j'ay données pour ces tranſpoſitions d'axes dans le Journal du 13 Avril 1702 pag. 745, ou bien par des voïes particulieres qui ſont ordinaires, & qui peuvent quelquefois ſuffire dans cette occaſion.

On peut chercher les foyers dans le plan de la Courbe ſans faire cette tranſpoſition d'axes, ni par conſequent transformer l'égalité propoſée ; & même on le peut faire lorſque les rayons viennent d'un point donné hors de l'axe dans le même plan. Alors il faudroit faire des additions & d'autres changemens dans le Problême rectiligne: ce qui augmenteroit le calcul, mais il n'y auroit d'ailleurs aucune difficulté conſiderable.

Troiſiéme. Les réduites telles que *H* du ſecond exemple produiſent des Courbes dont les axes ſont les foyers des Courbes propoſées ; enſorte que ces axes ſont Cauſtiques, & même leurs Courbes le ſont auſſi. Ainſi la réduite *H* fournit deux feüilles égales & ſemblables, dont les axes limités ſont deux foyers lineaires de la propoſée *E*, & l'on peut dire que ces feüilles ſont plus ou moins ardentes, ſelon que leurs parties ſont plus ou moins proches de l'axe, & ſelon que les parties de cet axe ſont plus ou moins embraſées.

Quatriéme. Les *maxima* & les *minima* de la réduite ſervent à diſtinguer dans chacun des foyers que fournit la methode, toutes les parties qui conviennent aux differens rameaux de de la Courbe propoſée. Ainſi dans le dernier exemple les *maxima* de *x* pris dans la réduite diviſent

chaque foyer en deux parties, dont l'une appartient au demi cercle qui presente sa convexité aux rayons lumineux, l'autre partie de ce foyer appartient au demi-cercle qui reçoit ces rayons dans sa concavité. Mais dans cette seconde partie il faut supposer que la refraction se change en une espece de reflexion, de maniere que l'incidence soit à cette reflexion comme m à n, ou bien que la refraction dans ce demi-cercle ne dirige point les rayons lumineux du côté de l'axe, & que par consequent il faut retrancher du foyer tout ce superflu pour satisfaire aux dessein que l'on s'est proposé. Ainsi ayant trouvé que le foyer positif est l'intervale de $\frac{2}{5}a$ à $3a$ pour le cercle entier, on trouvera $2a - \frac{2a}{\sqrt{5}}$ pour ce qui appartient au premier demi-cercle dans lequel les fractions ont les conditions requises, & le reste $\frac{2a}{\sqrt{5}} - \frac{2}{5}a$ qui appartiendroit au second demi-cercle pourra être rejetté.

Cinquiéme. Par le moïen d'une réduite telle que H, on peut trouver les parties de la Courbe proposée qui conviennent à un foyer dont la longueur est donnée, & par consequent trouver le diametre du verre qui convient à ce foyer donné. On peut encore par la même réduite trouver la longueur du foyer qui convient à une portion donnée de cette Courbe, & par consequent à un verre dont le diametre est donné dans tous les cas possibles. Ce qui est évident, puisque des deux inconnuës de cette réduite, l'une exprime la longueur du foyer, & l'autre la hauteur du verre.

On n'a envisagé dans la methode & dans ces remarques que la superficie du verre, ne voïant pas qu'il y ait de la difficulté quand il faut avoir égard à son épaisseur, ni quand il faut se servir de plusieurs verres, lorsque l'on a une methode pour la surface d'un verre quelconque.

Sixiéme. J'ay dit dans le second article de la methode de substituer les valeurs de m & de n, & il étoit bon de le dire pour mieux faire voir comment le troisiéme article est distingué du quatriéme article. Mais il y a des égali-

tés, quoique conçûës en termes generaux, où il ne seroit pas necessaire de faire cette substitution en y appliquant le troisiéme article, & on le verroit si l'on prenoit pour exemple l'égalité marquée icy en T.

$$T \ldots \quad mmxx = 2ammy + nnyy - mmyy.$$

On s'appercevroit d'abord, en y appliquant les trois premiers articles, que l'inconnuë x s'évanoüit par elle-même, sans qu'il soit necessaire de déterminer m ni n. On verroit aussi qu'il ne demeure dans la réduite que la seule inconnuë v: que par consequent tous les foyers sont des points geometriques, & que l'on a toujours $v = \frac{am}{m+n}$ pour les trouver, lorsque les rayons sont paralleles à l'axe.

Septiéme. La methode que je viens de proposer étant bien conçûë, il sera facile de l'appliquer aux égalités dont les coëfficiens sont indéterminés, & de former son inverse par le moïen de la methode des indéterminées dont j'ay parlé dans la premiere remarque. Il y a des exemples neanmoins où cette methode ne seroit pas necessaire, comme on le va voir icy.

Soit pour exemple l'égalité marquée V,

$$V \ldots \quad bxx = 2aby + yy.$$

Et qu'on veüille y appliquer la Regle que j'ay donnée icy pour trouver sur l'axe des y les foyers de toutes les Courbes que fournit cette égalité, on aura d'abord $s = \frac{bxx}{ab+cy}$ pour les soûtangentes.

Ces deux égalités étant comparées à la formule N du premier article pour faire évanoüir les inconnuës, on trouvera, après que s & le quarré yy auront disparu, la résultante que l'on voit icy en S.

$$\begin{array}{llll} S \ldots & + cnnbxx & - 2nnbcvy & + nnbcvv = 0. \\ & + nnbbx & + 2mmbcvy & - mmbcvv \\ & - mmbbxx & + 2mmbcvy & + 2mmabcv \\ & - 2bcmmxx & - 2anabby & - mmaabc \\ & - mmccxx & + 2mmabby & \\ & & + 2mmabcy & \end{array}$$

Où l'inconnuë y ſe trouve encore Ainſi il faudroit pourſuivre ſon évanoüiſſement pour avoir une réduite dans laquelle il n'y eût que x & v comme au quatriéme article. Mais ſi l'on ne veut que le cas du troiſiéme article, il n'y a qu'à diſtribuer tous les monomes de cette égalité hors ceux dont v eſt la ſeule inconnuë, & ceux auſſi qui ne renferment aucune des inconnuës, pour en former un problême auxiliaire comme on l'a fait dans l'inverſe generale des tangentes, & comme on le voit icy en *C*.

$$C. \begin{cases} +nncb+nnbb-mmbb-2mmbc-mmcc = \text{pour les } xx. \\ -2nnbc+2mmbc+2mmcc = 0 \ldots \text{pour les } vy. \\ -2nnabb+2mmabb+2mmabc = 0 \text{ pour les } y. \end{cases}$$

Prenant a, b, c, pour les inconnuës du problême auxiliaire qu'expriment ces trois égalités, on trouvera d'abord $c = \frac{nnb-mmb}{mm}$ qui réſout entierement ce problême ; & ſubſtituant cette valeur de c dans *S*, cette égalité *S* aura la forme que l'on voit ici en *A*.

$$A \ldots nnbcvv - mmbcvv + 2ammbcv - mmbcaa - 0.$$

Dans laquelle on trouve $v = \frac{am}{m \pm n}$ qui donnne ſur l'axe des y tous les foyers des Courbes propoſées qui ſont des points geometriques. Et ſubſtituant auſſi la valeur de c dans la propoſée *V*, on aura la réſultante qui eſt marquée *T* dans la ſixiéme Remarque. Enſorte que cette égalité *T* renferme toutes les Courbes du premier genre dont les foyers ſont des points geometriques ſur l'axe des y, & delà auſſi on voit que les valeurs de v priſes dans *D* donnent tous ces foyers.

Mais pour l'univerſalité de methode il faut pourſuivre l'évanoüiſſement de y juſqu'à ce qu'il ait entierement diſparu, & ſuppoſer que le dernier terme des x eſt égal à 0, comme on l'a dit au quatriéme article de la methode ; de maniere que l'égalité ainſi formée n'aura que la ſeule inconnuë v.

Comme cette égalité ſe réſout entierement par la diviſion, il n'eſt pas neceſſaire d'y appliquer la methode des indéterminées pour tirer avantage de l'indétermination,

& même l'on trouvera que les racines ne sont pas fort composées. Car ces racines sont comme on les voit icy en *E*.

$$E. \begin{cases} v = \frac{am}{m+n}. & v = \frac{acm + 2abm + 2abn}{-cm - cn}. \\ v = \frac{am}{m-n}. & v = \frac{acm + 2abm - 2abn}{cn - cm} \end{cases}$$

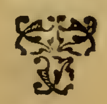
Ensorte que ces quatre valeurs de v donnent tous les foyers de toutes les Courbes du premier genre sur l'axe proposé, soit que ces foyers soient des points geometriques, ou qu'ils soient lineaires.

Si l'on veut les foyers du cercle, il est évident que dans ce cas l'égalité proposée en *V* devient $xx = 2ay - yy$, & que par consequent il faut faire $b = -c$ pour substituer cette valeur de b dans les formules. Ce qui donne $v = \frac{am}{m \pm n}$, & $v = \frac{am - 2an}{m - n}$ pour les foyers du cercle.

Pour la parabole on aura $c = 0$, & par consequent $v = \frac{am}{m \pm n}$ & $v = \infty$ pour ces foyers.

On aura les foyers de l'hyperbole en prenant un nombre positif pour $\frac{c}{b}$, & l'on trouvera ceux de l'Ellipse si l'on prend pour $\frac{c}{b}$ un nombre negatif plus grand ou plus petit que l'unité; ensorte que la substitution de ces valeurs dans *E* donnera les foyers sur l'axe proposé, & que la substitution de ces valeurs dans l'égalité *V* determinera l'espece des hyperboles & des Ellipses ausquelles ces foyers conviennent.

Jusques-icy j'ay pris le mot de foyers selon l'idée la plus ordinaire des Geometres, & selon cette idée l'on peut voir que toutes les Courbes ont des foyers finis ou infinis.



PRINCIPES GENERAUX POUR LA RESOLUTION DES EQUATIONS NUMERIQUES.

PAR M. DE LAGNY.

SECONDE PARTIE.

La premiere Partie est dans les Memoires de l'Academie de l'année 1705. page 277.

1706. 21. Juillet.

RESoudre une équation numerique, c'est trouver la valeur ou les valeurs de l'inconnuë en nombres entiers lorsque cette valeur ou ces valeurs sont rationelles, & les trouver à moins d'une unité près, lorsqu'elles sont irrationelles.

Je suppose ces équations sans incommensurables & sans fractions, parce qu'il est toujours aisé de leur donner cette forme par les regles ordinaires.

Résolution reguliere est celle qui se fait par une methode reglée universelle & infaillible. Cette methode est d'autant plus parfaite qu'elle est plus courte & plus simple. C'est pourquoy, si par une certaine methode je trouve le nombre cherché deux ou trois fois plutôt que par une autre, la premiere methode est deux ou trois fois plus parfaite ou meilleure que la seconde.

De quelque methode qu'on se serve, on ne peut trouver que par parties & l'une après l'autre le nombre cherché, lorsqu'il est grand. J'appelle ces parties, le premier, le second, le troisiéme, &c. membre de la racine. Ainsi dans l'extraction des racines quarrées, cubiques, &c. suivant l'expression ordinaire des chifres fondée sur la progression décuple, si la racine cherchée est par exemple 8673, on trouve d'abord le premier chifre, 8, c'est-à-dire le premier membre, 8000; & par le moïen de celui-ci on trouve le second, 6 ou 600; & par la somme de ces deux premiers membres 86 ou 8600 considerés comme un seul membre, on

on trouvera le troisiéme, 7 ou 70; enfin par la somme des trois premiers membres trouvés, 867 ou 8670 considerés comme un seul membre, on trouve le quatriéme & dernier membre 3, ce qui donne la racine entiere cherchée, 8673.

Comme ces regles sont fondées sur le choix arbitraire, ou plutôt capricieux, de la progression décuple, elles se sentent de ce défaut, & elles ne peuvent être aussi parfaites que des regles fondées uniquement sur la raison & la nature même des équations indépendemment de toute expression arbitraire. Le premier & le plus grand défaut de toutes les methodes qu'on a données jusqu'à present est le tatonnement. Rien ne fatigue & ne rebute tant que de travailler à l'aveugle; & quoique le nombre des tatonnemens soit reglé, il est constant par l'experience de tous ceux qui se mêlent de calcul, qu'il y a un espece de chagrin & d'affliction d'esprit inséparables du mauvais succès de l'operation, lorsqu'après avoir suivi exactement les regles on trouve qu'on a pris trop ou trop peu, & qu'il faut recommencer le calcul tout de nouveau. C'est, pour ainsi dire, se tromper avec art & methode: toute operation où il entre du tatonnement est indigne du nom d'operation mathematique ou scientifique. On n'a, pour s'en convaincre, qu'à comparer les operations geometriques à celles de l'Arithmetique ordinaire. Que penseroit-on de la résolution d'un problême geometrique, où il faudroit tatonner & recommencer plusieurs fois la même operation avant que d'être assuré qu'on eût bien operé? Je fais également abstraction des erreurs de fait, & je ne parle que de celles qui sont essentielles à la methode.

Le principal avantage de mes logarithmes est d'exclure absolument tout tatonnement des operations arithmetiques, c'est-à-dire, de la division & de l'extraction des racines qui y sont essentiellement sujettes dans l'Arithmetique ordinaire, & le principal avantage de ma nouvelle methode de résoudre les équations est aussi d'en exclure tout tatonnement.

Il faut remarquer qu'au lieu d'une eſpece de tatonnement qui ſe trouve dans la diviſion ordinaire, il y en a pluſieurs eſpeces plus difficiles & plus embarraſſantes dans l'extraction des racines, à meſure qu'on les tire d'une puiſſance plus élevée, ou que l'équation eſt compoſée d'un plus grand nombre de termes affectés de ſignes differens.

Dans l'extraction de la racine quarrée, outre les tatonnemens eſſentiels à la diviſion, il y en a une nouvelle eſpece de plus, parceque le diviſeur qui devroit & qui ne peut pas être $2ab + b$, car c'eſt b qu'on cherche, eſt ſeulement $2a + 1$; ainſi il ne ſuffit pas de trouver par les tatonnemens ordinaires de la diviſion le plus grand quotient qui multiplié par $2a + 1$ produiſe $2ab + b$, tel que ce produit puiſſe être ôté du dividende correſpondant, il faut qu'on en puiſſe ôter $2ab + bb$. Je ſuppoſe b plus grand que 1.

Dans l'extraction de la racine cubique le diviſeur devroit & ne peut pas être $3aa + 3ab + bb$, parceque c'eſt b qu'on cherche, & on ne peut prendre univerſellement pour diviſeur que $3aa + 3a + 1$; c'eſt-pourquoi le tatonnement eſt plus grand que dans la racine quarrée: car il ne ſuffit pas de pouvoir ôter du dividende $3aab + 3ab + 1b$, il faut en pouvoir ôter $3aab + 3abb + b^3$, ainſi du reſte. Je ſuppoſe toûjours b plus grand que 1.

En un mot dans l'extraction des racines le diviſeur eſt toûjours trop petit & imparfait, & d'autant plus imparfait que la racine cherchée eſt celle d'une puiſſance plus élevée.

C'eſt encore toute autre choſe dans l'extraction numerique des racines des équations compoſées. Car le grand nombre des termes, le rapport different des coëfficiens, & le melange des ſignes + & — qui ſe détruiſent en partie, cauſe neceſſairement une très-grande incertitude dans les operations, & les tatonnemens s'y trouvent en plus grand nombre, plus pénibles, plus rebutans & plus ſujets à erreur.

Le ſecond défaut des anciennes methodes vient du

choix arbitraire de la progreſſion décuple, qui fixe le rapport du premier membre d'une racine cherchée au ſecond, & celui du ſecond au troiſiéme, & ainſi de ſuite ſans aucune raiſon & contre la nature de l'équation ; ce qui rend en general la réſolution plus longue & plus imparfaite.

Comme il s'agit de détruire un préjugé également ancien & general, je vais tâcher de rendre ſenſible ce défaut dont perſonne, que je ſache, ne s'eſt apperçû.

Je ſuppoſe qu'on veüille trouver le rapport du rayon au côté de l'octodecagone. J'appelle le rayon a & le côté x, j'aurai cette équation à réſoudre,

$$x^3 = 3aax - a^3.$$

Et ſuppoſant le rayon $a = 100000.000$, j'aurai cette équation numerique,

$$x^3 = 300000.00000.00000.0x - 100000000.00000000.00000000.$$

Ou pour abreger l'expreſſion,

$$x^3 = 30^{16}x - 10^{24}.$$

Il faut trouver la petite valeur d'x.

Si l'on ſuit les methodes ordinaires de Viete, d'Harriot, d'Ougtred, &c. on trouvera $x = 34729.635$.

La premiere operation donnera le premier chifre 3, & celui-ci par une ſeconde operation plus longue que la premiere donnera le ſecond chifre 4. Ces deux joints enſemble & faiſant 34 donneront par une troiſiéme operation beaucoup plus longue que la ſeconde le troiſiéme chifre 7, & ces trois joints enſemble faiſant 347 donneront par une quatriéme operation incomparablement plus longue que les trois autres le quatriéme chifre 2, & ainſi de ſuite ; enſorte qu'il y a toûjours autant d'operations à faire que de chifres à trouver dans la racine, & que la difficulté de les trouver augmente continuellement à chaque operation.

Mais ſuivant ma methode on trouvera,

Pour premier membre $\frac{1}{3}a = 33333.333\frac{1}{3}$
Pour le ſecond . . . $\frac{1}{72}a = 1388.888\frac{8}{9}$
Pour le troiſiéme . $\frac{7}{984744}a = \ldots 7.413 +$
Somme . . . . . $= 34729.635 +$

Il eſt évident que cette derniere methode eſt incomparablement plus abregée que la premiere.

Le troiſiéme défaut eſt d'exprimer les valeurs des racines des équations numeriques par des formules irrationelles qui ſont ou tout-à-fait inutiles, n'étant qu'une pure petition de principe, ou qui donnent des valeurs de l'inconnuë plus obſcures & plus intelligibles après cette prétenduë réſolution qu'auparavant.

Si l'on demande la valeur de x dans l'équation $xx = 7056$ & qu'on réponde, x eſt égal à la racine quarrée de 7056. $x = \sqrt{7056}$, c'eſt certainement très-mal répondre ; car c'eſt une pure petition de principe, & je n'en ſuis pas plus avancé : il faut répondre, x eſt égal à 84, & ſi l'équation eût été $xx = 7200$, il auroit fallu répondre x eſt irrationelle & ſa valeur eſt entre 84 & 85. Il eſt vrai qu'il faut encore pouvoir approcher à l'infini de la veritable valeur en fractions ; car une équation numerique n'eſt parfaitement réſoluë que lorſqu'on donne toutes les valeurs poſſibles rationnelles en nombres, & qu'on peut approcher à l'infini des valeurs irrationelles ; tout le reſte eſt chimerique.

Soit l'équation du ſecond degré $xx + 54876x = 384181$. ſi l'on répond ſuivant la formule irrationelle ordinaire $xx + ax = bb$ qui donne $x = \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb} - \frac{1}{2}a$; ſi, dis-je, l'on répond $x = \sqrt{753.228.025} - 27438$, on aura très-mal répondu & très-mal operé, car la racine eſt 7 ; & au lieu du grand & pénible détour qu'il faut prendre ſuivant la formule, je n'ai qu'à comparer le coëfficient d'x qui eſt 54876 comme diviſeur à l'homogene de comparaiſon, 384181, je vois qu'en 38 qui ſont les deux premiers chifres du dividende 5 premier chifre du diviſeur y eſt 7 fois, & je me détermine à prendre 7, parce que comptant les chifres du coëfficient comme côté, & ceux de l'homogene comme plan, je trouve cinq tranches dans le premier, & trois ſeulement dans le ſecond, ce qui marque que le coëfficient eſt le terme dominant, & dans tous les cas ſemblables on peut & on doit operer de même. Après avoir trou-

vé 7 je le multiplie par le coëfficient, 54876, & j'ajoûte au produit qui est 384132 le quarré de 7 qui est 49, & la somme 384181 se trouve égale à l'homogene de comparaison ; & s'il se fût trouvé un peu plus grand ou plus petit d'un nombre moindre que le coëfficient, la racine auroit été irrationelle, & on auroit pû approcher à l'infini de sa valeur suivant les methodes que j'ai données dans mon Traité de l'Extraction & de l'Aproximation des racines.

Cette remarque du terme *dominant* qui fait regarder xx comme nul, abrege l'operation indéfiniment ; ensorte qu'on résoudra dans un moment une équation qu'on ne pourroit pas résoudre par les formules ordinaires dans un jour entier de calcul. Car il est aisé de comprendre que quelque petite que soit la valeur cherchée, elle peut être multipliée par un nombre indéfiniment grand, & le produit augmenté ou diminué du quarré de cette même valeur sera égal à un homogene indéfiniment grand, ce qui demande suivant la formule une suite d'operations indéfiniment longues ; ce qu'on évitera par le moyen de cette remarque qui s'applique également à la formule $-xx+ax=bb$.

Ceci paroît encore plus sensiblement dans la troisiéme formule $xx-ax=bb$; car lorsqu'ax est le terme dominant, il n'y a qu'à supposer $x=a+\frac{bb}{a}$. Par exemple, soit l'équation proposée $xx-54876x=384181$, il n'y a qu'à supposer $x=54876+\frac{384181}{54876}\{7$ ou 54883 ; & lorsque bb est plus petit que a, il n'y a qu'à supposer bb nul, & l'on aura x égal à a pour valeur approchée.

Lorsque l'homogene au contraire est le terme dominant, on peut negliger le coëfficient, & ne faire qu'une simple extraction de racine de l'homogene.

L'on ne doit donc se servir de la methode ordinaire que lorsqu'il n'y a aucun terme qui domine sensiblement, encore y auroit-il beaucoup d'autres remarques à faire pour trouver la valeur ou les deux valeurs cherchées le plus promptement qu'il soit possible dans chaque cas.

Mais dans les équations du second degré si le chemin qu'on tient en suivant les formules est souvent trop long & trop pénible, on a du moins l'avantage d'être assûré qu'on arrivera au but. C'est ce qui ne se trouve pas dans les équations du troisiéme & du quatriéme degré, dont la plus grande partie est absolument inexprimable, & le reste est exprimé d'une maniere si obscure & si embarassée, qu'il vaudroit beaucoup mieux laisser l'équation dans l'état où elle est proposée, que de la résoudre de cette maniere. Je dis que la plus grande partie est absolument inexprimable, parce que toute expression où il entre des nombres imaginaires, chimeriques & contradictoires doit passer pour nulle, puisqu'elle ne peut servir à trouver la valeur cherchée de la racine; & il faut remarquer qu'on ne tombe dans ces imaginaires que par le mauvais choix qu'on fait d'un terme non dominant comme s'il étoit dominant, & qu'il dût servir principalement à trouver la racine, au lieu qu'on auroit dû s'attacher à un autre terme. C'est ce que je vais tâcher d'expliquer à fonds.

On peut réduire aux trois formules suivantes toutes les équations du troisiéme degré.

$$x^3 = ax + b$$
$$x^3 = ax - b$$
$$x^3 = -ax + b$$

Je n'examine pas ici si cette réduction est le meilleur & le plus court chemin pour résoudre ces équations; car ce qui est le plus simple & le plus commode à retenir pour le Lecteur, ou le plus aisé à traiter pour l'Auteur, n'est pas toûjours le plus facile pour le Calculateur. C'est pourtant ce qu'on devroit avoir uniquement en vûë.

Dans la premiere formule $x^3 = ax + b$ le nombre des équations qu'on peut former en entier sur une même valeur est déterminé. Par exemple, si je suppose x égal à 100, je pourrai former toutes les équations suivantes, à commencer par $x^3 = 0x + 1000000$ exclusivement.

$$x^3 = 1x + 999.900$$
$$x^3 = 2x + 999.800$$

$x^3 = 3x + 999.700$

&c. = &c. + &c.

Premiere Epoque. $x^3 = 300x + 970.000$

$x^3 = 301x + 969.900$

$x^3 = 302x + 969.800$

&c. = &c. + &c.

Seconde Epoque. $x^3 = 7500x + 250000$

$x^3 = 7501x + 249.900$

$x^3 = 7502x + 249.800$

&c. = &c. + &c.

Troisiéme Epoque. $x^3 = 9800x + 20000$

$x^3 = 9801x + 19900$

$x^3 = 9802x + 19800$

&c. = &c. + &c.

& finir par $x^3 = 10000x + 0$ exclusivement.

Le nombre des équations possibles est donc égal au quarré de l'inconnue moins un.

L'homogene de comparaison est le terme dominant depuis $x^3 = 1x + 999900$ jusqu'à $x^3 = 7500x + 250000$, & il est tellement dominant que jusqu'à $x^3 = 300x + 970000$ qui est la premiere Epoque, c'est-à-dire jusqu'à ce que le coëfficient soit triple de la racine, il suffit de tirer la racine cubique prochainement plus grande de cet homogene pour avoir la valeur cherchée. Ainsi pour résoudre cette équation $x^3 = 200x + 980.000$ je neglige $200x$, & je tire simplement la racine cubique de 980000 prochainement plus grande, & c'est 100.

Dans l'équation $x^3 = 7500x + 250000$ qui est la seconde Epoque, & où le coëfficient est égal au trois quarts du quarré de la racine, & l'homogene égal au quart du cube de cette même racine : ces deux termes dominent dans une parfaite égalité, ou plutôt aucun des deux ne domine, & l'on peut également trouver la racine ou par l'extraction de la racine quarrée des quatre tiers du coëfficient, ou par l'extraction de la racine cubique du quadruple de l'homogene. Jusques-là le cas est reductible suivant la formule de Tartalea $x^3 = ax + b$.

Donc $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}bb - \frac{1}{27}a^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}b - \sqrt{\frac{1}{4}bb - \frac{1}{27}a^3}}$.

Mais cette formule a deux ou trois défauts: Le premier d'engager inutilement à plusieurs extractions de racines quarrées & cubiques, lorsqu'on peut en plusieurs cas ne faire qu'une seule extraction de racine cubique, comme je viens de le faire voir dans l'équation $x^3 = 200x + 980000$.

Le second de donner sous une formule irrationelle des valeurs rationelles, ce qui oblige après un long calcul de verifier par la substitution si la racine rationelle trouvée est exacte, & ce défaut ne se trouve pas dans le second degré.

Le troisiéme défaut est que l'expression de la racine est si peu naturelle, si obscure & si envelopée, qu'elle est en quelque maniere connuë plus distinctement dans l'équation même avant qu'après sa résolution.

En effet soit l'équation $x^3 = 6x + 464$, dont la racine 8 est exprimée suivant la formule par $\sqrt[3]{232 + \sqrt{53816}} + \sqrt[3]{232 - \sqrt{53816}}$. Je dis & je soûtiens que tout esprit attentif & libre de préjugés, apperçoit plus clairement ou plutôt moins confusément la valeur de l'inconnuë $x = 8$ dans l'équation $x^3 = 6x + 464$ que dans la formule $x = \sqrt[3]{232 + \sqrt{53816}} + \sqrt[3]{232 - \sqrt{53816}}$; car dans l'équation il ne s'agit que de trouver un nombre dont le cube soit égal à 464 plus six fois sa racine, au lieu que suivant la formule il faut trouver, 1°. Un nombre dont le quarré soit égal à 53816, c'est-à-dire qu'il faut tirer la racine quarrée de ce nombre, ce qui ne se peut faire exactement dans cet exemple. 2°. Il faut après avoir ajoûté la racine trouvée à 232, trouver un second nombre dont le cube soit égal à cette somme. 3°. Après avoir ôté cette même racine de 232, il faut trouver un troisiéme nombre dont le cube soit égal à la difference, & la somme de ces deux derniers nombres fera la racine cherchée. Voilà donc trois nombres inconnus à trouver dans la formule, au lieu d'un

d'un seul qu'il faut trouver dans l'équation : encore est-il impossible de trouver exactement aucun de ces trois nombres dès que le premier 53816 ou en general $\frac{1}{4}bb - \frac{1}{27}a^3$ n'est pas un quarré parfait. Or j'ai démontré dans mes Elemens d'Algebre que ce quarré n'étoit parfait qu'en autant d'équations que la moitié de la racine contient d'unités, c'est-à-dire, que si la racine est 8 comme dans l'exemple ci-dessus, il n'y a que quatre équations où la formule donne la valeur cherchée après une extraction de racine quarrée, une addition, une extraction de racine cubique, une soustraction, une seconde extraction de racine cubique & une addition ; & pour parvenir à cette formule il faut prendre la moitié d'un nombre, la quarrer, prendre le tiers d'un autre nombre & le cuber, & soustraire ce cube du quarré; ce qui fait en tout onze operations dans le cas le plus favorable. Or le nombre des équations possibles étant $xx - 1$, & celui des équations où la formule donne la valeur cherchée sans déguisement étant seulement $\frac{1}{2}x$ lorsque le nombre cherché est pair, ou $\frac{1}{2}x - 1$ lorsqu'il est impair ; il est évident qu'il y a une infinité plus de cas où la formule donne la valeur de la racine déguisée, qu'il n'y en a où elle la donne pure & simple telle qu'elle est. Car $\frac{1}{2}x$ ou $\frac{1}{2}x - 1$ est un infiniment ou indéfiniment petit par rapport à $xx - 1$: Mais, dira-t-on, quelque déguisée ou envelopée que soit la valeur de la racine elle est exacte & tout y est connu, au lieu que dans l'équation le raport de la racine ou de son cube à un nombre donné n'est pas immediatement connu, & ce rapport est mêlé & composé avec le rapport du coëfficient multiplié par la racine même. Je répons,

1°. Que c'est une erreur & un préjugé de croire que la racine est connuë lorsqu'on en connoît le quarré, le cube ou telle autre puissance qu'on voudra. On ne connoît cette racine qu'après l'extraction faite, & il y a une infinité de cas où cette extraction est imparfaite.

2°. Je conviens que cette équation $x^3 = 464$ est plus simple & plus aisée à résoudre que celle-ci $x^3 6x + 464$.

Mais cette derniere toute ſeule, quoiqu'affectée d'un terme moïen, me paroît plus ſimple, plus connuë, ou pour ainſi dire plus connoiſſable que ces trois-ci jointes enſemble $yy=53816$, $z^3=232+y$, & $u^3=232-y$; d'où réſulte $x=z+u$ ſuivant la formule, ou ſi l'on veut $x=2t$, & $t^3+3rrt=232$, & $r^3+3ttr=\sqrt{53816}$.

Depuis la ſeconde Epoque $x^3=7500x+250000$ juſqu'au dernier cas $x^3=10000x+0$ excluſivement, c'eſt ce qu'on appelle le cas irreductible, parce qu'il ne peut pas être réſolu ſuivant la formule de Tartalea : le terme dominant eſt le coëfficient, & il eſt tellement dominant depuis la troiſiéme Epoque $x^3=9800x+20000$, qu'on peut abſolument negliger l'homogene de comparaiſon, & tirer ſimplement la racine quarrée approchée du coëfficient pour avoir la racine cherchée en y ajoûtant une unité. Cette Epoque commence à l'endroit où l'homogene de comparaiſon eſt égal au double du quarré de la racine, & le coëfficient égal au quarré de cette racine moins le double de cette même racine ; ainſi pour réſoudre cette équation $x^3=9801x+19900$, je tire la racine quarrée de 9801, comme ſi j'avois ſeulement $x^3=9801x$ ou $xx=9801$, la racine eſt 99 que j'augmente d'une unité, la ſomme 100 eſt la racine cherchée.

Je donnerai la methode generale de réſoudre toutes ces équations, & principalement celles qui ſont compriſes entre la ſeconde & la troiſiéme Epoque qui ſont les ſeules difficiles.

Dans la ſeconde formule $x^3=ax-b$, ſuppoſant toûjours $x=100$, on peut former cette ſuite infinie d'équations, à commencer par $x^3=10000x-0$ excluſivement.

$x^3=10001x-100$
$x^3=10002x-200$
&c. = &c. — &c.

Premiere Epoque. $x^3=10200x-20000$

Où la racine quarrée du coëfficient commence à être plus grande d'une unité que la racine cherchée.

$x^3=10201x-20100$
$x^3=10202x-20200$
&c. = &c. — &c.

Seconde Epoque. $x^3 = 30000x - 2000000$. Point de partage où le coëfficient 30000 est le triple du quarré de la racine, & l'homogene 2000000 est le double de son cube.

Jusqu'ici le nombre 100 est la plus grande valeur d'x, après quoi il devient la plus petite.

$x^3 = 30001x - 2000100$

$x^3 = 30002x - 2000200$

&c. = &c. — &c.

Troisiéme Epoque. $x^3 = 30300x - 2030000$

Où le coëfficient surpasse le triple du quarré du triple de la racine, & où les deux valeurs commencent immediatement après à se surpasser d'une unité.

$x^3 = 30301x - 2030100$. Les deux valeurs sont 100 & 101.

$x^3 =$ &c. — &c.

$x^3 = 30604x - 2060400$ Les deux valeurs sont 100 & 102.

$x^3 =$ &c. — &c.

$x^3 = 89869x - 7986900$. Les deux valeu sont 100 & 237.

&c. = &c. — &c.

& ainsi de suite à l'infini.

Ces racines ont donc un terme fixe de petitesse, & n'en ont aucun de grandeur.

Le nombre des équations possibles pour la même & plus grande racine est égal au double du quarré de l'inconnuë dans l'exemple ci dessus, c'est depuis $10001x$ jusqu'à $30000x$. Le coëfficient commence dans la seconde formule là où il finit dans la premiere.

Enfin dans la troisiéme formule $x^3 = b - ax$ le nombre des équations est absolument infini,

à commencer par $x^3 = 1000000 - 0x$ exclusivement.

$x^3 = 1000100 - 1x$

$x^3 = 1000200 - 2x$

$x^3 =$ &c. — &c.

Epoque où la racine cubique de l'homogene commence à être plus grande d'une unité que la racine cherchée.

$x^3 = 1030300 - 303x$

$x^3 = 1030400 - 304x$

$x^3 = 1030500 - 305x$

$x^3 = 1030600 - 306x$

$x^3 =$ &c. — &c. & ainsi de suite à l'infini.

Cette derniere formule peut être pleinement resoluë par la regle de Tartalea, ainsi je ne m'y arrêterai pas.

Il y a donc le quart des équations de la premiere formule qui est dans le cas irreductible, & la seconde formule y est toute entiere suivant ce que j'ai démontré dans mes Elemens d'Arithmetique & d'Algebre. J'ajoûterai ici que du quart irreductible de la premiere formule

qui tombe dans les imaginaires, il y en a autant d'imaginaires rationels que la douziéme partie du quarré de l'inconnuë contient d'unités dans sa racine ; ainsi l'inconnuë étant 100, son quarré est 10000 ; & la douziéme de ce quarré est $833 \frac{1}{3}$, dont la racine approchée en entiers est 28 : c'est-pourquoi je dis qu'on pourra former 28 équations dans cette premiere formule du troisiéme degré où les imaginaires seront rationels, & pas davantage : ce seront les équations où x est égal à

$$\underline{50 + - 1} + \underline{50 - - 1}$$
$$\underline{50 + - 2} + \underline{50 - - 2}$$
$$\underline{50 + - 3} + \underline{50 - - 3}$$
$$\&c. \quad + \quad \&c.$$
$$\underline{50 + - 28} + \underline{50 - - 28}$$

Cette remarque quoiqu'assez curieuse par rapport à la Theorie n'est d'aucun usage dans la pratique, parce qu'on connoît aussi peu la valeur des imaginaires rationaux que celle des irrationaux.

Dans la seconde formule $x^3 = ax - b$ il y a toûjours deux racines positives & une negative qui est la somme des deux positives, & cette racine negative devient la seule positive de l'équation $x^3 = ax + b$ & au contraire les deux racines negatives de celle-ci sont les deux positives de l'autre.

L'ordre veut qu'on cherche toûjours la petite racine la premiere comme la plus facile à trouver ; mais dès qu'on en connoît une, on trouvera aisément l'autre par cette formule.

Soit c une des racines de l'équation $x^3 = ax - b$, l'autre sera $\sqrt{a - \frac{3}{4} cc} - \frac{1}{2} c$. Par exemple,

Soit l'équation $x^3 - 19x - 30$. Soit $19 = a$, & qu'une des valeurs d'x donnée soit $2 = c$; donc $\sqrt{a - \frac{3}{4} cc} - \frac{1}{2} c = \sqrt{19 - 3} - 1 = \sqrt{16} - 1 = 4 - 1 = 3$ seconde valeur cherchée.

Et au contraire soit la valeur donnée $3 = c$, on aura $\sqrt{a - \frac{3}{4} cc} - \frac{1}{2} c = \sqrt{19 - 6 \frac{3}{4}} - 1 \frac{1}{2} = \sqrt{12 \frac{1}{4}} - 1 \frac{1}{2} = 3 \frac{1}{2} - 1 \frac{1}{2} = 2$ valeur cherchée.

Pour le démontrer il n'y a qu'à former l'équation des trois racines.

$x - c = o$,

$x - d = o$,

$x + c + d = o$, l'on trouvera $d = \sqrt{a - \frac{3}{4}cc} - \frac{1}{2}c$, & réciproquement $c = \sqrt{a - \frac{3}{4}dd} - \frac{1}{2}d$.

Je commence par résoudre la seconde formule $x^3 = ax - b$, parce qu'elle est toute entiere dans le cas irreductible, & que par cette raison elle a toûjours été regardée comme la plus difficile, & qu'elle est d'ailleurs la plus utile par rapport à la trissection de l'angle qui s'y réduit.

REGLE GENERALE.

Soit l'équation donnée $x^3 = ax - b$.

RESOLUTION UNIVERSELLE EN LETTRES

1°. $x = \frac{b}{a} = c$ & $a - cc = d$.

2°. $x = c + \frac{b - cd}{a - 3cc} = e$ & $a - ee = f$.

3°. $x = e + \frac{b - ef}{a - 3ee} = g$ & $a - gg = h$, & ainsi de suite.

REMARQUE I.

On abregera la seconde équation en prenant $c + \frac{c^3}{a - 3cc}$ au lieu de $c + \frac{b - cd}{a - 3cc}$; car $c^3 = b - cd$ puisque $d = a - cc$ & $c = \frac{1}{a}$.

REMARQUE II.

Lorsqu'on ne veut pas negliger les fractions, on aura,

1°. $\frac{b}{a}$ premier membre de la racine.

2°. $\frac{b^3}{a^3 - 3bb \times a}$ second membre & $\frac{b}{a} + \frac{b^3}{a^3 - 3bb \times a} - \frac{a^3 - 2bb \times b}{a^3 - 3bb \times a} = \frac{c}{d}$.

3°. $\frac{bd - ac \times dd + c^3}{add - 3cc \times d}$ troisiéme membre, & $\frac{c}{d}$ + ce troisiéme membre $= \frac{e}{f}$.

4°. $\frac{bf - aexff + e^3 l}{aff - 3eexf}$ quatriéme membre, & ainsi de suite.

REMARQUE III.

Il faut que a^3 soit égal ou plus grand que $\frac{1}{4}bb$, autrement l'équation seroit impossible suivant ce qui a été démontré par Schooten & plusieurs autres. Dans le cas d'égalité $\frac{1}{27}a^3 = \frac{1}{4}bb$ on aura $x = \sqrt{\frac{1}{3}a} = \sqrt{\frac{1}{2}b}$. Dans le cas d'inégalité la racine sera d'autant plus aisée à trouver que a^3 aura un plus grand rapport à bb.

RESOLUTION EN NOMBRES.

Je suppose que a & b sont les nombres entiers, & qu'on cherche la valeur d'x en nombres entiers.

1°. Prenez en nombres entiers prochainement plus grands les valeurs de tous les quotiens $\frac{b}{a}$, $\frac{b - cd \text{ ou } c^3}{a - 3cc}$, $\frac{b - ef}{a - 3ee}$, &c.

2°. Dès que le produit cd ou ef &c. se trouvera égal à b, la question est résoluë, & on aura la valeur exacte d'x en entiers.

3°. Dès que ce produit cd ou ef &c. ayant été plus petit que b dans l'operation précedente se trouve plus grand dans la suivante, la question est aussi résoluë, la valeur d'x est irrationelle, & on a sa valeur en entiers à moins d'une unité près.

4°. Lorsque ce produit approche fort de la valeur de b, on peut prendre pour diviseur $a - 3cc - 2c - 1$ au lieu de $a - 3cc$, ce qui épargnera quelquefois une opération.

5°. Au lieu de prendre d'abord $\frac{b}{a}$ on peut prendre telle valeur plus grande en entiers qu'on voudra, pourvû qu'elle soit plus petite que la valeur d'x ; ce qui se connoîtra aisément par le rapport des $b - cd$ ou c^3 comparé au diviseur $a - 3cc$.

6°. Lorsque les nombres a & b sont tels qu'un même nombre qui mesure a par son quarré, mesure b par son cube, on pourra réduire l'équation en moindres termes.

Ainsi $x^3 = 300x - 2000$ se réduit à $y^3 = 3y - 2$, & pour lors $x = 10y$. Cette remarque est generale pour toutes les équations.

7°. On peut couper a en tranches de deux chifres, & b en tranches de trois chifres de droit à gauche, & operer d'abord seulement sur la premiere tranche de l'un & de l'autre; car on abregera par-là l'operation par raport au premier membre de la racine lorsqu'elle est fort grande.

8°. Lorsque $3cc$ ou $3ee$ &c. se trouvent plus grands que a, l'équation est impossible.

9°. Lorsque la racine est irrationelle on la trouvera en entier à moins d'une unité près, & on pourra en approcher à l'infini en fractions.

I. EXEMPLE.

Soit $x^3 = 52416x - 1244160$.

C'est l'exemple d'Harriot, pages 146, 147 & 148 de son Exegetique numerique.

J'ay donc $a = 52416$
$b = 1244160$

Donc $\frac{b}{a} = \frac{1244160}{52416} = 23 +$. Je prends suivant la regle ci-dessus, article premier, le nombre 24 pour premier membre de la racine, je le quarre, c'est $576 = cc$ que j'ôte de $52416 = a$, & j'ai $a - cc = 51840 = d$ que je multiplie par le même $24 = c$. le produit est 1244160 qui se trouve $= b$; d'où je conclus suivant l'article second de la même regle que la racine cherchée est 24.

Pour trouver la seconde racine je prends la moitié de 24. c'est 12 que je quarre, c'est 144 que je triple, c'est 432 que j'ôte de 52416, il reste 51984 dont la racine quarrée est 228 dont j'ôte le même 12, le reste 216 est la seconde racine cherchée.

La methode d'Harriot & de Viete demande trois pages *in folio* de calcul.

II. EXEMPLE.

Soit l'équation $x^3 = 3x - 1$, ou $x^3 = 300x - 1000$, ou

$x^3 = 30000x - 2000000$ &c. qui sont des équations geometriquement semblables du côté de l'octodecagone, dont le rayon est 1 ou 10 ou 100 &c.

J'aurai 1°. $\frac{b}{a} = \frac{1}{3} = 3\frac{1}{3}\ 33\frac{1}{3}$ &c. premier membre.

2°. $\frac{c^3}{a - 3cc} = \frac{b^3}{a^3 - 3bxa} = \frac{1}{72} = 013\frac{8}{9}$ &c. second membre.

3°. $\frac{bd - ac \times dd + c^3}{add - 3cc \times d} = \frac{73}{984744} = 00007413 +$ troisiéme membre, ce qui donne pour le côté cherché 34729. 635 + &c.

REMARQUE.

On peut toûjours preparer l'équation par cette formule de la bissection de l'angle $4xx - \frac{x^4}{aa} = bb$ dans laquelle a represente le rayon, b la corde de l'arc double, & x la corde de l'arc simple; on peut, dis-je, préparer l'équation de maniere que la résolution soit aussi prompte & même plus prompte que celle-ci.

Soit l'équation donnée dans le cas irreductible de la premiere formule $x^3 = aax + b$.

FORMULE UNIVERSELLE.

$$x = a + \frac{b}{2aa} - \frac{cd - b}{3cc - aa} - \frac{ef - b}{3ec - aa} \text{ \&c.}$$

$a + \frac{b}{2aa} = c.$

$cc - aa = d.$

$ee - aa = f.$

&c.

c'est-à-dire, que le premier membre de la racine est $a + \frac{b}{2aa} = c$ trop grand. On suppose ensuite $cc - aa = d$, & le second membre negatif ou à soustraire est $\frac{3cc - aa}{cd - b}$. Soit ensuite $c - \frac{cd - b}{3cc - aa} = e$, & $ee - aa = f$. Le troisiéme membre à soustraire est $\frac{ef - b}{3ee - aa}$, & ainsi de suite jusqu'à

ce

ce qu'on trouve une racine exacte en entier ou une racine approchée à moins d'une unité près lorsque cette racine est irrationelle.

EXEMPLE.

Soit l'équation donnée $x^3 = 7569x + 243100$, j'ai donc $aa = 7569$ & $a = 87$ & $b = 243100$.

$a + \frac{b}{2aa} = 87 + \frac{243100}{15138}$ { 16 — = 103 — = c.

15138

91720

15138

Donc $cc = 10609$ & $3cc = 31827$

$-aa = 7569$ $-aa = 7569$

Donc $cc - aa = 3040 = d$ 24258 ou

multiplié par $c = 103$ $3cc - aa$

9120

3040

produit $cd = 313120$

$-b = 243100$

$cd - b = 70020$ (3 — second membre.

divisé par $3cc - aa = 24258$

Le premier membre est donc 103 & le second — 3, il reste 100 pour la racine que je quarre, c'est 10000 dont j'ôte 7569, il reste 2431 que je multiplie par 100, le produit 243100 est égal à l'homogene b donné ; ainsi 100 est la racine cherchée.

REMARQUE. I.

Pour conserver l'analogie entiere on pourroit supposer,

Le premier membre $= a$ & $aa - aa = 0$

Le second . . . $= -\frac{aa-b}{3aa-aa} = +\frac{b}{2aa}$ & $a + \frac{b}{2aa} = c$.

Le troisiéme . . . $= -\frac{cd-b}{3cc-aa}$ & $c - \frac{cd-b}{3cc-aa} = e$.

Le quatriéme . . $= -\frac{ef-b}{3ee-aa}$, & ainsi de suite.

REMARQUE. II.

Lorsque $cd = b$ ou $cf = b$ &c. la question est résoluë, c'est-à-dire que la racine cherchée est c ou e &c.

REMARQUE III.

On suppose toûjours l'équation preparée à l'ordinaire sans fraction & sans incommensurables, & si l'on veut pour une plus grande facilité sans coëfficient à la haute puissance. Cette derniere préparation n'est pas absolument necessaire, & si l'on avoit $cx^3 = aax + b$, il faudroit prendre pour premier membre au lieu d'a $\frac{\sqrt{aa}}{c}$, ce qui ne change rien à la methode.

REMARQUE IV.

Au lieu de la fraction $\frac{b}{2aa}$ on peut prendre $\frac{b}{2aa+3a+1}$, ce qui abrege un peu en quelques occasions; mais comme $3a+1$ est un infiniment petit à l'égard de la quantité constante $2aa$, on peut le negliger.

REMARQUE V.

Il faut prendre en entiers les quotiens $\frac{b}{2aa}$; $\frac{cd-b}{3cc-aa}$, $\frac{ef-b}{3ee-aa}$, le premier par défaut & les autres par excés.

REMARQUE VI.

On sera surpris que le premier membre de la racine se trouve plus grand que la racine même; mais ce n'est qu'un prejugé, & pourvû qu'on trouve promptement cette racine, il est indifferent que ce soit par addition ou soustraction.

Soit l'équation $x^3 = axx - b$.

On aura pour premier membre $a - \frac{ab}{a^3 - 2b} = c$ & $a - c = d$.

Pour second membre . . . $d - \frac{b - ccd}{3cc - 2ac} = e$ & $a - e = f$.

Pour troisiéme membre . $e - \frac{b - eef}{3ee - 2ae}$ &c. ou bien pour

premier membre a, pour ſecond $-\frac{ab}{a^3-3a}$ &c.

EXEMPLE.

On demande la ſécante de 80 degrés ou des $\frac{2}{9}$ de la circonference du cercle.

Le rayon étant 1 le ſinus de 10^d ou de la $\frac{1}{36}$ partie du cercle eſt la moitié du côté de l'octodecagone, lequel côté eſt la petite racine de l'équation $x^3 = 3x - 1$, & la ſecante de 80^d eſt le double d'une valeur d'y dont $y^3 = 3yy - 1$; & il en eſt de même de toutes les ſecantes dont les arcs ne peuvent être donnez que par la triſſection de l'angle.

J'ai donc $a = 3$ & $b = 1$, & par conſequent $a - \frac{ab}{a3-2b} = 3 - \frac{3}{25} = \frac{72}{25} = c$, donc $cc = \frac{5184}{625}$, donc $a - c = d = 3 - \frac{72}{25} = \frac{3}{25}$, donc $ccd = \frac{15552}{15625}$ que j'ôte de $b = 1$, il reſte $\frac{73}{15625}$ que je diviſe par $3cc - 2ac = \frac{15552}{625} = \frac{432}{25}$, c'eſt-à-dire par $\frac{118800}{15625}$, le quotient eſt $\frac{73}{118800}$ que j'ôte de $\frac{72}{25}$, il reſte $\frac{342071}{118800} = 2.879385^{vi}$ — &c. dont le double 5.758770^{vi} — eſt effectivement la ſecante de 80^d conformément aux Tables.

DEMONSTRATION.

Pour la Formule $x^3 = ax - b$.

Cubez a & quarrez b & diviſez a^3 par bb, ſi le quotient eſt $6\frac{3}{4}$ (il ne peut jamais être moindre ſuivant ce qui a été démontré par Schooten, comme j'ai déja dit ci-deſſus) la racine ſera $\frac{3b}{2a}$. Car ſoit $a = 3cc$ & $b = 2c^3$, on aura l'équation $x^3 = 3ccx - 2c^3$, le cube de $3cc$ eſt $27c^6$ & le quarré de $2c^3$ eſt $4c^6$ & le quotient $\frac{27c^6}{4c^6} = 6\frac{3}{4}$. Or lorſque $x^3 = 3ccx - 2c^3$, il eſt évident que $x = \frac{3b}{2a} = \frac{6c^3}{6cc} = c$; car en ſubſtituant c à la place d'x, on aura $c^3 = 3c^3 - 2c^3 = c^3$.

2°. On démontrera de même que ſi le quotient $\frac{a^3}{bb} = 7\frac{1}{9}$

la racine ou plutôt une des racines sera $\frac{4b}{3a}$, comme si l'équation est $x^3 = 4ccx - 3c^3$, on aura $a = 4cc$ & $b = 3c^3$, & par consequent $a^3 = 64c^6$ & $bb = 9c^6$; donc $\frac{a^3}{bb} = \frac{64c^6}{9c^6} = 7\frac{1}{9}$ & $\frac{4b}{3a} = \frac{12c^3}{12cc} = c$. Il est évident que $x = c$; car en substituant c à la place d'x dans l'équation $x^3 = 4ccx - 3c^3$, on aura $c^3 = 4c^3 - 3c^3 = c^3$.

3°. Si le quotient est $7\frac{13}{16}$, une des racines sera $\frac{5b}{4a}$

Si ce quotient est $8\frac{16}{25}$, on aura pour racine $\frac{6b}{4a}$.

Si ce quotient est $9\frac{19}{36}$, on aura $\frac{7b}{6a}$.

Si ce quotient est $10\frac{22}{49}$, on aura $\frac{8b}{7a}$.

Si ce quotient est $11\frac{25}{64}$, on aura $\frac{9b}{8a}$.

&c.

Et universellement si le quotient $\frac{a^3}{bb} = c + \frac{3c - 8}{c - 3^2}$, ou $= c + \frac{3c - 8}{cc - 6c + 9}$, la racine sera $\frac{c - 2 \times b}{c - 3 \times a}$.

Mais si le quotient ne se trouve pas dans la suite de cette progression, la racine cherchée sera necessairement entre les deux termes prochains de cette même progression; ainsi lorsque ce quotient est 27 comme dans l'équation de l'octodecagone $x^3 = 3x - 1$, ou $x^3 = 12x - 8$, ou $x^3 = 27x - 27$, ou $x^3 = 48x - 64$ &c. $x^3 = 300x - 1000$ &c. la racine cherchée est entre $\frac{25b}{24a}$ & $\frac{24b}{23a}$, parceque lorsque $x = \frac{24b}{23a}$ le quotient $\frac{a^3}{bb} = 26\frac{70}{529}$ & lorsque $x = \frac{25b}{24a}$ le même quotient $\frac{a^3}{bb}$ est égal à $27\frac{73}{576}$ suivant la Formule $c + \frac{3c - 8}{c - 3^2}$ pour le quotient, & suivant la formule $\frac{c - 2 \times b}{c - 3 \times a}$ pour la racine. Ces deux formules commencent par $5\frac{7}{4}$. $6\frac{10}{9}$. $7\frac{13}{16}$. continuant à l'infini. On a donc pour premiers membres de la racine cherchée $\frac{c - 2 \times b}{c - 3 \times a}$; & parceque $c = \frac{a^3}{bb}$ par l'hypothese, la fraction $\frac{3c - 8}{c - 3^2}$ étant un indéfi-

niment petit par raport aux quantités conſtantes a, b, c, ſi l'on ſubſtituë $\frac{a^3}{bb}$ à la place de c dans l'équation $\frac{\overline{c - 2} \times b}{\overline{c - 3} \times a}$, on aura $\frac{a^3 b - 2 b^3}{a^4 - 3 bb}$, ou $\frac{b}{a} + \frac{b^3}{a^4 - 3 abb}$, ou $+ \frac{b^3}{\overline{a^3 - 3 bb} \times a}$. Si l'on ſuppoſe $\frac{b}{a} = c$ (c'eſt une nouvelle valeur de c differente de la formule $\frac{\overline{c - 2} \times b}{\overline{c - 3} \times a}$) & qu'on ſubſtituë cette valeur dans la fraction $\frac{b^3}{\overline{a^3 - 3 bb} \times a}$, on aura pour premiers membres de la racine cherchée cette valeur $c + \frac{c^3}{a - 3 cc}$ qui eſt préciſément la valeur trouvée par la regle. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Pour trouver enſuite les autres membres $e + \frac{b - ef}{a - 3ee}$ &c. je ſuppoſe $c + \frac{c^3}{a - 3cc} = e$, ou $ax - x^3 = b$. Or puiſque e eſt plus petit que x, il s'enſuit neceſſairement que l'homogene de comparaiſon pour $ae - e^3$ ſera plus petit que l'homogene de comparaiſon pour $ax - x^3$, c'eſt-à-dire que le premier ſera plus petit que b. Soit donc $a - ee = f$, il s'enſuit que f eſt plus petit que b, & $b - ef$ eſt la difference des deux homogenes de comparaiſon pour les équations ſemblables,

$$ax - x^3 = b. \quad ae - ee.$$
$$ae - e^3 = ef = \overline{a - ee} \times e.$$

Enfin pour avoir un troiſiéme homogene, puiſque x eſt un nombre entier & qne e eſt plus petit, je ne puis pas ſuppoſer moins pour x que $e + 1$ que je ſubſtituë dans l'équation $ax + x^3 = b$, ou $a - xx = \frac{b}{x}$, ce qui me donne $ae + 1a - eee - 3ee - 3e - 1 = d$, & ſi $d = b$ la queſtion eſt réſoluë, & $x = e + 1$; mais ſi l'homogene d eſt encore plus petit que b, il eſt évidemment plus grand que ef, parceque l'homogene de comparaiſon augmente à meſure que la racine qui le forme augmente, & d eſt formé par $e + 1$, & ef ſeulement par e: c'eſt-pourquoi je fais une regle de 3, & je dis: la difference des homogenes

$ae - e^3 = ef$ & $ae - e^3 - 3ee - 3e - 1 + 1a = d$ eſt $a - 3ee - 3e - 1$. Celle des homogenes $ax - x^3 = b$ & $ae - e^3 = ef$ eſt $b - ef$. La difference des racines e & $e + 1$ qui ont formé les homogenes ef & d eſt 1. Je dis donc ſuivant la regle de la premiere partie de ce Traité, ſi $a - 3ee - 3e - 1$ difference dans l'homogene vient de 1 difference dans les racines, de combien viendra $b - ef$? Le quotient $\frac{b - ef}{a - 3ee - 3e - 1}$ donnera le troiſiéme membre de la racine; mais parceque $3e + 1$ eſt un infiniment petit par rapport aux quantités conſtantes a & b, ef, je ne prends univerſellement que $\frac{b - ef}{a - 3ee}$. *Ce qu'il falloit trouver.*

Il me reſte à prouver que ce troiſiéme membre & la ſuite des autres qu'on peut trouver de la même maniere à l'infini, forment une ſomme plus petite que la racine, & qui en approche à l'infini lorſqu'elle eſt irrationelle, & c'eſt tout ce qu'on peut ſouhaiter en ces matieres.

Soit trois équations ſemblables.

$x^3 = ax - b$. & ſoit $y = x + e$.
$y^3 = ay - c$ & $z = y + f = x + e + f$.
$z^3 = az - d$.

Je dis que ſi l'on fait comme $c - b : d - c :: y - x$ à une quatriéme quantité $\frac{\overline{d - c} \times \overline{y - x}}{c - b}$, la composée $y + \frac{\overline{d - c} \times \overline{y - x}}{c - b}$ ſera plus petite que z ou que $x + e + f$. Car en ſubſtituant on aura $ax - x^3 = b$

& $ay - y^3 = c$

ou $ax + ae - x^3 - 3exx - 3eex - e^3 = c$.

Donc $c - b = ae - 3exx - 3eex - e$ &c. & enfin on aura $\frac{afc - f^3c - 3ffex - 3ffee - 3fexx - 6eefx - 3fe^3}{ae - 3exx - 3eex - e^3}$ qui eſt plus petit que f, puiſqu'il reſte tous termes negatifs.

On prouvera de la même maniere que cette difference deviendra plus petite qu'aucune quantité donnée, & que par conſequent on peut approcher à l'infini de la valeur de la racine lorſqu'elle eſt irrationelle.

Enfin non-ſeulement tous les autres cas réductibles ou

irréductibles du troisiéme degré, mais generalement toutes les équations se peuvent résoudre par les mêmes principes, c'est-à-dire par la regle de trois appliquée à la difference des homogenes & à celles des valeurs qui les ont produits, ce qui est trop évident pour s'arrêter à le démontrer en détail.

SUR UNE PROPOSITION DE GEOMETRIE ELEMENTAIRE.

PAR M. DE LAGNY.

THEOREME.

DAns tout parallelograme la somme des quarrez des deux diagonales est égale à la somme des quarrez des quatre côtez. 1706. 28. Juillet.

Si le parallelogramme est rectangle, la proposition est évidente par la 47. p. 1. Il faut la prouver dans les obliquangles.

A B D E C F

Soit le parallelogramme obliquangle *ABCD* compris sous les quatre côtez *AB*, *BC*, *CD*, *DA*, dont les côtez opposez sont *AB*, *CD*, & *AD*, *BC*; la grande diagonale *BD* & la petite *AC*. Je dis que la somme des quarrez des deux diagonales *BD*, *AC*, est égale à la somme des quarrez des quatre côtez *AB*, *BC*, *CD*, *DA*.

PREPARATION.

Du point *A* de l'angle obtus *DAB* soit abaissée sur le côté *CD* la perpendiculaire *AE*, & du point *B* sommet de l'angle aigu *ABC* sur *DC* prolongé en *F* la perpendiculaire *BF*.

DEMONSTRATION.

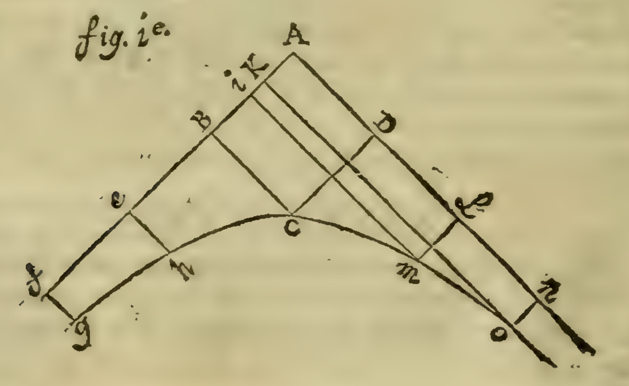
Les triangles *ADE*, *BCF*, ſont égaux & ſemblables, puiſque *AD* eſt égale à *BC*, & les angles *ADE*, *BCF*, de même que *AED*, *BCF*, ſont auſſi égaux, donc *DE* eſt égal à *CF*. Or par la 12. p. 2. dans le triangle obtuſangle *BDC*, le quarré du côté *BD* eſt égal à la ſomme des quarrez de *BC* & de *CD*, plus le double du rectangle de *CF* par *CD*; & par la 13. p. 2. dans le triangle *DAC*, le quarré du côté *AC* eſt égal à la ſomme des quarrez de *AD* & de *CD*, moins deux fois le rectangle de même *CD* par *DE* égal à *CF*. Donc l'excès compenſant préciſement le défaut, la ſomme des quarrez des deux diagonales eſt égale à la ſomme des quarrez des quatre côtez. *ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

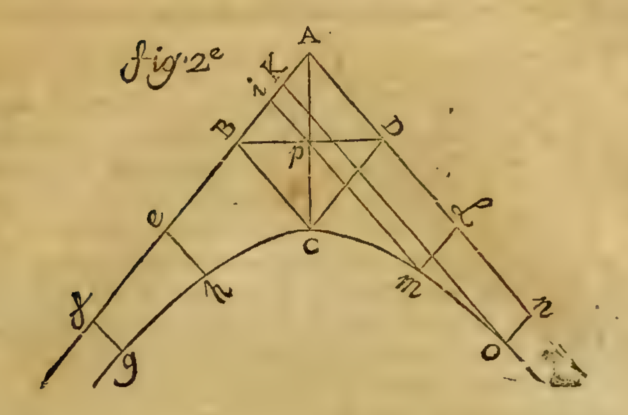
Dans tout rhombe ou lozange connoiſſant un côté & une diagonale, on connoîtra l'autre diagonale. Car puiſque les quatre côtez ſont égaux, il n'y a qu'à ôter le quarré de la diagonale donnée du quadruple du quarré du côté, le reſte ſera le quarré de la diagonale cherchée.

USAGE.

Soit un quadrilatere équilateral quelconque *ABCD* rectiligne & ſur un plan indéfini.



Si



Si l'on prolonge indéfiniment chacun des deux côtez conjoints *AB*, *AD*, & que prenant à discretion un point autre que *B* & *D* sur ces côtez prolongez, par exemple le point *e*, on tire *eh* parallele à *BC*, & qu'on fasse comme *Ae* est à *AB*, ainsi *BC* à *eh*, ou que prenant entre *A* & *B* un point à discretion comme *i*, on fasse comme *Ai* est à *AB*, ainsi *AD* à *A L*, & que du point *L* on tire *Lm* parallele & égale à *Ai*, & qu'on fasse la même chose sur tout autre point comme *f*, K, &c. la Courbe qui passera par toutes les extremitez des paralleles *eh*, *Lm*, *fg*, *no*, &c. sera l'hyperbole du premier genre, & elle sera rectangle & équilatere lorsque *ABCD* sera un quarré *Fig.* 1. Elle sera obliquangle & scalene lorsque *ABCD* sera un rhombe *Fig.* 2. Et si l'on opere de même sur les deux autres côtez conjoints *BC*, *CD*, on formera les hyperboles opposées. Enfin si dans la Fig. 2. au lieu des deux côtez conjoints *AB*, *AD*, qui forment l'angle aigu *BAD* on prend les deux côtez conjoints *AD*, *AC*, qui forment l'angle obtus *ADC*, on formera l'hyperbole obtusangle que j'appelle hyperbole de *suite* à l'hyperbole acutangle *gh C mo*, parceque leurs angles formateurs sont des angles de suite, & se servent de complément l'un à l'autre. Ces hyperboles de suite ont leurs espaces assymptotiques

parfaitement égaux & ſemblables dans le tout & dans chaque partie.

C'eſt une choſe connuë que le côté *AB* étant pris pour l'unité, ſi l'on prend ſur ce côté prolongé à l'infini *Be*, *ef*, &c. égaux chacun à *AB*, les lignes *AB*, *Ae*, *Af*, &c. repreſenteront la ſuite naturelle des nombres 1, 2, 3, &c. & que les eſpaces aſymptotiques *BChe*, *BCgf*, &c. repreſenteront les logarithmes de ces mêmes nombres 1, 3, &c. & comme l'eſpace *ABCD* n'a rien de curviligne ou d'hyperbolique, il repreſente auſſi le logarithme naturel de l'unité qui eſt zero; les lignes *Ai*, *AK* repreſenteront toutes les fractions dont *AB* eſt le dénominateur, & les eſpaces aſymptotiques du côté oppoſé pris negativement, c'eſt-à-dire les eſpaces *DCm L*, *DCon*, &c. repreſentent les logarithmes de ces fractions.

Il eſt ce me ſemble de la derniere évidence que toutes les hyperboles ſans diſtinction pouvant ſervir de modele pour la conſtruction des logarithmes, on auroit dû choiſir préferablement à toutes les autres celle qui eſt rectangle & équilatere, comme étant certainement la plus ſimple & la plus reguliere : mais au lieu de ſuivre la nature & la raiſon, on s'eſt aſſujetti à l'uſage arbitraire de la progreſſion décuple, enſorte qu'aïant pris zero pour le logarithme de l'unité, comme on le doit toûjours prendre, on a pris arbitrairement 10.00000 &c. pour le logarithme de 10, au lieu que ſuivant la quadrature de l'hyperbole que je donnai à l'Academie le 14 Juillet 1696, le logarithme naturel de 10 (c'eſt-à-dire l'eſpace aſymptotique qui répond à 10 fois le côté du quarré generateur de l'hyperbole rectangle & équilatere, ce côté étant 1) eſt

230258.50929 $\frac{1}{2}$ +; ce que je trouve ſans aucune ex-
ou 230258.50930 $\frac{1}{2}$ − traction de racine par une metho-
de très-ſimple & très-generale.

Il s'agit préſentement de trouver quelle eſpece d'hyperbole ſert de modele aux logarithmes ordinaires; il faut pour cela trouver l'aire du quadrilatere generateur *ABCD* *Fig.* 2.

Dans l'hyperbole rectangle & équilatere le côté *AB* étant 1, l'air de son quarré generateur est aussi 1. Or c'est une proprieté commune à toutes les hyperboles qu'il y a toûjours même raison entre leurs segmens hyperboliques semblables, & l'aire du quadrilatere generateur. Ainsi le logarithme naturel de 2 est 69314. 71805 &c. celui de 10 étant 2. 30258. 50929 &c. logarithme arbitraire de 10 étant 1. 00000. 00000 &c. si l'on fait cette analogie.

Comme 2. 30258. 50929 &c. est à 69314. 71805. &c. ainsi 1. 00000. 00000 a un quatriéme nombre, on trouvera pour le logarithme arbitraire de 2 ce nombre 30102. 99956 —+, ce qui s'accorde parfaitement avec les Tables.

Et si l'on fait de même comme 2. 30258. 50929 &c. est à 1.00000. 00000, ainsi 1.00000. 00000 &c. a un quatriéme nombre, on trouvera 43429. 44819 pour l'aire du rhombe generateur de l'hyperbole qui sert de modele aux logarithmes ordinaires. Cette aire & le côté 100000 étant donnez, il faut trouver les diagonales du rhombe.

Soit l'une comme *AC* $=x$ l'autre suivant mon Theorême, & le Corollaire ci-dessus sera $\sqrt{4.00000.00000 - xx}$. Or le produit de ces diagonales l'une par l'autre est évidemment double de l'aire du rhombe ou lozange. J'ai donc cette égalité $\sqrt{400000.00000x^2 - x^4} = 86858.89638$, & quarrant tout j'ai $x^4 = 400000.00000xx - 75444.67880.35157.71044$, & par consequent $x = \sqrt{200000.00000. \pm \sqrt{324555.32119.64842.28955}}$.

La racine de 324555.32119.64842.28955. est 180154. 18985 —, & par consequent la grande diagonale *AC* est $\sqrt{380154.18985}$ — entre 194975 $\frac{26836}{38995}$ & 194975 $\frac{262359}{38995}$. La petite diagonale *BD* sera $\sqrt{19845.24304}$ entre 44548. $\frac{66010}{89097}$ & 44548 $\frac{667[illegible]}{89096}$; leurs moitiez *Ap*, *Bp* seront 44548. &c. & 22274 &c. Prenant donc *AB* pour sinus total, & ces derniers nombres pour sinus des angles *ABp*, *pAB*, on trouvera que l'angle des asymptotes *BAD* est d'environ 25^d 44′ 25″, & par consequent l'angle *ABC* de 154^d 15′.

35″, qui eſt auſſi l'angle de l'hyperbole obtuſangle ou de ſuite dont les eſpaces aſymptotiques repreſentent également les logarithmes ordinaires. C'eſt ce que j'avois avancé ſans démonſtration dans ma nouvelle Arithmetique pag. 12. ligne 21. On voit par-là que les logarithmes ordinaires ont pour modelle deux hyperboles obligangles, au lieu que les logarithmes naturels ont pour modele la ſeule hyperbole rectangle & équilatere.

COROLLAIRE II.

Connoiſſant les deux côtez qui forment un parallelogramme & un des diagonales, on trouvera l'autre en ôtant du double de la ſomme des quarrez des deux côtez, le quarré de la diagonale donnée ; car le reſte ſera le quarré de la diagonale cherchée.

Soit le côté $AB = 10$, & $AD = 5$, la diagonale $AG = 9$; on demande la diagonale BD.

Le quarré d'AB eſt 100, celui d'AD eſt 25, leur ſomme 125, le double 250, dont j'ôte le quarré de 9 qui eſt 81 quarré de la diagonale donnée, il reſte 169 quarré de la diagonale cherchée, laquelle par conſequent eſt 13.

Autre Exemple.

Soit $AB = 20$ $\quad \overline{AB}^2 = 400 \quad \overline{AC}^2 = 289$

$AD = 15 \quad \overline{AD}^2 = 225$

$AC = 17$. Somme $= 625$

on demande $BD = 31$, double $= 1250$

ôtez 289

reſte $961 = \overline{BD}^2$.

Donc $BD = 31$.

Uſages.

Soit un corps A pouſſé ſuivant la ligne AB avec une force comme 10, & ſuivant AD avec une force comme 5, & que l'angle BAD ſoit donné de poſition tel que ſa baſe BD ſoit de 13 ; on demande, en faiſant abſtraction de la

résistance du milieu, quelle ligne parcourra le mobile & sa longueur repective. Il est évident qu'il parcourra *AC* de 9.

REMARQUE I.

C'est en cherchant le raport de ces lignes que décrit le mobile par un mouvement composé de deux ou plusieurs déterminations que j'ay trouvé mon Theorême, & il est aise d'en faire l'application generale.

REMARQUE II.

Cette maniere de déterminer l'angle *BAD*, non-pas par degrez, minutes, secondes, &c. mais par le raport de la base *BD* aux deux côtez *AB*, *AD*, est beaucoup plus simple, plus geometrique & plus analytique. Il est aisé de supposer un angle de tant de dégrez, minutes, &c. qu'on voudra; mais ces suppositions ne peuvent s'executer actuellement & exactement. Par exemple, je puis supposer l'angle *BAD* de 20 degrez; mais je ne puis construire cet angle sans emploïer l'une des trois Sections Coniques avec le cercle. Si je le suppose de 31 degrez 17′, il faudra que j'emploïe une Courbe d'un genre plus composé que les Sections Coniques; parceque je suis obligé de couper l'angle droit trois fois en deux continuellement, trois fois en trois, & deux fois en cinq. Or je ne puis le couper avec le cercle & la ligne droite qu'une fois en trois, une fois en cinq, & autant de fois que je voudray en deux; & pour le couper une seconde fois en trois, il faut emploïer une des Sections Coniques; & pour le couper une seconde fois en cinq, il faut une Courbe plus composée. C'est la même chose s'il y avoit des secondes, des tierces, &c. Il faut toûjours lorsque ce raport est primitif, couper un angle donné en trois & en cinq parties égales une ou plusieurs fois de suite continuellement.

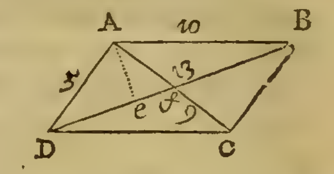
Or dans tous ces cas le raport de *BD* aux deux côtez *AB*, *AD*, est entierement inexprimable, même en nombres irrationaux. Il est vrai aussi qu'en déterminant ce ra-

port de *BD*, on ne peut preſque jamais déterminer exactement en nombres la grandeur de l'angle *BAD* : mais ayant à choiſir entre connoître exactement le raport des trois lignes *AB*, *BD*, *DA*, & indéfiniment près la grandeur de l'angle *BAD*, & pouvoir executer le tout geometriquement avec le cercle & la ligne droite, ou bien de ſuppoſer ſeulement le raport connu de l'angle *BAD* à l'angle droit, & le raport des deux côtez *AB*, *AD*, ſans pouvoir conſtruire actuellement cet angle, ni connoître exactement le raport de la baſe *BD*; il me ſemble qu'on doit ſans difficulté préferer la premiere ſuppoſition.

REMARQUE. III.

Si l'on vouloit réſoudre ce Problême par la Trigonometrie, il faudroit faire vingt & une operations, & encore ne trouveroit-on qu'à peu près la valeur cherchée, ſans pouvoir s'aſſûrer de l'avoir préciſément.

Car dans le triangle *ABD*, connoiſſant les trois côtez $AB = 10$, $AD = 5$ & $BD = 13$ pour trouver l'autre diagonale *AC* du parallelogramme *ABCD*, voici comment il faut operer.



J'abaiſſe du point *A* ſur *BD* la perpendiculaire *Ae*.

1°. J'ajoûte les deux côtez *AB*, *AD*, c'eſt $10 + 5$ 15.

2°. J'ôte *AD* de *AB*, c'eſt $10 - 5 = 5$

3°. Je multiplie cette ſomme par ce reſte, 15 par 5, c'eſt 75.

4° Je diviſe ce produit par la baſe *BD*, c'eſt $\frac{75}{13} = 5\frac{10}{13}$ pour avoir la difference des ſegmens *Be*; *De*.

5°. J'ôte cette difference de *BD*, c'eſt-à-dire, j'ôte $5\frac{10}{13}$ de 13, le reſte eſt $13 - 5\frac{10}{13} = 7\frac{3}{13}$.

6°. Je prends la moitié de ce reſte, c'eſt $3\frac{8}{13}$ pour le ſegment *De*.

7°. Je prends la moitié de BD pour Df, c'eſt $6\frac{1}{2}$.

8°. J'en ôte De, c'eſt $6\frac{1}{2} - 3\frac{8}{13} = 2\frac{23}{26}$ valeur de ef.

9°. Je multiplie $De = 3\frac{8}{13}$ par le ſinus total 100000.

10°. Je diviſe le produit par $AD = 5$, le quotient $72307\frac{9}{13}$ eſt le ſinus de l'angle DAe.

11°. Je cherche ce ſinus dans les Tables, je trouve environ $46^d\, 46\, 19'$ pour l'angle DAe

12°. J'écris ſon complément 69067 pour ſinus de l'angle ADe.

13°. Je multiplie ce dernier ſinus par $AD = 5$.

14°. Je deviſe le produit par le ſinus total, le quotient eſt $3\frac{45335}{100000}$ valeur de la perpendiculaire Ae.

15°. Je multiplie Ae par le ſinus total.

16°. Je diviſe le produit par $ef = 2\frac{23}{26}$, le quotient 119716 eſt la tangente de l'angle Afe.

17°. Je cherche cette tangente dans les Tables, & je trouve environ $50^d\, 8'$ pour l'angle Afe.

18°. J'écris la ſecante correſpondante, c'eſt environ 156005.

19°. Je multiplie cette ſecante par $ef = 2\frac{23}{26}$.

20°. Je diviſe le produit par le ſinus total, le quotient eſt $4\frac{1300376}{2600000}$ pour Af.

21°. Le double $9\frac{3}{1015}$ eſt à très-peu près la valeur cherchée de la diagonale AC, puiſqu'elle eſt préciſément 9.

Si l'on veut operer geometriquement, & ce ſont les deux ſeules methodes connuës juſqu'à preſent, les huit premieres operations ſont les mêmes pour connoître le ſegment $De = 3\frac{8}{13}$ ou $\frac{47}{13}$; mais elles different dans la ſuite.

9°. Je quarre De, c'eſt $\frac{2209}{169}$.

10°. Je quarre AD, c'eſt 25.

11°. J'ôte le premier quarré du second, c'est $25 - \frac{2209}{169} = \frac{2016}{169}$ quarré d'*Ae*.

12°. Je quarre $ef = 2\frac{23}{26} = \frac{75}{26}$, c'est $\frac{5625}{676}$.

13°. J'ajoûte ces deux quarrez *Ae*, *ef*, la somme est $\frac{13689}{676}$.

14°. La racine quarrée de cette somme que je tire est $\frac{117}{26} = 4\frac{1}{2}$ valeur d'*Af*.

15°. Le double de cette valeur est 9 , valeur cherchée de la diagonale *AC*.

Cette derniere methode est exacte , & on opere par extraction de racines quarrées , au lieu que par la Trigonometrie on se sert de la regle de trois en quatre analogies , & qu'on ne trouve qu'à peu près ce qu'on cherche. Celle-ci suffit pour l'usage civil , mais elle est d'une longueur prodigieuse. L'autre est infiniment plus élegante, & satisfait plus l'esprit. Elles sont toutes deux incomparablement plus longues & plus embarrassantes que la methode qui résulte de mon Theorême suivant laquelle il faut,

1°. Quarrer $\overline{AB}^2 = 100$.

2°. Quarrer $\overline{AD}^2 = 25$.

3°. Ajoûter ces deux quarrez, c'est 125.

4°. Doubler cette somme, c'est 250.

5°. Quarrer $\overline{BD}^2 = 169$.

6°. Oter ce quarré du double de la somme de 250
ôtez 169
reste 81.

	13
	13
	39
	13
	169.

7°. Tirer la racine quarrée de ce reste , c'est 9 valeur cherchée de la diagonale *AC*.

Il y a donc deux fois moins d'operations par ma methode que par la methode Geometrique , & trois fois moins que par la methode Trigonometrique. Celle-ci n'est jamais exacte, & la mienne évite toutes les fractions

où

où les deux autres engagagent; qui augmentent encore indéfiniment la difficulté de l'operation.

REMARQUE IV.

Ces quatre nombres 5, 10, 9 & 13 ont été choisis avec art comme les plus simples pour exprimer en nombres rationaux les quatre côtez & les deux diagonales d'un parallelogramme obliquangle; de même que les trois nombres 3, 4 & 5 sont les plus simples qu'on puisse trouver pour exprimer les trois côtez d'un triangle rectangle.

Ces quatre autres nombres 20, 15, 17 & 31 ont aussi été trouvez par la même methode; & dans chaque cas particulier on peut donner non-seulement une infinité de solutions, mais une infinité d'infinitez, c'est-à-dire, toutes les solutions possibles en entiers & en frrctions. Ainsi deux côtez étant donnez en nombres, on trouvera une infinité, ou plusieurs infinitez, ou une infinité d'infinitez de fois deux diagonales commensurables; & au contraire si les diagonales, ou un côté & une diagonale sont donnez, on trouvera le reste.

Les Livres de Diophante. de Mrs Viete, Fermat, Frenicle, &c. & en general de tous les Analistes sont pleins de Problêmes curieux sur les triangles rectangles en nombres. Voici un nouveau champ ouvert sur les parallelogrammes numeriques.

PROBLEME ARITHMETIQUE.

Deux nombres étant donnez, en trouver deux autres tels que la somme des quarrez des deux derniers soit double de la somme des quarrez des deux premiers.

LEMME.

Le double de la somme des quarrez de deux nombres est égal à la somme des quarrez de la somme & de la difference de ces deux nombres.

Soit les deux nombres a, & $a+b$.

Leur somme est $2a+b$.

Leur difference eſt b.
Le quarré du premier eſt aa.
Le quarré du ſecond eſt $aa + 2ab + bb$.
La ſomme eſt . . . $2aa + 2ab + bb$.
Le double de cette ſomme eſt $4aa + 4ab + 2bb$.
Or le quarré de la ſomme $2a + b$ eſt $4aa + 4ab + bb$.
Et le quarré de la difference b eſt . . . . . bb.
La ſomme de ces deux quarrez eſt $4aa + 4ab + 2bb$.
comme cy-deſſus; donc le double de la ſomme des quarrez de deux nombres eſt égal à la ſomme des quarrez de la ſomme & de la difference de ces deux nombres. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Soit, par exemple, les deux nombres 1 & 2, leur ſomme eſt 3, & leur difference 1. La ſomme des quarrez eſt 5, dont le double 10 eſt égal à $9 + 1$ quarrez de 3 & de 1.

Soit encore les deux nombres donnez 3 & 5, leur ſomme eſt 8, leur difference 2. La ſomme des quarrez de 3 & de 5, c'eſt-à-dire de 9 & de 25 eſt 34, dont le double eſt 68. Or le quarré de 8 eſt 64, & celui de 2 eſt 4, & $64 + 4 = 68$.

SOLUTION GENERALE.

Soit les nombres donnez pour côtez conjoints d'un parallelograme a & b, il faut trouver les deux diagonales commenſurables x & y; enſorte que $xx + yy = 2aa + 2bb$ ſuivant mon Theorême.

1°. Si a & b ſont égaux, comme il arrive dans le rhombe ou lozange, ce Problême eſt aiſé. Car il ne s'agit que de diviſer un nombre quarré $4aa = 2aa + 2bb = 2aa + 2aa$ en deux autres quarrez. Mais pour avoir la ſolution la plus élegante qu'il ſoit poſſible, je ſuppoſe pour le premier x & pour le ſecond $2a - \frac{b}{c}x$. Cette ſuppoſition exprime generalement tous les nombres poſſibles. b & c ſont des nombres entiers & arbitraires. On aura donc par la ſubſtitution $xx + 4aa - \frac{4abx}{c} + \frac{bbxx}{cc} = 4aa$, & par con-

ſequent $x = \frac{4abc}{bb+cc}$ valeur cherchée indéfinie.

Cette réſolution eſt très-ſimple, & en même tems ſi generale qu'elle renferme l'infinité d'infinitez de cas poſſibles.

Car ſuppoſant $b = 1$, on aura une infinité de ſolutions en ſuppoſant ſucceſſivement $c = 2$, $c = 3$, $c = 4$, $c = 5$, &c. à l'infini.

Et ſuppoſant $b = 2$, on aura une autre infinité de réſolutions en ſuppoſant ſucceſſivement $c = 3$, $c = 5$, $c = 7$, $c = 9$, &c. c'eſt dire c égal à la ſuite infinie de tous les nombres impairs.

En ſuppoſant $b = 3$, on aura une autre infinité de réſolutions ſi l'on ſuppoſe ſucceſſivement $c = 4$, $c = 5$, $c = 6$, $c = 7$, $c = 8$, &c. & ainſi de ſuite en combinant chaque valeur particuliere de b, avec la ſuite infinie des valeurs de c, premieres à b, on aura une infinité d'infinité de réſolutions, & abſolument toutes les réſolutions poſſibles. Car pour réſoudre parfaitement ces ſortes de Problêmes, il ne ſuffit pas d'en donner une ou pluſieurs ſolutions, ni même une ou pluſieurs infinitez, il faut donner l'infinité d'infinitez de toutes les ſolutions poſſibles.

Dans cette formule $x = \frac{4abc}{bb+cc}$ les grandeurs b & c ſont parfaitement ſemblables, c'eſt-à-dire également emploïées. Ainſi c'eſt la même choſe de ſuppoſer $b = 2$, & $c = 3$, ou de ſuppoſer au contraire $c = 2$ & $b = 3$, la valeur d'x vient la même. C'eſt-pourquoi bien qu'avec $b = 1$ on puiſſe auſſi ſuppoſer $c = 1$, $c = 2$, $c = 3$, &c. & qu'avec $b = 2$ on puiſſe auſſi ſuppoſer $c = 1$, $c = 2$, $c = 3$, &c. & qu'avec $b = 3$ on puiſſe encore ſuppoſer $c = 1$, $c = 2$, $c = 3$, &c. Cependant ſi l'on ne veut avoir que des ſolutions utiles & differentes ou primitives, il faut premierement retrancher toutes les ſuppoſitions de $b = c$, c'eſt-à-dire de $b = 1$ & $c = 1$, de $b = 2$ & $c = 2$, de $b = 3$ & $c = 3$, &c. parceque la ſubſtitution donne $x = \frac{4abc}{bb+cc} = 2a$, & par conſequent $y = 2a - \frac{bx}{c} = 2a - x = 2a - 2a = 0$. Or

quoiqu'il ſoit vrai en un ſens que les quarrez de $2a$ & de o joints enſemble ſont $4aa$, ce n'eſt pourtant point ſatisfaire au veritable ſens de la queſtion, ni à l'intention de celui qui la propoſe, ou qui cherche à la reſoudre.

Secondement il faut retrancher toutes les ſuppoſitions où b & c ſont en raiſon réciproque, ou en raiſon ſemblable à quelque ſuppoſition précedente. Ainſi après avoir ſuppoſé $b=2$ & $c=3$, il eſt inutile de ſuppoſer $b=3$ & $c=2$, parcequ'on retrouveroit la même réſolution. Il eſt auſſi fort inutile après avoir ſuppoſé $b=1$ & $c=2$ de ſuppoſer $b=2$ & $c=4$, ou $b=3$ & $c=6$; & parceque la valeur d'x revient encore la même, avec cette ſeule difference que $\frac{bx}{c}$ dans le premier cas vient en forme de fraction reduite à moindres termes, & dans les autres cas en forme de fraction équivalente & réductible.

Soit preſentement les deux nombres donnez inégaux a & $a+b$, le double de la ſomme de leurs quarrez eſt $4aa+4ab+2bb$, qu'il faut partager en deux quarrez. Je ſçay par le Lemme précedent que les deux côtez qui ſatisfont ſont $2a+b$ ſomme, & b difference: mais ces deux côtez qui ſatisfont arithmetiquement ne peuvent ſatisfaire geometriquement, parceque la plus grande diagonale doit être plus petite que la ſomme des deux côtez conjoints, c'eſt-à-dire plus petite que $2a+b$. Cependant pour réſoudre ce Problême dans toute ſon étenduë, je fais réflexion que des deux nombres cherchez, l'un ſera neceſſairement plus grand que $2a+b$, & l'autre plus petit b; ou, ce qui eſt le veritable cas de la queſtion, l'un plus petit que $2a+b$, & l'autre plus grand que b.

Soit pour abreger $2a+b=c$, & l'un des nombres cherchez $c\pm x$, & l'autre $b\mp\frac{dx}{e}$, la ſomme des quarrez ſera $cc\pm 2cx+xx$ & $bb\mp\frac{2bdx}{e}+\frac{ddxx}{ee}=cc+bb$; donc $x=\frac{\pm 2bde\mp 2cee}{dd+ee}$, & le Problême eſt réſolu.

Dans le premier cas où l'on ſuppoſe l'un des nombres

$c + x$, & l'autre $b - \frac{dx}{x}$, on aura $x = \frac{2bde - 2cee}{dd + cc}$; & afin que la résolution soit positive dans ce cas, on peut prendre e à discretion; mais il faut que d soit plus grand que $\frac{ce}{b}$, & plus petit que $\frac{ce}{b} + \sqrt{ee + \frac{ccee}{bb}}$. Si l'on prend d à discretion, il faut que e soit plus petit que $\frac{bd}{c}$, & plus grand que $\sqrt{\frac{ddcc}{bb} + dd} - \frac{cd}{b}$.

Dans le second cas où l'on suppose l'un des nombres $c - x$ & l'autre $b + \frac{dx}{e}$, on trouve $x = \frac{2cee - 2bd}{dd + ee}$. On peut de même prendre arbitrairement tel nombre qu'on voudra pour d ou pour e, & les restrictions respectives sont réciproques aux précedentes.

C'est ainsi qu'ayant pris pour côtez d'un parallelogramme obliquangle les côtez 1 & 2, j'ay trouvé pour le cas plus simple les diagonales $1\frac{4}{5}$ & $2\frac{1}{5}$ en entiers les quatre nombres 5, 10, & 13.

EXPERIENCES

Sur les vertus de la racine de la grande Valeriane sauvage.

PAR M. MARCHANT.

IL y a plusieurs années que lisant le Livre intitulé: *Phytobasanos* de Fabius Columna, Botaniste celebre, je remarquay qu'il assuroit que la racine de la *grande Valeriane sauvage*, mise en poudre, est un excellent specifique contre l'épilepsie; & que non-seulement il avoit vû plusieurs épileptiques gueris par l'usage de la poudre de cette racine, mais qu'ayant été lui-même sujet à l'épilepsie, il en avoit été gueri par ce remede. 1706. 4 Aoust.

L'autorité de ce sçavant homme me fit naître l'envie d'experimenter un remede si utile. Je tiray hors de terre,

au mois de Mars, des racines de cette plante, je les préparay de la maniere que Fabius Columna le prescrit, & j'en donnay une prise à un garçon de quinze à seize ans, qui depuis l'âge de sept ans tomboit presque toutes les semaines dans des simptomes épileptiques, perdant connoissance, & écumant de la bouche; mais ces paroximes ne duroient pas plus de sept ou huit minutes. Ce garçon après avoir pris ce remede, fut dix-huit jours sans tomber dans ses accidens ordinaires: mais aprés ce tems, il retomba deux fois en huit jours, avec cette difference que chaque accès ne dura qu'environ quatre minutes. Je conjecturai que le remede avoit seulement remué quelques humeurs, qui avoient changé & suspendu le cours de la maladie; ce qui me détermina à le purger; & ensuite je lui donnai une seconde prise de la même poudre. Cette premiere purgation n'ayant presque rien évacué, trois jours après il eut un accès d'épilepsie, qui m'obligea de le purger encore une fois; & le troisiéme jour suivant, je lui fis prendre un gros & demi de la même poudre, qui lui procura une sueur considerable, & lui fit vuider par bas plusieurs vers. Quatre jours après, je lui fis encore prendre un gros de cette poudre, qui le fit seulement suer. Depuis ce tems-là, il y a environ six ans, il a joüi d'une santé parfaite.

Un de mes amis me pria de donner ce remede à une autre personne âgée de vingt ans & quelques mois, qui avoit été attaquée d'épilepsie depuis la quatorziéme année de son âge, & qui depuis ce tems-là tomboit reglément tous les mois dans des accidens dont les paroxismes étoient si violens, qu'on l'a vû dans son dernier accès se débattre contre terre, & se rouler de bout en bout d'une court de neuf à dix toises de long, en écumant de la bouche, & perdant tout sentiment pendant plus d'une demi-heure. Ayant vû ce malade, qui avoit encore la tête pleine de contusions par sa derniere chûte, je crûs qu'avant que de rien entreprendre, il étoit à propos de le faire saigner; ce qui fut fait le même jour. Trois jours après je le purgeay; & l'ayant laissé reposer trois autres jours, je lui

fis prendre deux gros de poudre de la racine de la même plante, qui le lâcherent un peu pendant la matinée ; sur l'après-midi il sua assez considerablement, & rendit quantité de vers ; & les quatre jours suivans, il me parut beaucoup plus gai qu'il n'avoit de coûtume : le cinquiéme jour je lui fis encore prendre un gros de cette même poudre, qui le fit moins suer que la premiere fois, & lui fit encore jetter quelque vers. Il parut fort abattu par cette derniere prise, mais depuis ce tems-là (il y a environ deux ans) il n'a ressenti aucune attaque d'épilepsie, & il a entierement recouvré sa santé.

J'ay donné avec succès ce remede à plusieurs enfans & à des personnes déja avancées en âge : à quelques-uns il a reculé l'accès ; à d'autres il en a diminué la violence ou la durée : ce qui n'est pas peu de chose dans une maladie dont la guerison ou même le soulagement ont toûjours paru si douteux : c'est encore un grand avantage que l'on peut tenter à tout âge ce remede, qui, à ce que je sçache, n'a jamais produit de mauvais effets. Une personne de cette Compagnie à qui j'avois indiqué ce remede, peut rendre témoignage qu'il a eu la satisfaction de voir qu'un épileptique à qui il l'avoit lui-même donné, en a été non-seulement soulagé, mais même parfaitement gueri.

Fabius Columna ordonne que l'on tire hors de terre les racines de cette plante, qui est la *grande Valeriane sauvage* inculte, avant qu'elle commence à montrer ses tiges, c'est-à-dire dans le mois de Mars ; qu'après les avoir fait secher on les reduise en poudre, & que l'on donne au malade une demi-cuillerée de cette poudre, c'est-à-dire environ un gros & demi, dans du vin, de l'eau, du lait, ou dans quelqu'autre liqueur convenable, une ou deux fois seulement, suivant la commodité ou l'âge du malade. Pour moy j'ay toûjours donné cette poudre, autant que j'ay pû, dans un verre de vin blanc, & j'ay souvent disposé le malade par quelques purgations ou par quelqu'autres préparations qui dépendent de la prudence & du jugement de ceux qui ordonnent ce remede.

Phytobasanos, p. 120.

EXTRAIT

Des Observations faites au mois de Décembre 1705 par M. Bianchini, sur des feux qui se voïent sur une des Montagnes de l'Apennin.

PAR M. CASSINI le fils.

1706. 7. Aoust. EN allant de Bologne à Florence, on voit ordinairement dans le territoire de Pietra Mala des flames sur la pente d'une montagne : M. Bianchini les avant vûës plusieurs fois de loin, voulut enfin s'en approcher pour les considerer de prés. Voici comme il en parle.

Après que j'ay vû naître une flâme vive, qui dure sans interruption & sans être nourrie d'aucune autre matiere pour l'entretenir, que de celle que la nature fournit par le moïen de la situation des lieux soûterrains, qui se trouvent dans la Montagne de Pietra Mala ; je ne doute point que l'usage du feu pour nos arts n'ait été communiqué & rendu durable par quelqu'une de ces minieres vives & de ces sources de flâmes sensibles que j'ay observées dans cette Montagne. Voici la description de ce feu de Pietra Mala, auprès duquel je trouvay de la neige & de la glace, qui n'étoient éloignées que de quatre pieds des flâmes qui sortoient du terrein même, sur lequel la neige & la glace, qui n'étoient pas encore fondues, restoient jusqu'à l'heure de midy. J'y allay accompagné de plusieurs étrangers pour bien examiner toutes choses, menant un guide avec nous, qui nous devoit changer de chevaux au sommet de la Montagne de Pietra mala. Nous montâmes à pied du lieu du cette poste vers le midy par l'espace de deux milles ou environ, laissant à main droite le grand chemin, & descendant de l'autre côté de la Montagne par un sentier étroit, qui se terminoit à une plaine, qui pouvoit être cultivée. Nous vîmes dans le milieu de certains

tains champs labourez un chemin où il s'élevoit plusieurs petites flâmes, qui paroissoient au-dessus de la terre élevées d'environ un demi pied, comme si elles avoient été nourries & entretenuës par du bois & du charbon. Le lieu où naissent ces flâmes est large de huit pieds Romains, & long de seize; & il est aussi facile de le mesurer que les autres endroits de ce champ, parce qu'on peut marcher facilement à l'entour & sur la flâme même, sans craindre de trouver quelqu'ouverture ou caverne, comme sur le Mont Vesuve, les parties de ce terrein étant en cet endroit sans aucune division, très-contiguës les unes aux autres, avec cette difference cependant que la veine du feu qui se trouve là affermit un peu plus les mottes de terre & les pierres qui s'y trouvent, en communiquant aux unes & aux autres une couleur plus brûlée que celle qui se trouve dans les mottes de terre, & les autres pierres qui en sont voisines. Je dis la veine du feu, parce que je ne sçais pas appeller autrement cette matiere inconnuë, qui produit en vingt endroits differens toutes ces flâmes que l'on voit dispersées de part & d'autre, dans un espace à peu près de cent trente pieds en quarré, comme je le vis alors. Je crus qu'il étoit inutile de les compter chacune en particulier, parce que chacun peut faire sortir des flâmes de tout cet espace, comme il le voudra en deux manieres, par le moïen d'un bâton ou de quelqu'autre chose dont on frapera legerement le terrein, ou bien en jettant seulement sur ce lieu-là de la paille, du papier, ou quelqu'autre matiere combustible.

Cependant lorsque ces matieres combustibles étoient posées dans un endroit éloigné de ces flâmes, cela n'empêchoit pas qu'elles ne prissent feu, à peu près de même que quand on jette du papier ou du linge sur du charbon ou du fer allumé, & enfin nous vîmes une de ces flâmes vives, laquelle ayant consumé les choses que l'on y avoit jettées, ne laissoit pas cependant de durer & d'être nourrie sans autre matiere que celle que le terrein fournissoit.

Nous jettâmes sur ces flâmes ardentes des branches

d'épines & autres arbrisseaux, que nous avions ramassées pour cela dans le chemin, & elles brûlerent de la même maniere que si on les avoit jettées dans le feu ordinaire. Ensuite remarquant qu'à deux pieds près de la flâme, il y avoit quelques monceaux de neige qui n'étoit pas fonduë, & que l'on trouvoit sous la neige éloignée de quatre pieds de la flâme des morceaux de glace; non-seulement je me souvins d'appliquer beaucoup mieux à cette merveille ce que dit le Poëte en admirant le Mont Gibel en Sicile, avec ses neiges & ses feux: *Scit nivibus servare fidem*; mais je voulus encore faire l'experience de jetter sur ces flâmes de la neige & de la glace. Les jetter & les voir se résoudre en eau dans un instant, ce fut la même chose: de même que si on les avoit jettés sur un brasier bien allumé. La flâme n'en fut pas éteinte pour cela, au contraire elle en parut plus vive, & s'étendre avec plus de vîtesse & de force sur les pierres voisines & sur celles qui se trouvoient dans son chemin.

En faisant ces experiences dans tous les environs de ce lieu, nous sentîmes une odeur très-agreable, qui nous parut sortir de tout ce terrein allumé, à peu près comme si nous eussions été près d'un feu nourri de quelque bois odoriferant, comme pourroit être le Calambou: & cette odeur se rendoit plus sensible, lorsqu'on se mettoit à l'opposite du Soleil, & au devant de quelque petit vent qui souffloit au visage, & qui augmentoit la flâme. Je pris quelques morceaux de ces pierres qui étoient proches de la flâme, & une poignée de la poussiere de ce terrein qui étant frottez l'une contre l'autre faisoient de la flame, & avoient la même odeur que celle dont nous avons parlé ci-devant. Ces pierres étoient si chaudes au commencement que l'on avoit de la peine à les souffrir dans la main; & en les portant sur nous, elles conserverent pendant un quart-d'heure cette chaleur, & beaucoup plus long-tems cette odeur agreable que nous avions senti sur le lieu même. Après avoir fait ces experiences, qui me parurent suffisantes pour contenter notre curiosité touchant l'his-

toire de la premiere communication du feu, & qui peuvent fournir de matiere suffisante aux Sçavans de philosopher sur la cause d'un effet si merveilleux de la nature, nous reprîmes notre droit chemin vers Fiorenzole.

Reflexions sur les Observations de M. Bianchini.

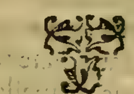
Ce feu observé en Toscane par M. Bianchini, a un grand raport à celui qui a été observé en Dauphiné par M. Dieulamant, & dont il est parlé dans l'Histoire de l'Academie de l'an 1669 page 23. Le terrein que ce feu occupe est de six pieds de long sur 4 de large. Il consiste dans une flâme legere errante telle qu'une flâme d'eau de vie.

On ne voit point de matiere qui puisse servir d'aliment à la flâme. On assûre que le feu est plus ardent en hyver & dans un tems humide, qu'il diminuë peu à peu dans les grandes chaleurs.

Ces deux feux ont cela de commun qu'ils sont sur le penchant d'une Montagne, & paroissent sortir tous deux de la terre, sans qu'il y ait aucune fente qui puisse avoir communication avec quelque caverne inferieure.

Ils augmentent aussi tous les deux par l'humidité & par le froid, comme il a été remarqué dans le feu du Dauphiné, ce qui se rapporte à l'effet de la neige, qui jettée sur la flâme de Pietra Mala, la fait augmenter pendant qu'elle se fond en eau.

La difference consiste dans l'odeur, qui dans le feu du Dauphiné est de souffre, au lieu que celle qui exale du terrein de Pietra Mala est comme aromatique.



TRAITE' DES ROULETTES,

Où l'on démontre la maniere universelle de trouver leurs touchantes, leurs points de recourbement ou d'inflexion, & de reflexion ou de rebrouſſement, leurs ſuperficies & leurs longueurs, par la Geometrie ordinaire.

Avec une methode generale de réduire toutes les Lignes courbes aux Roulettes, en déterminant leur generatrice ou leur baſe, l'une des deux étant donnée à la volonté.

PAR M. DE LA HIRE.

DEFINITIONS.

1706. 21. Juillet. J'Appelle une *Roulette* la ligne qui eſt décrite par un point d'une ſuperficie plane, qui eſt toûjours appliquée ſur une autre ſuperficie plane, pendant qu'une ligne droite ou courbe telle qu'elle puiſſe être, que j'appelle la *Generatrice* de la Roulette, & qui eſt poſée ſur la même ſuperficie où eſt le point, roule ſur une ligne droite ou courbe qui ſera la *Baſe* de la Roulette, & qui eſt poſée ſur l'autre ſuperficie.

Il eſt évident par cette deſcription ou generation de la roulette, que ſa baſe ſera toûjours égale à la ligne droite ou courbe qui en eſt la generatrice, ou à toute cette Courbe ou à ſa partie, ce qui ſuit du roulement de la generatrice ſur la baſe conſiderée comme immobile.

Je n'entends pas que cette baſe ſoit terminée par la rencontre de la Roulette, mais qu'elle eſt terminée par deux points tels qu'on voudra de la droite ou de la Courbe generatrice, dans leſquels elle touche la baſe au commencement & à la fin de ſa deſcription de la Roulette, ou de quelqu'une de ſes parties; car on peut n'en conſiderer

qu'une partie, & de plus il faut remarquer qu'il y a des Roulettes qui ſont infinies, ce qui dépend de la Courbe generatrice ou de la nature de la baſe.

Il n'y a point de Courbe qu'on ne puiſſe conſiderer comme une roulette, laquelle ſera formée par une ligne droite ou courbe qui lui ſervira de generatrice.

Tous les Geometres ſçavent déja que toute ligne courbe propoſée peut-être décrite par l'évolution d'une ligne courbe, & la ligne courbe propoſée aura pour ſa generatrice une ligne droite, laquelle roulera ſur la Courbe qui la décrit par ſon évolution, & qui lui ſert de baſe, & le point décrivant ſera un des points de la generatrice prolongée ou non prolongée.

Mais je dis encore, 1°. Que ſi l'on propoſe quelque ligne que ce ſoit droite ou courbe pour une roulette, & qu'on donne auſſi de poſition une ligne droite ou courbe pour ſervir de baſe à cette roulette, on pourra déterminer la generatrice de la Roulette propoſée.

2°. Que ſi l'on propoſe quelque ligne que ce ſoit pour une roulette, & qu'on donne quelque ligne droite ou courbe pour ſa generatrice, & dans quelle poſition on voudra, où un point du plan de la generatrice eſt donné de poſition par rapport à la generatrice, & ce point étant ſur la Roulette dans cette poſition de la generatrice, on pourra déterminer la baſe & ſa poſition.

Mais avant que d'entrer dans la ſolution de ces Problêmes, je démontreray pluſieurs proprietés particulieres des Roulettes en general, tant de leur touchantes que de leurs points de recourbement & de reflexion, avec des methodes pour connoître les longueurs & les ſuperficies de ces Courbes ſans me ſervir de calcul; ce que j'avois déja expliqué en partie dans un Memoire que je lûs à l'Academie au mois de Juin 1698, & qui n'a point été imprimé.

Le point qu'on appelle *Flexus contrarius*, de *Recourbement* ou d'*Inflexion*, eſt celui où une ligne courbe ſe tourne en deux ſens contraires; & le point de *Reflexion* ou de *Rebrouſ-*

sement eſt celui où elle paroît comme ſe reflechir & retourner vers le même côté où elle étoit.

DETERMINATION

Des touchantes des Roulettes, & de leurs points de recourbement & de reflexion.

I. Si dans quelque poſition que ſoit la ligne generatrice *EAB* d'une roulette ſur la baſe *AY* qu'elle touche au point *A*, on mene une ligne droite *AP* du point touchant *A* au point décrivant *P*, la perpendiculaire *PF* à cette ligne *AP* par le point *P*, ſera touchante de la roulette dans ce même point *P*.

II. Si du point *A* on mene la ligne *AC* qui touche en *C* la ligne *NC*, laquelle décrit par ſon évolution la generatrice *EAB*; & de même ſi du point *A* on mene la ligne *AO* qui touche en *O* la ligne *MO* qui décrit auſſi par ſon évolution la baſe *YA*, & comme *CA* & *OA* ſont toutes deux perpendiculaires à la generatrice & à la baſe qui ſe touchent en *A*, elle ne feront qu'une même ligne droite *CAO* par le Lemme ſuivant; c'eſt pourquoy ſi l'on fait comme *CO* à *CA*, ainſi *AO*, à *AV*, & que ſur *AV* comme diametre on décrive le cercle *AXV*, on connoîtra par ſon moïen de quel côté la convexité de la roulette *SPR* doit être tournée à l'égard de ſa touchante *PF* & du point *A*. Car ſi le point *P* qui décrit la roulette eſt au dedans du cercle *AXV*, la convexité de la roulette au point *P* ſera vers le point *A*, & la roulette ſera au deſſus de ſa touchante *PF* par rapport au point *A* comme dans cette Figure. Au contraire ſi le point *P* décrivant eſt hors le cercle *AXV* dans cette même poſition de la generatrice & de la baſe, la concavité de la roulette ſera tournée vers *A*, & ſa touchante *PF* ſera au deſſus par rapport au point *A*. Enfin ſi le point décrivant ſe trouve ſur le cercle, le point *P* décrivant ſera dans le recourbement de cette roulette.

III. Si ſur le cercle *AXV* on prend quel point on vou-

dra pour le point décrivant d'une roulette dont la generatrice soit dans la position *EAB* touchant la base *AO* au point *A*; je dis que ce point sera celui du recourbement de la roulette décrite par ce point. Ainsi ce cercle sera le lieu du recourbement de toutes les roulettes décrites sur cette base, & par cette generatrice quand elle touche sa base au point *A*, les roulettes étant décrites par les points de ce cercle.

Mais il faut remarquer que dans les mouvemens de la même generatrice sur la même base posée immobile, le cercle comme *AXV* change de grandeur & de position; ce qui est évident par sa description, ce qui fait qu'une infinité de points du plan de la generatrice peuvent être les points de recourbement de roulettes décrites par ces points.

Il s'ensuit donc aussi que les touchantes des roulettes dans tous les points de recourbement, pour une même position du cercle *AXV*, passeront toutes par l'extremité *V* de son diametre *AV*, puisque ces touchantes feront toûjours des angles drois avec celles qui seront menées du point de contact A de la base & de la generatrice, aux points de la circonference du cercle.

IV. La figure generatrice étant donnée, & le point décrivant étant aussi donné de position sur le plan de cette figure, on peut déterminer le point sur la figure generatrice lequel touchant la base, le point décrivant sera dans le recourbement de la roulette. Et l'on peut aussi déterminer l'espace sur le plan de la generatrice, dans lequel ayant pris quel point on voudra pour le point décrivant, la roulette aura un recourbement, & le point décrivant étant pris hors cet espace, la roulette n'aura point de recourbement.

V. On déterminera aussi le point de reflexion de la roulette si elle peut en avoir un, par rapport à la longueur de la generatrice & à la position du point décrivant, lequel sera toûjours celui où se trouve le point décrivant lorsque la plus petite ou la plus grande ligne amenée du point dé-

crivant à la generatrice, ſera perpendiculaire ſur la baſe; ou bien, ce qui eſt la même choſe, lorſque le point de rencontre de la plus petite ligne menée du point décrivant à la generatrice & de la generatice, ſera ſur la baſe.

Démonſtration des Touchantes.

Soit deux points *A* & *E* ſur la baſe *EAG* d'une roulette leſquels ſoient indéfiniment proche l'un de l'autre, & deux perpendiculaires *AO*, *EO* à la baſe en *A* & en *E* qui ſe rencontrent en *O*. Soit auſſi deux points *A* & *B* ſur la generarrice autant éloignés l'un de l'autre que les points *AE* ſur la baſe; & ſoit encore les perpendiculaires *CA*, *CB* ſur la generatrice leſquelles ſe rencontrent en *C*. Soit enfin le point *P* qui décrit la roulette quand la generairice roule ſur la baſe,

Lorſque les lignes *OA*, *CA* ſeront jointes enſemble, le point décrivant *P* ſera la roulette; & lorſque les lignes *OE*, *CB* ſeront auſſi jointes enſemble directement en *OEQ*, & le point *B* de la generatrice ſur le point *E* de la baſe, le point *P* décrivant étant parvenu en *S*, auſſi le point *S* ſera la roulette.

Mais ayant mené les cordes *AE*, *AB* qui ſont égales entr'elles par la ſuppoſition, & qu'on peut regarder comme les arcs puiſqu'on les a pris indéfiniment petits & égaux entr'eux; je conſidere le mouvement du point *P* de la roulette à ſon point *S*, qui eſt auſſi celui de la ligne *BC* en *EQ*, comme étant compoſé de deux mouvemens, dont le premier ſera lorſque la corde *AB* eſt jointe à la corde *AE*, dans lequel mouvement la ligne *AC* ſe ſera meuë en *AM*, & par conſequent le point *C* ſera paſſé en *M* & la ligne *B*[illegible] en *EM*; donc l'angle *CAM* ſera égal à l'angle *BAE*. Mais auſſi par le même mouvement le point *P* ſera venu en *Z*, & l'angle *PAZ* ſera auſſi égal à l'angle *BAE* & à l'angle *CAM*.

Le ſecond mouvement eſt celui que fait la ligne *EM* pour venir en *EQ* où ell eſt jointe directement à la ligne *OE*, & par ce mouvement le point *Z* ſe ſera mû pour venir

nir en *S*, la ligne *EZ* s'étant mûë en *ES*, en faisant l'angle *ZES* égal à l'angle *MEQ*. D'où il suit que les deux angles ensemble *PAZ*, *ZES* sont égaux au seul angle *CEQ*; car on regarde les points *B* & *E* comme un seul point.

Mais par la construction, puisque les lignes *AB*, *AE* sont égales entr'elles & indéfiniment petites, les angles *CBA*, *CAB* seront égaux, de même que les angles *OEA*, *OAE*; & par consequent l'angle *MAC* sera égal à l'angle *MEQ* & égal à *BAE*. Donc aussi leurs égaux *PAZ*, *ZES* seront égaux entr'eux & à l'angle *BAE*. Et ce sera toûjours de même quelque disposition que les lignes *AO*, *EO*, & *AC*, *BC* aïent entr'elles, soit qu'elles concourent comme dans cette Figure les unes au-dessus, & les autr es au-dessous des cordes ou de la base de la roulette, soit qu'elles concourent d'un même côté, & soit enfin qu'il y en ait de paralleles entr'elles, ce qui ne sera que des cas particuliers de cette démonstration generale.

Maintenant il est facile à voir que puisque les deux angles *PAZ*, *ZES* sont égaux entr'eux, & ensemble égaux au seul angle *CEQ*, si l'angle *AZE* ou son égal l'angle *APB*, car le triangle *APB* dans le mouvement s'est placé en *AZE*, est égal à l'angle *CEQ*, les lignes *AP*, *ES* seront paralleles entr'elles; & par consequent si par le point *P* on mene la ligne *PF* perpendiculaire à *PA*, le point *S* sera dans la ligne *PF*. Mais si l'angle *AZE* est plus petit que *CEQ*, le point *S* se trouvera au-dessous de *PF*; au contraire s'il est plus grand il sera au-dessus.

On voit par-là que la position des points de la roulette comme *S* par rapport au point *P* sur la ligne *PF* laquelle est perpendiculaire à *AP*, dépend de la grandeur de l'angle *APB* par rapport à l'angle *CBQ*, ou bien des deux angles *OCB*, *COE* qui sont ensemble égaux à l'angle *CBQ* ou *CEQ*, puisque les points *B* & *E* ne sont considerés que comme un seul point, & que l'angle *CEQ* est l'exterieur du triangle *COE*.

Maintenant si l'on mene la ligne *PD*, qui faisant avec

AP l'angle *APD* égal à l'angle *APD*, rencontre la generatrice en *D*, & qu'on prenne sur la base l'arc *AG* égal en longueur à l'arc *AD*, & qu'on mene *OGH* perpendiculaire à la base en *G*, & *DC* perpendiculaire à la generatrice en *D*, les points *D* & *G* n'étant considerés que comme un seul point, on fera la même démonstration que cy-devant, ensorte que si l'angle *CGH* est égal à l'angle *DPA* & égal à l'angle *APB* son égal par la construction, l'angle *CEQ* étant aussi égal à l'angle *APB*, il est évident que le point *R* de la roulette qui sera déterminé comme le point *S*, sera aussi sur la ligne *FPF*; & par consequent la ligne *PF* touchera la roulette en *P*; car en general si une ligne droite rencontre une Courbe en deux points qui soient indéfiniment proche l'un de l'autre, la droite touchera la Courbe dans ces points considerés comme un seul point : mais si l'angle *CGH* est plus petit que *DPA*, lorsque l'angle *GEQ* est aussi plus petit que l'angle *APB*, le point *R* sera au dessous de *FPF* comme le point *S*; & par consequent la ligne *FPF* touche la roulette en *P* qui en est un point. Et si l'angle *CGH* est plus grand que l'angle *DPA*, & que l'angle *CEQ* soit aussi plus grand que l'angle *APB* égal à *DPA*, le point *R* de la roulette sera au-dessus de la ligne *FPF* comme le point *S*, & *FPF* touchera la roulette en *P*.

Mais s'il arrivoit que l'angle *CEQ* étant égal à l'angle *APB* le point *S* étant sur *PF*, & que l'angle *CDH* fût ou plus grand ou plus petit que langle *DPA*, le point *R* étant alors au-dessus ou au-dessous de *PF*, ce qui peut arriver par la disposition des perpendiculaires *CD*, *OG*, alors la ligne *FPF* ne laisseroit pas d'être touchante de la roulette, mais le point *P* en seroit le recourbement, puisque dans les points de la roulette entre *P* & *R* ou *P* & *S*, il ne pourroit arriver que ce qu'on vient de démontrer, où une ligne comme *FPF* toucheroit la roulette dans son point *P*; car les autres points d'un côté & d'autre de *P* à une distance indéfiniment petite demeureroient au-dessus d'un côté & au-dessous de l'autre de la ligne *FPF*, le

recourbement n'étant que dans un point, à moins que toute la roulette ne fut une ligne droite, auquel cas tous ces points seroient des recourbemens.

Il s'ensuit donc de ceci que si l'angle *CEQ* est égal à l'angle *APB*, & le point *S* qui doit être indéfiniment proche de *P* étant sur la ligne *PF*, ce point *P* sera le recourbement de la roulette qu'il a décrit.

Ce que je viens d'expliquer touchant la position de la roulette par rapport au point *A*, ne doit s'entendre que lorsque les points *C* & *O* qui sont les rencontres des perpendiculaires à la generatrice & à la base, sont des deux côtés du point *A*; mais s'ils sont tous deux du même côté, ce sera tout le contraire, ce qui ne change rien à la démonstration.

Démonstration du point de recourbement.

Il sera maintenant facile de déterminer la position du point *P* quand il est dans le recourbement de la roulette, si elle peut en avoir un, ce qui paroît dans la solution de ce Problême. Car le point *C* étant le concours de deux perpendiculaires en *A* & en *E* indéfiniment proche l'une de l'autre sur la generatrice; ou bien, ce qui est la même chose, le point *C* étant le point touchant de la ligne menée du point *A* à la ligne qui décrit par son évolution la generatrice, si sur le diametre *AC* on décrit un demi-cercle *CXA*, quand le point *P* décrivant sera dans la circonference de ce cercle, il sera aussi dans le recourbement de la roulette qu'il décrit, pourvû que la base soit une ligne droite : car alors l'angle *CEQ* qui sera égal à l'angle *ACE*, sera aussi égal à l'angle *APE*, puisque le point *P* est dans la circonference du cercle *APC*, & que le point *E* peut être consideré comme étant sur la generatrice, sur la base de la roulette & sur le cercle *CA*, à cause que *AE* est une partie indéfiniment petite, & que le cercle touche la base qui est une ligne droite dans le point *A*, laquelle touche aussi la generatrice dans ce même point *A*. FIG. 33

Il faut remarquer que la position & la grandeur du cercle *AXC* ou *AXV* change dans toutes les differentes positions de *CO*, & que dans chaque position il fera connoître seulement si le point *P* décrivant est dans le recourbement de la roulette, & si la roulette a sa convexité ou sa concavité tournée vers *A*: mais il sera le lieu du point de recourbement de toutes les roulettes formées sur la même base & sur la même generatrice dans la position où elles se touchent en *A*, quand les points décrivans y seront placés. Ce n'est pas que d'autres points décrivans ne puissent donner des roulettes qui auront des recourbemens, mais ce sera hors cette position, comme je l'explique plus au long dans le cas suivant.

FIG. 4. Mais si la base est une Courbe, & que le point *O* soit le point touchant de la ligne droite *CAO* sur la Courbe qui décrit par son évolution celle de la base, ayant fait comme *CO* à *CA*, ainsi *AO* à *AV*, & sur *AV* pour diametre ayant décrit le cercle *AXV*, je dis que ce cercle est le lieu du recourbement de la roulette lorsque son point décrivant *P* se trouvera sur la circonference de ce cercle dans cette position de la generatrice & de la base; & quand le point *P* sera hors ce cercle, la concavité de la roulette sera tournée vers *A*; au contraire sa convexité sera tournée vers *A* quand le point *P* sera dans le cercle.

La démonstration en est facile aprés ce que j'ay démontré; car dans les triangles dont deux des angles sont indéfiniment petits, & par consequent le troisiéme indéfiniment grand, on peut considerer que les angles sont entr'eux comme les côtés opposés à ces angles: c'est pourquoy au triangle *CEO* le côté *CO* est au côté *CE* ou *CA*, car on les suppose égaux, comme l'angle *CEO* ou son supplément *CEQ* à l'angle *COE*. Mais aussi au triangle *VOE* le côté *OE* est à *EV*, ou bien les lignes *AO* à *AV* qui leur sont supposées égales, comme l'angle *OVE* à l'angle *VOE*. Mais à cause que *CO* est à *CA* comme *AO* à *AV*, l'angle *CEQ* sera à l'angle *COE* comme l'angle *OVE* à l'angle *VOE* ou *COE*; donc l'angle *CEQ* sera égal à l'angle *OVE* ou *AVE*,

qui sera égal à *APE* à cause de la circonference du cercle *AXV*; & par ce qui a été démontré d'abord les points *S* ou *R* de la roulette & qui sont indéfiniment proche de *P*, seront sur la ligne *PF* perpendiculaire à *AP*, & par consequent la roulette sera dans son recourbement en *P*; car si la roulette étoit décrite, & qu'elle coupât le cercle *AXV* dans quelque point comme *P*, & que ce point fut alors sur le cercle & dans la position où il décrit la roulette lorsque la base & la generatrice se touchent en *A* sur *CO*, il s'ensuivroit que le point *P* de la roulette seroit dans son recourbement : mais si dans cette position de la base & de la generatrice, le point décrivant *P* se trouvoit au dedans du cercle *AXV*, l'angle *APE* seroit obtus, & par ce qui a été démontré d'abord des touchantes, la convexité de la roulette seroit alors tournée vers *A*, & ce seroit le contraire si le point décrivant étoit hors le cercle, car ce seroit la concavité de la roulette qui seroit tournée vers *A*.

On remarquera aussi qu'on peut placer le cercle *AXV*, dont on a déterminé le diametre *AV*, de l'autre côté de *A*, & ce sera la même démonstration, ce diametre étant toûjours sur *CO*.

On fera la même démonstration pour la roulette dont la courbure de la base aura sa convexité tournée du même côté de celle de la generatrice; car on fera aussi comme *CO* à *CA*, ainsi *AO* à *AV*, & *AV* sera le diametre du cercle, qui est le lieu du point décrivant, quand ce point est sur le recourbement de la roulette; & l'on aura dans le triangle *COE* le côté *CO* au côté *CE* ou *CA*, comme l'angle *CEO* à l'angle *COE* Mais au triangle *VOE* le côté *OE* est à *EV*, ou bien *AO* à *AV*, comme l'angle *OVE* à l'angle *VOE*, ou son supplément *AOE* qui est le même que *COE*. C'est pourquoy l'angle *CEO* est à l'angle *COE*, comme l'angle *OVE* ou *AVE* à l'angle *COE*, & par consequent l'angle *CEO* sera égal à l'angle *AVE* ou à l'angle *APE*, & dans la formation de la roulette quand le point *E* de la generatrice sera placé sur le point *e* de la base, & que le Fig. 5.

point *P* décrivant sera avancé d'un pas, quoiqu'indéfiniment petit, la ligne *CE* sera placée sur *OE*. *Et c'est ce qu'il falloit démontrer.*

Les differentes positions des points *O* & *C* à l'égard du point *A* ne changent rien à cette démonstration, & l'on peut seulement remarquer que si le point *O* ou le point *C* sont à distance infinie, le point *V* ne laissera pas d'être déterminé, comme si le point *O* est à distance infinie, ce qui fait la base en ligne droite au moins dans le point *A*; car le point *O* à distance infinie pourroit ne convenir qu'à un point de la base qui seroit celui de son recourbement, & alors par la regle, *CO* infinie étant à *CA*, comme *AO* infinie à *AV*, ou bien *CO* à *AO* qui sont deux infinies, lesquelles ne different que d'une finie *CA* pouvant être reputées comme égales, doivent aussi donner *CA* & *AV* égales; c'est-pourquoy le point *V* tomberoit au point *C*, ce qui revient à ce que j'ay dit de la roulette qui a pour base une ligne droite. De même si le point *C* est à distance infinie, *CO* infinie est à *CA* infinie reputées comme égales entr'elles, comme *AO* à *AV* qui doivent aussi être égales.

Fig. 6. Il y a plusieurs cas remarquables dans ces sortes de roulettes; mais je ne m'y arrêteray pas à cause que ce ne sont que des déterminations particulieres, si ce n'est à celui-cy, où la base & la generatrice sont deux cercles dont les convexités sont tournées du même côté, & dont le diametre de la base est double de celui de la generatrice; car alors par la regle le point *V* tombera au point *O* qui est le centre de la base, & par consequent le cercle qui est le lieu du recourbement de la roulette sera le même que le generateur; de sorte que si le point décrivant est sur le cercle generateur, toute la roulette sera un recourbement, c'est-à-dire, que ce sera une ligne droite: car dans toutes les differentes positions du cercle generateur le point décrivant *P* sera toûjours sur le même cercle *AVX*.

Mais si le point décrivant est au dedans ou au dehors

du cercle generateur, il eſt évident que la roulette ne peut avoir de recourbement; car ce point ne pourra jamais ſe trouver ſur le cercle generateur qui eſt le même que *AVX* dans toutes ſes differentes poſitions, & alors ſi le point *P* eſt au dehors du cercle generateur, la Courbe de la roulette aura ſa concavité tournée vers le point *A* ſuivant la regle, & s'il eſt au dedans ce ſera ſa convexité qui ſera tournée vers ce même point *A*.

Mais ce qu'il y a de plus remarquable dans cette eſpece de roulette, c'eſt que ce ſera toûjours une ligne elliptique, hormis quand le point décrivant eſt au centre *C* du cercle generateur; car ce ſera un cercle, & une ligne droite quand il eſt ſur la circonference comme j'ay déja dit. Voici comme je démontre que ces roulettes ſont des Ellipſes.

Soit la baſe *BAEF*, le cercle generateur *OXA* & le point décrivant *P* ſur ſon diametre *OCA*. Ayant fait *AH* égale à *OP*, du point *O* pour centre & pour rayons *OP*, *OC*, *OH* ſoient décrits les cercles *PI*, *CM*, *HNT*, & le cercle generateur étant tranſporté en *OZE* & le point décrivant *P* en *R*; je dis que le point *R* eſt ſur la circonference d'une Ellipſe dont *OP* eſt la moitié du petit axe, & *OT* égale à *OH* eſt la moitié du grand axe. FIG. 7.

Lorſque le cercle generateur eſt parvenu en quelle poſition on voudra, comme en *OZE* en roulant ſur la baſe *AE*, ſon diametre étant placé en *OE*, il eſt évident que le point *O* ſera parvenu au point *L*, enſorte que l'arc *OL* ſera double de l'arc *AE*; car le cercle de la baſe a ſon diametre double de celui du generateur. Mais auſſi l'arc *CM* qui eſt égal à l'arc *AE*, ſera la moitié de l'arc *OL*, & la corde *OL* ſera double du ſinus *MD* de l'angle *COM*, qui eſt la moitié de l'angle *OML*. De plus la ligne *MG* parallele à *OC* fera l'angle *OMG* égal à *MOC*, & par conſequent *MG* ſera perpendiculaire ſur *OL* & la coupera en deux également en *G*, & le point *L* ſera ſur *OT* perpendiculaire à *OA*. Mais puiſque le point *O* de la circonference du cercle a été tranſporté en *L*, le diametre *OCA*

ſera tranſporté en *LM*,&le point *P* décrivant ſera par conſequent ſur *LM* en *R*,*LR* étant égale à *OP* ou à *OI*:c'eſt pourquoy *IR* ſera parallele à *OL*.Enfin ſi l'on mene *RN*, le triangle *MRN* ſera iſoccelle ; car les lignes *MR*, *MI*, *CP*, *CH*, *MN* ſont égales : c'eſt pourquoy les points *IRN* ſeront dans la circonference d'un cercle dont *IN* eſt le diametre , & par conſequent l'angle *IRN* ſera droit. Mais *IR* eſt perpendiculaire à *OA*,donc *RN* ſera parallele à la même *OA*. Il eſt donc évident par la generation des Ellipſes que le point *R* ſera ſur l'Ellipſe *PRT* qui a pour ſes demi-axes les lignes *OP*,*OH* qui ſont les rayons des cercles *PI* , *HNT*. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Ce ſera la même démonſtration pour la roulette Elliptique, qui ſera décrite par un point placé hors le cercle generateur ,& qui peut être toûjours ſur un diametre

.Par ce qui a été démontré cy-devant,il eſt facile à voir que le changement de grandeur & de poſition qui peut arriver au cercle qui eſt le lieu du recourbement des roulettes, ne change rien à ce que j'en ay déterminé, car il ne peut apporter que quelques varietés à la figure de la roulette qui pourra avoir pluſieurs recourbemens , ce qu'on pourra connoître facilement par la regle que je viens de donner.

On peut connoître par ce que j'ay démontré juſqu'icy, que dans chaque poſition du cercle *AXV*, toutes les roulettes qui auront leurs points décrivans dans ſa circonference, ſeront auſſi toutes dans leur recourbement dans ces mêmes points. Ainſi l'on peut déterminer quelles ſeront les roulettes décrites par la même generatrice & ſur la même baſe qui peuvent avoir des recourbemens, puiſque cela dépend des lignes qui par leur évolution décrivent la generatrice & la baſe, leſquelles déterminent tous les cercles poſſibles comme *AXV* ſur ces données ; & il eſt certain que s'il y a quelque eſpace déterminé où ſe trouvent ces cercles, ce ſera auſſi dans cet eſpace où tous les points qu'on y prendra pourront décrire des roulettes qui auront

auront un ou plusieurs recourbemens; mais que hors cet espece les points décrivans ne donneront point de roulettes qui aïent des recourbemens. On en verra un exemple dans ce qui suit, où je démontre comment on peut déterminer sur la generatrice le point où elle doit toucher la base, pour faire que le point décrivant soit dans son recourbement, la generatrice & la base étant données, & la position du point décrivant sur le plan de la generatrice.

Soit donc, par exemple, la parabole *ABD* pour la generatrice d'une roulette, dont la base est le cercle *LAM* qui a pour centre le point *O*, & le sommet de la parabole touchant le cercle *LM* au point *A*; soit aussi la ligne courbe *CKG* qui décrit la parabole par son évolution. Le point *O* represente aussi la ligne qui décrit le cercle par son évolution. C'est-pourquoy si de tous les points de la Courbe *CKG* on mene des touchantes à cette Courbe, ou des perpendiculaires à la parabole, comme *KB*, *GD*, & qu'on les prolonge en *E* & en *F*, ensorte que *BE*, *DF* soient égales à *AO* qui seront les perpendiculaires menées de la ligne *O* qui décrit le cercle par son évolution, jusqu'aux points du cercle qui répondront aux points *BD* de la parabole quand elle roulera sur *AM*, ces lignes droites *KE* & *GF* representeront celles qui touchent les deux lignes qui forment la generatrice & la base par leur évolution, & qui passent par le point commun touchant de la base & de la generatrice; ce qui est facile à connoître par ce que j'ay expliqué cy-devant. Fig. 8.

Si l'on veut donc maintenant trouver les diametres des cercles qui seront le lieu des recourbemens des roulettes lorsque le point décrivant y sera placé, il faut faire par la regle comme *CO* à *CA*, ainsi *AO* à *AV*; & comme *KE* à *KB*, ainsi *BE* à *BI*; & de même comme *GF* à *GD*, ainsi *DF* à *DH*, & les lignes *AV*, *BI*, *DH* seront les diametres des cercles *VA*, *BI*, *DH* qui sont le lieu qu'on cherche. Mais aussi il est facile à voir que tous les diametres de ces cercles seront toûjours plus petits que *OA*, puisque le se-

cond terme de la proportion est toûjours plus petit que le premier lorsque la base a sa convexité tournée vers celle de la parabole, & par consequent le troisiéme terme qui est toûjours égal à *AO* dans cet exemple sera plus grand que le quatiéme.

On déterminera donc par le moïen de ces cercles l'espace où le point décrivant *P* doit être sur le plan de la parabole pour faire que la roulette ait un recourbement. Cet espace sera renfermé entre la parabole & la Courbe qui touchera tous les cercles *AV*, *BI*, *DH*, qui seront décrits d'un côté & d'autre de l'axe de la parabole. Il est donc évident que si le point décrivant *P* est dans cet espace, il rencontrera un de ces cercles dont l'extremité du diametre sur la parabole en déterminera le point où elle doit être placée sur la base pour faire que ce point décrivant soit sur le recourbement. Mais si le point décrivant est hors cet espace, la roulette n'aura point de recourbement, ce qui suit des démonstrations précedentes.

Mais si le point décrivant *P* est donné de position avec un point comme *B* sur la parabole, & qu'on demande le diametre de la base circulaire pour faire ensorte que lorsque le point *B* la touchera, le point *P* soit dans le recourbement de la roulette; il n'y aura qu'à se servir de la converse de la proposition generale, & mener la ligne droite *PB*, & par le point *P* la ligne *PQ* perpendiculaire à *BP*, laquelle rencontrera au point *Q* la ligne *BK* perpendiculaire à la parabole en *B*, ensorte que si l'on fait ensuite comme *KQ* à *KB* ainsi *KB* à une quatriéme *KR*, le point *R* sera le centre du cercle de la base, lequel aura pour rayon *RB*. La grandeur *KR* peut être prise indifferemment d'un côté & d'autre de *K* sur *KB*, pour y déterminer le centre *R* du cercle de la base qui aura son rayon *KB*; & il est évident qu'il y aura plusieurs cas particuliers qui naîtront des differentes grandeurs données. Et si le point *Q* tomboit au point *K*, le cercle de la base auroit son centre à distance infinie, & ce ne seroit qu'une ligne droite.

La démonſtration de la conſtruction de ce problême ſe tire de la regle que j'ay donnée : car ſi le point *R* eſt le centre de la baſe, on aura par la regle *KR* à *KB*, comme *BR* *BQ* ; mais en diviſant *KR* ſera à *BR* moins *KR*, ce qui eſt égal à *KB*, comme *KB* à *BQ* moins *KB*, ce qui eſt égal à *KQ* ; ce qui eſt la même proportion que je viens de donner pour trouver le point *R*.

Ces démonſtrations conviennent auſſi à toutes les lignes qui ſont décrites par l'évolution d'une autre, ſelon la methode de M. Hugens dans ſon Traité des Pendules, puiſque toutes ces ſortes de lignes ne ſont que des roulettes qui ont pour baſe la ligne courbe qu'il appelle évoluë, & pour generatrice le cercle infini ou la ligne droite, ce qui eſt la même choſe.

Pour les points de reflexion des roulettes, ils ſeront déterminés par la plus petite ou la plus grande ligne menée du point décrivant ſur la generatrice, lorſque le point de rencontre de cette ligne avec ſa generatrice ſera ſur la baſe ; alors le point décrivant ſera dans le point de reflexion de la roulette : ce qui paroît par la ſeule inſpection de la figure, & par la formation de la roulette.

Détermination de la ſuperficie & de la longueur des Roulettes.

On peut par la methode que j'ay donnée cy-devant déterminer la ſuperficie des roulettes, & la longueur de leurs Courbes. Car ſi les lignes menées du point décrivant juſqu'aux points de la Courbe generatrice, gardent entr'elles quelque progreſſion connuë, les diviſions de la generatrice auſquelles ces lignes ſont menées en ayant auſſi une ; & de plus les angles que font les touchantes des lignes qui décrivent par leur évolution la generatrice & la baſe, étant auſſi connus par rapport aux parties de ces lignes, on connoîtra la ſuperficie & la longueur des roulettes par rapport à quelque ſuperficie & à quelque ligne de celles qui ſont données dans la generatrice & dans la baſe.

On verra dans les exemples ſuivans des applications de cette methode, qui ſerviront pour toutes les roulettes.

Exemple I.

FIG. 9. Soit le cercle *ABD* dont le centre eſt *C* pour la Courbe generatrice de la roulette *DPV*; & le cercle *AEV* dont le centre eſt *O* pour la baſe. Les centres *C* & *O* de ces cercles repreſentent les lignes dont les deux cercles ſont évolus : c'eſt-pourquoy dans toutes les poſitions de ces deux cercles les lignes qui paſſeront par ces deux centres, ſeront perpendiculaires à la generatrice & à la baſe.

Maintenant dans telle poſition qu'on voudra du cercle generateur *AEPD* ſur la baſe *AAV* laquelle il touche en *A*, le point décrivant *P* étant placé ſur la roulette en *P*, ſi la generatrice a roulé ſur la baſe d'une partie indéfiniment petite *AE*, la ligne *CO* qui joint les centres ou qui touche les Courbes qui décrivent par leur évolution la generatrice & la baſe, aura paſſé en *OEQ*, & le point décrivant *P* ſera parvenu au point *S*.

Ayant mené comme on a fait pour les touchantes les lignes *AP*, *EP*, *ES*, il s'enſuit que la ligne *EP* ſera parvenuë en *ES*, & que l'angle *PES* ſera égal à l'angle *CEQ*. Ainſi dans ce petit roulement il ſe ſera formé la figure *PAES*, qui ſera la portion de la ſuperficie de la roulette qui convient à ce roulement *AE*.

Mais cette ſuperficie eſt compoſée de deux triangles *APE*, *PES*, & le triangle *APE* a ſon angle en *P* égal à la moitié de l'angle *ACE* ou à l'angle *ADE* à cauſe du cercle. C'eſt pourquoy ſi l'on diviſe en deux également l'angle *ACE* par la ligne *CR* laquelle ſera parallele à *DE*, on aura le triangle *RCE* qui aura ſon angle *RCE* égal à l'angle *APE* à cauſe du cercle, & ſon angle exterieur *CEQ* égal à l'angle *PES*. Mais comme dans les triangles qui ont leurs angles indéfiniment petits ou grands, on raiſonne des côtés comme des angles; il s'enſuit que *ER* | *CR* || l'angle *RCE* ou *APE* | l'angle *CER* ou *CEQ* ou *PES*.

Mais auſſi les deux triangles qui ont un angle indéfini-

ment petit *PAE*, *PES* & qui ont le côté commun *PE* & les autres ſenſiblement égaux, ſont entr'eux comme leurs angles *APE*, *PES*; on aura donc le triangle *APE* | triangle *PES* || *ER* | *CR*.

Mais dans le triangle *OCE* dont les angles en *C* & en *O* ſont indéfiniment petits, & dont l'angle *C* eſt diviſé en deux également par la ligne *CR*, & *CD* étant égale à *CA* ou *CE*, on a *OD* | *OC* || *DE* ou *DA* ou 2 *CA* | *CR*. Semblablement on a *OD* | *DC* || *OE* ou *OA* | *ER*.

C'eſt-pourquoy *OD* x *CR* ſera égal à *OC* x 2 *CA*.

Et de même *OD* x *ER* ſera égal à *DC* ou *CA* x *OA*.

Et comparant les quantités égales de l'un à l'autre, & à cauſe des côtés *OD* égaux, on a *CR* | *ER* || *OC* x 2 *CA* | *CA* x *OA*, ou bien || *OC* x 2 *CA* | 2 *CA* x $\frac{1}{2}$ *OA*.

Donc auſſi à cauſe du côté égal 2 *CA*, on a *CR* | *ER* || *OC* | $\frac{1}{2}$ *OA*, ou bien *invertendo* *ER* | *CR* || $\frac{1}{2}$ *OA* | *OC*; ou doublant || *OA* | 2 *OC* égal 2 *OA* plus 2 *CA*.

Donc enfin *OA* | 2 *OA* plus 2 *CA* || triangle *APA* | triangle *PES*.

Mais compoſant *OA* | *OA* plus 2 *OA*, ou bien 3 *OA* plus 2 *CA* || le triangle *APE* | triangle *APE* plus le triangle *PE* qui ſont enſemble égaux à la figure *PAES*.

Mais comme on aura toûjours la même analogie pour tous les points de la Courbe generatrice, & que tous les triangles *APE* enſemble compoſent le demi-cercle *DBA*, & toutes les figures *PAES* auſſi priſes enſemble compoſent toute la ſuperficie de la roulette, on aura le demi-cercle generateur *DBA* | la demi-roulette *ADPV* || *OA* rayon du cercle baſe | 3 *OA* plus 2 *CA*, ce qui eſt trois fois le rayon du cercle baſe plus deux fois le rayon du cercle generateur.

Lorſque les convexités du cercle generateur & du cercle baſe ſont tournées du même côté, la même analogie ſubſiſte, mais non-pas avec addition, mais par ſouſtraction, ce qui vient de la ſuite des comparaiſons.

On aura auſſi par ce même moïen le rapport des ſecteurs du cercle generateur aux portions de la ſuperficie de la

roulette, lesquelles seront faites par une ligne comme *AP* perpendiculaire à la Courbe de la roulette en *P*. Car nous avons vû dans les touchantes, que si l'on mene une ligne droite *AP* du point *A* où la generatrice touche la base jusqu'au point décrivant *P*, la ligne menée par *P* perpendiculaire à *AP* touchera la roulette en *P*; c'est-pourquoy la ligne *AP* est perpendiculaire à la Courbe de la roulette. Mais il s'ensuit aussi par la démonstration que je viens de donner, que le segment du cercle generateur *PEA* sera au segment ou portion de la roulette *PSVEA* || *OA* | 3 *OA* plus 2 *CA*.

Il s'ensuit delà qu'une de ces roulettes étant donnée, on la peut diviser avec une ligne droite perpendiculaire à sa Courbe comme *AP* dans quelle raison on voudra, en divisant le cercle generateur *DPA* dans la même raison donnée par une corde comme *AP*, ce qui est facile en supposant cette division du cercle.

Pour la longueur de la Courbe de la roulette, on la détermine en cette maniere. Si les portions indéfiniment petites comme *AE* du cercle generateur sont toutes égales entr'elles, aussi tous les angles comme *CEQ* seront égaux entr'eux, qui son aussi égaux aux angles *PES*. Mais comme on considere les triangles *PES* comme isoscelles dont les bases *PS* sont portions de la roulette, il est évident que toutes ces bases *PS* auront entr'elles la même raison que les côtés *PE*. Mais les côtés *PE* sont les cordes du demi-cercle *DBA*, & toutes ces cordes étant élevées perpendiculairement sur les parties *AE* du demi-cercle, font une superficie égale au quarré du diametre *DA*, ce qui est connu.

Mais aussi la premiere corde qui est *DA* aura même raison à la premiere base *PS*, que toutes les cordes ensemble à toutes les bases ensemble, & la premiere base *PS* est l'arc *MN* compris entre *EC* & *EQ*. C'est-pourquoy le produit de *DA* par toutes les *PS* prises ensemble, sera égal au produit de *MN* par toutes les cordes prises ensemble.

Mais la base NM dans ce cas de la figure, est égale à ND ou AE son égale plus DM. Et toutes les cordes prises ensemble & multipliées par AE ou ND, sont égales à la somme du produit de chacune en particulier par la même AE, ce qui est égal au quarré du diametre DA, comme nous avons dit. Donc ND | NM || le quarré de DA | produit de DA par toutes les PS prises ensemble; & à cause de la hauteur commune DA, on a ND | NM || DA | à toutes les PS prises ensemble.

Et par ce qu'on a démontré pour la superficie dans cet exemple, ND ou AE | NM || ER | CR, & aussi ER | CR || OA | 2 OA plus 2 AC; donc enfin OA | 2 OA plus 2 AC || DA diametre du cercle generateur | à la circonference de la roulette DPV; ou bien ce qui est la même chose, en doublant les antecedens de cette analogie, & prenant ensuite la moitié de la premiere raison, on aura OA | OA plus AC || 2 DA | DPV.

Pour ce qui est des portions de cette roulette comme PV, il s'ensuit de ce qui a été démontré, que si l'on fait OA | OA plus AC || 2 EP qui est la corde de l'arc répondant à la portion de la roulette | à la portion PV de la roulette.

Si les convexités de la generatrice & de la base étoient tournées du même côté, on trouveroit pour le second terme de l'analogie, OA moins AC, au lieu de OA plus AC, & le reste seroit de même.

Si dans cette roulette la base étoit une ligne droite, la composition tant de la superficie que de la circonference se déprimeroit; ce qui est facile à voir.

Exemple II.

On peut encore déterminer d'une autre façon la superficie & la longueur de cette espece de roulette, & en même tems celles des roulettes allongées ou raccourcies, lesquelles sont formées par des points qui sont au dedans ou au dehors du cercle generateur qui roule sur un autre cercle.

Lemme I.

FIG. 10. Soit le demi-cercle BDV, dont le diametre est BV, & le centre C; soit CD un rayon perpendiculaire à BV, & quelque ligne droite $P\pi$ parallele à BV, qui rencontre le cercle en P & π. Si sur le diametre prolongé ou non prolongé on prend quelque point A, & que de ce point on mene les lignes AD, AP, $A\pi$; je dis que le quarré de AP joint au quarré de $A\pi$ sera égal à deux fois le quarré de AD.

Des points P & π soient menées les prependiculaires PO, $\pi\omega$ au diametre BV. On aura par la construction CO égale à $C\omega$, & PO égale à $\pi\omega$. Mais à cause des triangles rectangles, APO, ADC, $A\pi\omega$, le quarré de AP est égal au quarré de PO plus le quarré de AO, lequel est égal au quarré de AC plus le quarré de CO plus deux rectangles CA par CO. Mais aussi le quarré de $A\pi$ est égal au quarré de $\pi\omega$ plus le quarré de AC plus le quarré de $C\omega$ moins deux rectangles CA par $C\omega$; & assemblant ces deux valeurs, on aura le tout réduit à deux quarrés de PO plus deux quarrés de CO plus deux quarrés de AA C. Mais le quarré de PO plus le quarré de CO, est égal au quarré de CP ou de CD; donc les deux quarrés de AP & de $A\pi$ seront ensemble égaux à deux quarrés de AC plus deux quarrés de CD, lesquels sont ensemble égaux à deux quarrés de AD. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Ce sera la même démonstration si l'on prend le point A sur le cercle en V, ou sur le diametre BV au dedans du cercle.

Lemme II.

FIG. 11. Les mêmes choses étant posées comme dans le Lemme précedent, si par le point A on mene AE perpendiculaire à VB & soit AE de quelle grandeur on voudra, laquelle soit la base de trois triangles AEP, $AE\pi$ & AED; je dis que les deux triangles ensemble AEP, $AE\pi$ sont doubles du triangle AED.

Ayant

Ayant mené les lignes *EO*, *Eω*, *EC*, on formera trois autres triangles *AEO*, *AEω*, *AEC*, qui seront égaux aux précedens, puisqu'ils ont la même base *AE* & les mêmes hauteurs. Mais ces trois triangles qui ont la même base, sont entr'eux comme leurs hauteurs *Aω*, *AC*, *AO*, qui sont des grandeurs en proportion arithmetique par la construction; c'est-pourquoi la somme des extrêmes est double de celle du milieu, ce qui sera aussi des triangles qui sont en même proportion. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Si le point *A* étoit pris sur le diametre *VB* au dedans du cercle; alors si *CA* est plus grande que *CO* ou *Cω*, le cas est le même que le précedent: mais si le point *O* ou *ω* tombe en *A*, alors *AO* est double de *AC*, & la proposition est évidente: Et enfin si *CA* est plus petite que *CO*, alors on aura la difference entre *AO* & *Aω* qui sera double de *AC*, & ce sera la même chose pour les triangles.

Construction & démonstration de la Proposition.

Soit le cercle *AVN* dont le centre est *O* pour la base de la roulette, & le cercle generateur *DBA* dont le centre est *C*, & le point décrivant *F* placé où l'on voudra. FIG. 12.

Il est évident que dans le roulement du cercle generateur *DBA* sur la base, le point décrivant tracera un cercle *FIHG* concentrique au generateur, & par rapport à ce cercle *DBA* & sur son plan, dans toutes ses positions differentes sur la base; mais le point décrivant tracera la roulette *FM* par rapport à la base & sur son plan.

Soit le point décrivant *F* en quelque position comme en *I*, Si par le point *I* on mene *IK* parallele au diametre *DA* du cercle generateur qui passe par le centre *O* de la base, quand le point décrivant est en *I*, & qu'on mene aussi les lignes *Ii*, *Kk* & *CB* perpendiculaires au diametre; & qu'on suppose que le cercle generateur se soit avancé sur la base en roulant, d'une partie *AE* indéfiniment petite; ayant tiré les lignes *AI*, *AH*, *AK*; *EI*, *EH*, *EK*; & *Ei*, *EC*, *Ek*, on aura par le Lemme 2 les deux triangles ensemble *AEI*, *AEK*, qui sont égaux aux

deux triangles *AEi*, *AEk*, à cauſe des hauteurs égales, égaux au double du triangle *AEH*, égal au triangle *AEC*, & qui eſt auſſi égal au triangle *AEB*; donc tous les triangles enſemble *AEI*, *AEK* dans la roulette *FMNA* ſeront auſſi égaux au double de tous les triangles *AEB* ou *AEC*, puiſqu'ils auront tous les mêmes petits arcs *AE* du cercle *ABD* pour baſe : mais la baſe *AVN* étant égale au demi-cercle *AB*, tous les triangles comme *AEI*, dont *AEK* en ſera auſſi un, ſeront enſemble égaux à tous les triangles *AEB* ou *AEC*, qui auront les mêmes baſes *AE* qui compoſent le demi-cercle *ABD*; donc enfin tous les triangles comme *AEI*, ſeront égaux à la ſurface du demi-cercle *ABD*, à laquelle tous les triangles *AEB* ou *AEC* ſont égaux ; ce qui eſt évident.

Ce ſera la même choſe ſi le point décrivant eſt ſur la circonference du cercle generateur *ABD*.

Mais outre les triangles *AEI* dans la ſuperficie de la roulette, il y en a encore d'autres comme *EIR* ou *AIR* pour la remplir entierement, ſuivant ce que nous avons dit d'abord dans la generation ; & tous ces triangles ſont ſemblables, car ils doivent tous avoir un même angle en *E* ou en *A*, & leurs côtez ſeront *EI*, *EH*, *EK*, ou bien *AI*; *AH*, *AK*; car on regarde ces lignes comme égales entr'elles, les points *A* & *E* étant pris pour un même point. C'eſt-pourquoi tous ces triangles ſemblables ſeront entr'eux comme les quarrés de leurs côtés *AI*, *AH*, *AK*. Mais par le Lemme 1. le quarré de *AI* & le quarré de *AK* ſeront enſemble égaux au double du quarré de *AH*; c'eſt pourquoi les deux triangles ſemblables *AIR*, *AKX* ſeront enſemble égaux au double du triangle ſemblable *AHY*.

Il ne reſte donc plus qu'à connoître la ſomme de tous les triangles *AHY* ou *EHY*.

J'ai déja expliqué que tous les angles du ſommet, comme *HEY* de ces triangles ſemblables, doivent être égaux à l'angle *CEQ* qui eſt l'exterieur du triangle *CEO*, & qui eſt égal aux deux interieurs *OCE*, *COE*.

Je dis maintenant que ſi par le point *O* on mene la ligne *Oh* parallele à *AH* ou *EH* qu'on regarde comme la même, & qu'au point *h* on éleve ſur *Oh* la perpendiculaire *hq* laquelle rencontre en *q* la ligne *OC*; & qu'on faſſe comme *OA* à *OA* plus *Oq*, ainſi la ſuperficie du demi-cercle generateur *DBA*, à une autre ſuperficie, cette ſuperficie ſera égale à celle de la demi-roulette *FMNVA*, ſoit interieure, ſoit exterieure, ſoit moïenne; ce que je démontre comme il ſuit.

Toute la ſuperficie de la demi-roulette eſt compoſée de quadrilataires comme *AEIR* formez ſur tous les arcs *AE* du demi-cercle generateur *ABD*, leſquels par ce que nous venons de rapporter ſont égaux à autant de triangles *AEH* ou *AEC* qu'il y a d'arcs *AE* dans le cercle, & qui tout enſemble ſont égaux au demi-cercle *ABD*; plus à autant de triangles *EHY* ou *AHY* qu'il y a auſſi d'arcs *AE* dans le demi-cercle *ABD*.

Mais le triangle *AEC* eſt au triangle *AHY* dans la raiſon compoſée de la baſe *AE* à la baſe *HY*, & de la hauteur *CA* à la hauteur *AH*, car on conſidere ces triangles comme rectangles.

Mais *AE* eſt à *HY* dans la raiſon compoſée de la raiſon de *AE* à *CQ* qui eſt la partie de la ligne *CB* coupée par *OE* prolongée, & *AE* eſt à *CQ*, comme *OA* à *OC*, & de la raiſon de *CQ* à *HY* qui eſt auſſi celle de *EC* à *EH*, ou de *AC* à *AH*.

Donc la raiſon du triangle *AEC* au triangle *AHY* ſera celle du produit de *AO* par *AC* par *CA*, au produit de *OC* par *AH* par *AH*, qui eſt celle du quarré de *CA* par *AO*, au quarré de *AH* par *OC*.

Mais par la conſtruction le quarré de *CA* eſt au quarré de *AH*; ou bien, ce qui eſt la même choſe, le quarré de *CO* eſt au quarré de *Oh*, comme *CO* à *Oq*: Donc la raiſon du triangle *AEC* au triangle *AHY* ſera celle de *CO* par *AO* à *Oq* par *OC*; & à cauſe du côté commun *CO*, ce ſera celle de *AO* à *Oq*.

Donc enfin le triangle *AEC* eſt au triangle *AHY*,

comme *AO* à *Oq*. Et composant le triangle *AEO* est au triangle *AEC* plus le triangle *AHY*, ce qui forme la figure ou quadrilatere *AEYH*, comme *AO* à *AO* plus *Oq*; & le triangle *AEC* est au quadrilatere *AEYH*, comme tous les triangles *AEC* égaux entr'eux, qui forment le demi-cercle *ABD*, à tous les quadrilateres *AEYH* égaux entr'eux, qui forment la roulette *FMNVA*. Donc *AO* sera à *AO* plus *Oq*, comme le demi-cercle *ABD* à la demi-roulette *FMNVA*. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Cette démonstration & construction convient à toutes ces sortes de roulettes, soit que le point décrivant soit au dedans ou au dehors du cercle generateur, ou sur sa circonference. Mais dans ce dernier cas il est évident qu'au lieu de *AH* on aura *AB*, ce qui donnera le triangle isocelle *ACB*, & par consequent aussi le triangle isocelle *Ahq*, d'où l'on voit que *CO* & *Cq* seront égales entr'elles; & par consequent la raison de *OA* à *OA* plus *Oq*, se réduira à celle de *OA* à trois *OA* plus deux *CA*, qui est celle qu'on a trouvée par l'autre methode dans l'exemple précedent.

On trouvera aussi les parties de ces roulettes par les mêmes constructions. Et enfin ce sera la même chose pour toutes les roulettes tant allongées que raccourcies dont la base sera une ligne droite, qui n'est qu'un cercle dont le centre est à distance infinie; car alors les *Oh* & les *hq* qui sont paralleles aux *AH* & *Hp*, donneront des parties *AO*, *pq* aussi infinies; & les *AC* & *Cp* n'entrent point en comparaison avec elles, quoique dans leur étenduë infinie elles ne laissent pas de conserver toûjours la même raison des *AC* à *Cp*. C'est-pourquoy on aura alors le cercle generateur à la superficie de la roulette, comme *AO* infinie à *AO* infinie plus *Oq* infinie. Mais cette *Oq* infinie est composée de *AO* infinie & de *Aq* infinie, qu'on ne considere que comme *pq* infinie; & *AO* infinie étant à *pq* comme *AC* à *Cp*, le rapport du cercle generateur à ces sortes de roulettes, sera comme *AC* à *AC* plus *Ap*, ou comme *AC* à 2 *AC* plus *Cp*.

Dans la premiere de ces roulettes où le point décrivant est sur le cercle generateur, & où alors *Cp* devient égale à *CA*, il s'ensuit que la surface de la roulette sera triple du cercle generateur, puisque *AC* plus *Ap* sera égal à trois *AC*.

Mais en general pour toutes ces roulettes qui ont la base en ligne droite, si l'on tire par le point *A* la ligne *Af* perpendiculaire à *CO*, & qu'on la prenne égale à *AH*, la ligne *Cf* sera le rayon d'un demi-cercle égal à la demi-roulette. Car par les démonstrations précedentes *CA* est à *CA* plus *Cp*, comme le demi-cercle generateur à la demi-roulette, & comme le quarré de *CA* au quarré de *CA* plus le quarré de *AH*, ce qui est égal au quarré de *Cf*.

Pour les longueurs de ces roulettes on voit dans la figure précedente qu'elles sont toutes composées de toutes les bases *IR* des triangles semblables *EIR* ou *AIR*, & ces bases sont entr'elles comme les côtés *IA*: c'est-pourquoi comme *IA* sera à *IB* dans un des triangles, ainsi toutes les *IA*, à toutes les *IR* qui seront les longueurs de la roulette.

Si l'on prend la premiere ou la plus grande *IA* qui est *FA*, & la premiere ou la plus grande *IR* qui est *FZ* qu'on détermine dans cette figure, qui est la même que la précedente, & qu'on a seulement separée pour éviter la confusion des lignes, en faisant comme *AC* à *AF*, ainsi *CQ* à *FZ*, ou bien en menant la ligne *AQ* qui rencontre en *Z* l'arc *FZ* décrit du centre *A* sur le rayon *AF*, ou *FZ* perpendiculaire à *DA*, ce qui est la même chose dans des arcs indéfiniment petits, comme on les suppose icy, on aura *FA* à *FZ*, comme toutes les *IA* à toutes les *IR* qui sont ensemble égales à la longueur de la roulette. Donc on a *FA* par toutes les *IR* égal à *FZ* par toutes les *IA*. FIG. 15

Soit mené *CE* qui coupe l'arc *GH* au point *s*, on aura l'arc *Gs* du cercle *FHG* semblable à l'arc *AE* du cercle *ABD*.

Mais toutes les *IA* par *Gs* seront à toutes les *IA* par *FZ*, comme *Gs* à *FZ* à cause de la hauteur commune *IA*. Si l'on détermine donc toutes les *IA* par *Gs*, & qu'on connoisse le rapport de *Gs* à *FZ*, on aura toutes les *IA* par *FZ* qui doivent être égales à *FA* par toutes les *IR*.

Mais on trouvera la raison de *Gs* a *FZ* en considerant qu'elle est composée de celle de *Gs* à *AE*, qui est celle de *CG* à *CA*; & de celle de *AE* à *CQ*, qui est celle de *OA* à *OC*; & enfin de celle de *CQ* à *FZ*, qui est celle de *CA* à *AF*; & ces trois raisons font celle du produit de *CG* par *OA* par *CA* au produit de *CA* par *OC* par *AF*, laquelle se réduit à celle du produit de *CG* par *OA* au produit de *OC* par *AF*, à cause de la hauteur commune *CA*.

Et si l'on mene *OH* & *Ar* parallele à *OH*, on aura *OC* à *CG* ou *CH*, comme *OA* à *Hr*; c'est-pourquoi le produit de *CG* par *OA* sera égal au produit de *OC* par *Hr*, & substituant ce produit de *OC* par *Hr*, à la place du produit de *CG* par *OC* dans la derniere raison trouvée, elle se réduira à celle du produit de *OC* par *Hr* au produit de *OC* par *AF*, laquelle se réduit encore à celle de *Hr* à *AF*, à cause de la hauteur commune *OC*, laquelle sera celle de *Gs* à *FZ*.

Il ne faut plus maintenant que trouver le produit de toutes les *IA* par *Gs*, & l'on en tirera par la raison de *Hr AF* le produit de toutes *IA* par *FZ*, qui doit être égal au produit de *FA* par toutes les *IR*, & par consequent ce produit étant divisé par *FA*, donnera toutes les *IR* égales à la longueur de la roulette.

FIG. 14. Le demi-cercle *FHG* étant donné avec son diametre *EF* prolongé d'un côté & d'autre, & le point *A* aussi donné sur ce diametre; si l'on mene le rayon *CH* perpendiculaire à *FG*; & menant aussi *AH* avec sa perpendiculaire *HP* qui rencontre le diametre en *P*, on aura le rectangle de *AC* par *AP* égal au quarré de *AH*.

Maintenant si l'on fait *CV* égale à un demi *AP*, & qu'on prenne *VK* égale à *AC*, & qu'enfin du point *K* pour centre & pour rayon *KV* on décrive le demi-cercle *VNM*,

une ligne telle qu'on voudra *ON* perpendiculaire à *FA*, laquelle coupe les deux cercles en *P* & en *N*, fera *AI* égale à *VN*.

Car le quarré de *AH* est égal au rectangle de *AC* par *AP* par la construction, ou bien égal au rectangle de 2 *AC* par $\frac{1}{2}$ *AP*, & $\frac{1}{2}$ *AP* est égal à *CV*, & 2*AC* égal à *VM*.

Le quarré de *AI* est égal au quarré de *OI* plus le quarré de *AC* plus le quarré de *CO* plus le rectangle de 2*AC* par *CO*; & le quarré de *CI* étant égal au quarré de *OI* plus le quarré de *CO*, il s'ensuit que le quarré de *AI* sera égal au quarré de *CI* ou *CH* plus le quarré de *AC* plus le rectangle de 2*AC* par *CO*, & enfin le quarré de *AI* sera égal au quarré de *AH* plus le rectangle de 2*AC* par *CO*.

Mais enfin le rectangle de 2*AC* ou *VM* par *CO* plus le rectangle de 2*AC* ou *VM* par *VC* ou $\frac{1}{2}$ *AP*, lequel est égal au quarré de *AH*, sera égal au quarré de *VN* par la construction; donc le quarré de *AI* sera égal au quarré de *VN*, & *AI* égale à *VN*. On fera une semblable démonstration si la ligne *ON* est au-dessous de *CH*.

On voit aussi que si l'on décrit une Parabole *VX* dont *VF* soit l'axe, *V* le sommet, & son parametre égal à *VM* ou 2*AC*, elle aura toutes ses ordonnées *OX* qui couperont les cercles *FHG*, *MNV* aux points *I* & *N*, égales à *AI* & à *VN*.

Ainsi les ordonnées *OX* de la parabole *VX* étant élevées perpendiculairement sur les points *I*, formeront une figure sur le cylindre droit qui a pour base le cercle *FHG*, laquelle sera égale à tous les *IA* par *Gs*, ou égales ensemble à chaque *IA* par chaque *Gs*, ou égales ensemble à chaque *IA* par chaque *Gs* qu'on suppose égales entr'elles.

Il paroît enfin que si l'on éleve le plan de la parabole *VX* perpendiculairement sur son axe *VM*, & qu'on imagine un cylindre droit qui ait pour base cette Parabole, sa superficie coupera de la superficie du cylindre droit qui ait pour base le cercle *FHG*, la même figure que nous venons de déterminer. *Ce qu'il falloit faire.*

On peut auſſi faire la même operation d'une maniere un peu plus abregée, en ſe ſervant du calcul des lieux ; c'eſt pourquoi je l'emploïeray dans la methode ſuivante pour trouver d'une maniere differente de la précedente, la même valeur de toutes les *IA* par *Gs*.

FIG. 15. Soit le cercle *FIG* dont le centre eſt *C*, & ſur ſon diametre *FG* prolongé ſoit le point *A*, d'où ſoit mené les lignes *AI* à la circonference du cercle. Du point *G* pour centre & pour rayon *GF* ſoit décrit le quart de cercle *FTS*, lequel aura ſon rayon double de celui du cercle *FHG*. Soit auſſi dans le cercle *FIG* quelque corde *GI* prolongée en *T* juſqu'au cercle *FTS*. Du point *T* ſoit mené *TQ* perpendiculaire à *GS*. On ſçait que *TQ* doit être égale à *GI*.

Maintenant ſoit fait $CG = r$. $GQ = y$. $CA = a$. donc $FG = 2r$.

Si l'on mene *AI* on trouvera ſa valeur ; car *GI* eſt la même que $TQ = \sqrt{4rr - yy}$.

Mais $4rr =$ au quarré de $GT \mid yy \parallel 4rr - yy \mid \frac{4rryy - y^4}{4rr}$ $= IO$ quarré.

Mais auſſi *CI* quarré moins *IO* quarré $= CO$ quarré, ce qui eſt $rr - \frac{4rryy + y^4}{4rr}$, ou bien $\frac{4r^4 - 4rry + y^4}{4rr} = CO$ quarré, & par conſéquent $\frac{2rr - yy}{2r} = CO$.

Donc enfin $a + \frac{2rr - yy}{2r}$, ou bien $\frac{2ar + 2rr - yy}{2r} = AO$, & par conſéquent *AI* quarré $= AO$ quarré plus *IO* quarré, ce qui eſt $\frac{4aarr + 4r^4 + 8ar^3 - 4aryy - 4rryy + 4rryy - y^4}{4rr}$, ce qui ſe réduit à $\frac{raa + r^3 + 2rra - ayy}{r}$, ou bien à $aa + rr + 2ra - \frac{ayy}{r}$. Mais pour abreger ſoit $aa + rr + 2ra = dd = AF$ quarré : donc $dd - \frac{ayy}{r} = AI$ quarré, & faiſant cette valeur $= zz = QX$ quarré, on aura $dd - \frac{ayy}{r} = zz$, ou bien $dd - zz = \frac{ayy}{r}$, ou enfin $dd - zz - \frac{rayy}{rr}$, qui eſt un lieu à l'Ellipſe, laquelle paſſera par tous les points *X*, & qui ſera très-facile à conſtruire.

Car

Car si l'on prolonge GF jusqu'en M, & qu'on prenne $CM = CA$, & que GM comme diametre on décrive le demi-cercle GhM qui rencontre CH prolongée en h, on aura Ch quarré $=$ au rectangle CG par $CM = ra$.

C'est-pourquoy ayant mené Mh prolongée jusqu'à GS en V, on aura GM & GV pour les deux demi-axes de l'Ellipse MXV; & toutes les ordonnées comme XQ au petit axe de cette Ellipse seront égales aux IA, & les arcs FT seront égaux aux arcs FI.

Il s'ensuit donc que si l'on éleve toutes les ordonnées XQ sur les points T, on aura la même figure que si on élevoit les $IA = XQ$ sur les points T, & cette figure sera une portion de cylindre droit dont la base est le cercle FTS,

Cette figure déterminée se réduira comme la précedente pour en tirer la valeur de la longueur de la roulette cherchée.

On voit aussi que si l'on éleve l'Ellipse MXV perpendiculairement sur son axe GV, & qu'on imagine un cylindre droit qui ait pour base cette Ellipse, la rencontre de sa superficie avec celle du cylindre droit, dont la base est le cercle FTS, retranchera de ce dernier une figure égale à celle des XT élevées sur les points T.

Si la base de ces sortes de roulettes étoit une ligne droite, on trouvera par la même methode la valeur de la superficie cherchée, qu'on pourra égaler à d'autres figures.

Exemple III.

Autre espece de roulette.

Si la generatrice de la roulette est une ligne droite, & que le point décrivant soit un des points de cette ligne, & que la base soit un cercle, on pourra connoître la superficie & la longueur de cette roulette, puisqu'on connoît tout ce qui est necessaire pour ce sujet tant dans la generatrice que dans la base. Car puisque la ligne qui décrit la ligne droite par son évolution est un point à distan-

ce infini, & que celle qui décrit le cercle eſt un point à diſtance finie, on connoîtra comme on a fait cy-devant la grandeur des triangles qui compoſent cette roulette.

FIG. 16. Soit la ligne generatrice *AM* dont le point *P* joint au point *A* ſoit celui qui décrit la roulette, & que le cercle *AB* en ſoit la baſe. Ayant pris les parties *AE*, *EI* de la generatrice égales entr'elles & indéfiniment petites; lorſque les lignes *EC*, *IC* qui touchent celle qui décrit la generatrice *AM* par ſon évolution, ſeront jointes aux lignes *DE*, *DI* de celle qui décrit la baſe par ſon évolution, le point décrivant *P* ou *A* ſe ſera mû en *F* & en *Q*, & l'angle *PEF* ſera égal à l'angle *CEK*. De même l'angle *FIQ* ſera égal à l'angle *LIG*; car *CI* ſera poſée en *LI* quand *PE* eſt en *FE*, & *LI* ſera parallele à *KE*: mais tous ces angles *CEK*, *LIG* & les autres ſemblables étant toûjours égaux entr'eux par la conſtruction, les angles *PEF*, *FIQ* ſeront auſſi égaux entr'eux, puiſqu'ils ſont égaux à l'angle *CEK* ou aux angles égaux *ADE*, *EDI*.

Tous les triangles comme *PEF*, *FIQ* étant donc conſiderez comme iſoſcelle qui ont l'angle du ſommet égal en tous; l'eſpace de la roulette *PQNOBA* en quelque endroit qu'elle ſoit terminée par ſa ligne décrivante comme en *ON* & par ſa baſe *ABO*, ſera égal à la ſomme de tous ces triangles iſoſcelles ſemblables.

Mais tous ces triangles iſoſcelles ſemblables ont tous leurs côtés en proportion arithmetique; car chaque côté ſera égal aux parties de la generatrice comme *EP*, *IP*, &c. qui augmentent de parties égales entr'elles, & à *PE*, *EI*, &c. C'eſt-pourquoi cet eſpace de la roulette *PQNOBA*, dont la baſe *ABO* ſera égale à la partie *AM* de la generatrice, ſera égal à un eſpace qui ſera au tiers du ſecteur de cercle *DABOD* comme le quarré de la ligne *AM* ou de la partie *ABO* de la baſe qui lui eſt égale, eſt au quarré du rayon *DA* de la baſe.

Car les angles *ADE*, *EDI* du ſecteur ſont égaux à ceux des triangles iſoſcelles qui compoſent l'eſpace de la roulette, & auſſi en même nombre: mais ſi de tous les petits

secteurs comme *ADE*, *EDI* qui composent le grand secteur *ADOBA*, on en retranche des parties vers le sommet *D* qui soient de petits triangles isoscelles dont les côtez soient en proportion arithmetique depuis le point *D* jusqu'à la ligne *DO*, il est évident que la somme de tous ces petits triangles retranchez sera égale au tiers du secteur. Mais aussi chacun de ces petits triangles isoscelles aura une même raison à celui qui répond dans la roulette comme *PEF* à celui qui est retranché de *ADE*; *FIQ* à celui qui est retranché de *ADE*, & ainsi des autres : c'est-pourquoi la somme des triangles retranchez du secteur de cercle, sera à la somme des triangles semblables aux petits secteurs qui composent la roulette, comme un seul de ceux du secteur à un seul de ceux de l'espace de la roulette, qui pourra être le dernier dans l'un & dans l'autre. Mais le dernier du secteur a pour côté le rayon du cercle, & celui de l'espace de la roulette a pour côté la ligne *AM* ou la partie *ABO* de la base égale à *ON*; & l'un de ces triangles étant à l'autre comme le quarré de son côté au quarré de celui de l'autre, il est évident que le tiers du secteur *ABOD* sera à l'espace de la roulette *AQNOBA*, comme le quarré de *DA* au quarré de *ON*. *Ce qu'il falloit démontrer pour l'espace.*

On peut déterminer aussi cet espace en décrivant un cercle qui ait pour rayon *ON*, qui est la partie de la generatrice qui a décrit la roulette depuis le point décrivant *P*: car si l'on prend le tiers d'un secteur de ce cercle, lequel soit semblabble au secteur de la base *ADOBA*, on aura l'espace de la roulette *AQNOBA*; ce qui est évident, puisque le secteur de la base sera au secteur semblable du cercle qui a pour rayon *ON*, comme les quarrés des rayons de ces cercles, & les tiers de ces secteurs étant aussi en même raison, celui du cercle dont le rayon est *ON* sera égal à l'espace qu'on cherche.

Pour la longueur de cette roulette, il est évident par la methode que j'ay donnée cy-devant, qu'elle doit être égale à la somme de toutes les bases des petits triangles

isoscelles comme *AEF*, *FIQ*, &c. Mais toutes ces bases ayant entr'elles même raison que les côtés de ces mêmes triangles qui sont isoscelles semblables entr'eux, & aux triangles ou secteurs égaux de la base *ADE*, *EDI*, si on en retranche de la base de semblables qui soient en progression arithmetique depuis le premier jusqu'au dernier, comme sont ceux de l'espace de la roulette, & comme je viens de dire en parlant de l'espace, il est évident que la somme de toutes les bases des petits triangles du secteur de la base de la roulette, sera à la somme de toutes les bases des triangles qui composent la roulette, comme celle du dernier de l'un à celle du dernier de l'autre: mais ces bases sont entr'elles comme leurs côtés qui sont dans le secteur de la base le rayon *DA*, & dans la roulette la ligne *ON*. Mais toutes les bases ensemble des petits triangles dans le secteur *ADOBA* de la base, sont égales à la moitié de la derniere prise autant de fois qu'il y a de triangles, c'est-à-dire à la moitié de tout l'arc *ABO* du secteur de la base. Donc comme *DA* est à *ON*, ainsi la moitié de l'arc *ABO* sera à la Courbe *PQN* de la roulette; ou bien, ce qui est la même chose, cette Courbe de la roulette sera égale à la moitié de l'arc du secteur de cercle semblable au secteur de la base, & décrit sur le rayon *ON*.

Ce que je viens de démontrer de la partie de la roulette *PQNOBA* se doit entendre de même de toute autre partie; car cette roulette est infinie si sa generatrice est supposée infinie, & elle fera plusieurs tours autour du cercle de la base; & pour déterminer tant l'espace que la longueur de sa ligne, si elle fait plus d'une révolution autour de la base, il faudra prendre pour secteur de cercle un ou plusieurs cercles entiers avec le secteur qui se trouvera de plus dans sa révolution, & comprendre dans sa superficie les espaces des révolutions inferieures autant de fois qu'il y aura de révolutions; ce qui est facile à voir par la generation.

On peut remarquer que cette roulette est aussi la ligne

qui eſt décrite par l'évolution du cercle dans le tout ou dans ſes parties, ou même dans pluſieurs révolutions. C'eſt auſſi une eſpece de Spirale; car ſi l'on aſſemble tous les ſommets *E*, *I* des triangles comme *AEF*, *FIQ* en un même point, au lieu qu'ils ſont icy diſpoſés autour de la circonference du cercle, on en fera la Spirale d'Archimede, ce qui eſt facile à voir, car toutes les lignes comme *FE*, *QI* ſeront en proportion arithmetique, & comprendront des angles égaux autour du point commun qui ſera le ſommet de tous les triangles.

Mais quoique l'on puiſſe conſiderer l'eſpace de la Spirale d'Archimede égal à celui de cette roulette, puiſqu'il eſt compoſé de triangle égaux aux précedens & indefiniment petits, ce qui eſt égal au tiers du ſecteur de cercle, dont le rayon eſt la ligne qui termine la Spirale, il ne s'enſuit pas que ſa ligne ſoit égale à la moitié de l'arc de ce même ſecteur, qui eſt la ſomme des baſes de tous les petits triangles *AF*, *EQ*, &c. comme avoit crû un celebre Geometre, n'ayant pas fait aſſez d'attention à la methode des indiviſibles. Car on ne peut pas appeller une ligne courbe continuë, celle qui n'eſt compoſée que de petites lignes toutes ſeparées & qui ne ſont point touchantes, quoiqu'on les conſidere indéfiniment petites & indéfiniment proches les unes des autres, mais dont on ne peut pas démontrer que la difference avec la ligne propoſée ſoit moindre qu'aucune quantité donnée. Il n'en eſt pas de même de la ſuperficie de cette figure, où les petits trilignes qui la compoſent ſont joints tous les uns aux autres, & approchent à l'infini de l'eſpace propoſé.

Voicy de quelle maniere on peut donner une ligne droite égale à la Spirale d'Archimede.

Soit une portion de Spirale *CEFGO* compriſe dans l'angle *ACO*, laquelle a été décrite par la ligne *CA* qui s'eſt meuë juſqu'en *CO* d'un mouvement égal, pendant que le point décrivant s'eſt meu auſſi ſur la ligne *CA* uniformément depuis le point *C* par l'eſpace *CA* égal à *CO*.

Que la ligne *CO* soit divisée en parties indéfiniment petites aux points *NQR*, &c.. & l'angle *ACO* en de petits angles tous égaux entr'eux, & dont le nombre soit égal à celui des parties de la ligne *CO*, & que *PCO* en soit le dernier. Si par toutes les divisions de la ligne *CO* on lui mene des perpendiculaires comme *NG*, *QM*, *RS*, qui pourront être considerées comme des arcs de cercles dont les rayons sont les lignes *CG CF*, *CE* qui décroissent en proportion arithmetique par la generation de la Spirale, puisqu'elles sont menées du centre *C* jusqu'à sa circonference aux points *GFE*, & qu'elles font des angles tous égaux entr'eux *OCG*, *GCF*, *FCE*, ces lignes *CG*, *CF*, *CE* seront aussi égales aux lignes *CN*, *CQ*, *CR*; c'est-pourquoi toutes les petites diagonales *OG*, *NM*, *QS*, &c. dans les petits quadrilataires *OPGN*, *NGMQ*, *QMSR*, seront égales aux portions de la Spirale *OG*, *GF*, *FE* comprises dans les angles égaux. Il s'ensuit donc aussi que la somme de toutes les diagonales *OG*, *NM*. *QS* dans le triangle *COP*, sera égale à toute la ligne spirale *OGEC*.

Maintenant si sur la même ligne *CO* on éleve les perpendiculaires *OB*, *ND*, *QH* par les points de division *ONQ*, &c. & qu'on les fasse égales chacunes à des lignes qui ayent même raison à *CO*, que les lignes *OG*, *MN*, *QS* ont aux parties égales *ON*, *NQ*, *QR* de la ligne *CO*; ces lignes renfermeront un espace *C V H B O*, qui sera au quarré de *CO* qui est *CT*, comme la somme des lignes *OG*, *GE*, *EF*, c'est-à-dire, la Spirale, à la somme des lignes égales *ON*, *NQ*, *QR*, c'est-à-dire, la ligne droite *CO*, ce qui est évident, puisque chacune de ces lignes tant dans l'espace *CVBO* que dans le quarré *CT*, sont multipliées par les parties égales *ON*, *NQ*, *QR*.

Je dis maintenant que l'espace *CVBO* est un espace hyperbolique dont *CV* est le demi-axe déterminé, & *C* le centre. *Ce que je démontre ainsi*,

Puisque les parties *ON*, *NQ*, *QR* sont des parties égales indéfiniment petites, aussi les parties de la Spirale *OG*, *GF*, *FE* ou *OG*, *NM*, *QS* seront indéfiniment petites,

& elles peuvent être ſuppoſées, ou touchantes, ou cordes de la Spirale. Soit OI perpendiculaire à CO & égale à l'arc de cercle OA qui a pour rayon CO, & qui eſt compris dans l'angle ACO.

Soit $CO = r$. $OI = s$, & les parties de CO comme $CQ = y$.

Ayant fait CX perpendiculaire à CO, & prolongé quelqu'une des diagonales comme QS en X ſur CX, il y aura même raiſon de QR à RS, que de QC à CX.

Si l'on prolonge QM perpendiculaire à CO ou parallele à OI juſqu'à la rencontre de CI au point K; il eſt évident que la ligne QK ſera égale à l'arc de cercle renfermé dans l'angle ACO ſur le rayon CQ. Mais lorſque le point décrivant eſt en Q ſur CO, ou en F ſur la Spirale, s'il vient F vers E ou de Q en S, il n'a plus que l'angle ACF à décrire, qui a même raiſon à tout l'angle ACO que CQ a à CO; car la ligne CO ſe meut également autour du point C, pendant que le point décrivant deſcend également de O vers C. La raiſon de QR à RS ou de QC à CX, doit donc être compoſée de celle de CQ à QK, & de celle de CO à CQ, qui eſt celle de Co à QK; mais QK eſt $\frac{sy}{r}$; donc QR à RS comme $r \mid \frac{sy}{r}$. Mais ſi l'on mene OY parallele à QSX, on trouvera $CY = \frac{sy}{r}$; car on aura $r \mid \frac{sy}{r} \| r \mid \frac{sy}{r}$.

Mais puiſque OY doit être égale à QH, & que l'on connoît ſeulement OY par ſon quarré qui eſt $= rr + \frac{ssy}{rr}$, ſi l'on veut faire un lieu de tous les points trouvés comme H, ſuppoſant $CQ = y$ comme on a fait, il faut poſer $QH = x$, ce qui donnera l'équation du lieu $rr + \frac{ss\,yy}{rr} = xx$ ou $\frac{ssyy}{rr} xx - rr$ à l'hyperbole. Ainſi l'on ſçait que la ligne $VHDB$ eſt une hyperbole dont le demi-axe $CV = r$ qui eſt auſſi $= CO$.

Mais par la nature de cette équation à l'hyperbole, il

est évident que si du point *O* on mene la ligne *OL* perpendiculaire sur *CI* jusqu'à la ligne *CX* en *L*, & que du sommet *V* de l'hyperbole on mene *VZ* parallele à *CO* & égale à *CL*, la ligne *CZ* sera l'asymptote de l'hyperbole *VHB*. Enfin si l'on fait que comme le quarré de *CO* qui est *CT* à l'espace hyperbolique *CVBO*, ainsi *CO* à une ligne droite, cette ligne droite sera égale à la longueur de la Spirale depuis le point *O* jusqu'au centre ou à l'œil *C* de la Spirale. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Exemple IV.

Voicy encore un exemple de ces sortes de lignes.

FIG. 18. Soit la premiere roulette *ABI*, qui a pour base la ligne droite *AE*, & pour cercle generateur *EFI*, & dont l'axe est *EI*. Si l'on forme une roulette *AMN* qui ait pour base la roulette *ABI*, & pour ligne generatrice une ligne droite, & que le commencement du roulement se fasse en *A*, on déterminera la superficie *ADINMA*, & la grandeur de sa ligne *AMN* en cette sorte.

Si l'on prend sur le cercle generateur de la roulette qui en est la base, des points comme *FGH* qui soient indéfiniment proches les uns des autres & à égale distance, & que par ces points on mene des paralleles *FB*, *GC*, *HD*, &c. à la base *AE* jusqu'à la rencontre de la roulette en *BCD*, & que la ligne generatrice se trouve dans les positions *BK*, *CL*, *DM* quand elle touche la base en *BCD*; à cause que les points *BCD* sont indéfiniment proches les uns des autres, on les peut regarder comme les sommets des triangles *KCL*, *LDM*, quoique ces sommets soient veritablement entre les points *BC* & *CD*. Mais ces triangles auront leurs angles du sommet *KCL*, *LDM* égaux entr'eux; car les lignes qui passent par les points *BCD*, & qui touchent les deux lignes qui décrivent par leur évolution la base & la generatrice, feront des angles égaux entr'eux, ce qui est évident, puisque la base étant une ligne droite, la ligne qui la décrit par son évolution est un point à distance infinie, & celle qui décrit

crit la base est une roulette semblable à la base, ce qui est connu. Mais les touchantes de cette roulette, ou bien les perpendiculaires à la roulette *ADI*, seront des lignes paralleles aux cordes du cercle *EF*, *EG*, *EH* qui feront des angles égaux entr'eux au point *E*; & par conséquent les touchantes *BK*, *CL*, *DM*, de la roulette *ADI*, qui sont aussi paralleles aux cordes *IF*, *IG*, *IH* feront des angles égaux entr'eux, puisque ces cordes font des angles égaux entr'eux au point *I*.

Mais par les proprietez connuës de la roulette, on sçait que la longueur des lignes *BK*, *CL*, *DM* sont égales au double de la difference qui est entre le diametre *IE* du cercle generateur & les cordes *IF*, *IG*, *IH* : c'est pourquoi si du centre *I* & pour rayon *IE* on décrit le quart de cercle *EQR*; & si l'on prolonge les cordes *IF*, *IG*, *IH*, jusqu'au quart de cercle en *OPQ*, les lignes *BK*, *CL*, *DM* seront chacune double de *FO*, *GP*, *HQ*: car les longueurs des parties de la roulette *IB*, *IC*, *ID* sont doubles des cordes *IF*, *IG*, *IH*, & toute la roulette *IA* est égale au double *IE*.

Mais dans le demi-cercle toutes les cordes comme *IF* sont égales aux sinus comme *OS* du quart de cercle. C'est-pourquoi si l'on conçoit un cylindre droit sur le quart de cercle *EPR*, & que ce cylindre soit coupé par un plan incliné au plan de sa base d'un angle demi-droit & qui la rencontre en *RI*, on sçait que la superficie de ce quart de cylindre comprise entre la base & le plan coupant, sera égale à la superficie formée par tous les sinus sur leurs arcs, & égale au quarré du rayon *IE*; mais la superficie de ce cylindre qui a pour hauteur le rayon *IE*, sera égale au rectanglé *IR* dont le côté *EPR* est égal à la circonference du quart de cercle, & le côté *IE* égal au rayon du quart de cercle. Mais aussi la portion de cette superficie cylindrique comprise entre le plan coupant & le plan superieur, sera égale à la figure faite de toutes les parties *FO*, *GE*, *HQ*, qui sont les differences entre les sinus comme *OS*, ou les cordes comme *IF* & le rayon *IE* ou *IO*,

Fig. 19.

& cette figure *EGVR* sera le complément de la figure des sinus *EGVI*.

Il est donc évident que toutes les lignes comme *OF*, *PG* dans le complément de la figure des sinus, garderont toutes entr'elles la même proportion que les côtez *BK*, *CL*, *DM* des triangles qui composent la figure de la roulette *ALN*. Mais comme tous ces triangles sont semblables comme *KCL*, *LDM*, &c. ils seront tous entr'eux comme les quarrés de leurs côtez, ou comme les cercles qui auront ces côtez pour rayons ; & par consequent si l'on fait tourner la figure *EGVR* sur la ligne *ER* comme axe, le Conoïde pointu qui s'en formera, sera au cylindre qui se formera du rectangle *EV* qui tourne aussi sur *ER* pour axe, comme la somme de tous les petits triangles comme *KCL*, *LDM* qui composent la roulette *AIN*, au dernier triangle *INY* pris autant de fois qu'il y a de triangles dans la figure de la roulette.

Mais le dernier triangle *INY* pris autant de fois qu'il y a de triangles dans la figure de la roulette, est égal au quadruple du quart de cercle *IER* : car le dernier triangle qui a pour côté *IN*, est quadruple de celui qui a pour côté *IR*, & pour base une des divisions du cercle comme *OP* : donc comme le cylindre formé par le rectangle *EV* est au conoïde formé par le complément de la figure des sinus, ainsi le cercle entier sur le rayon *EI* sera à la superficie de la roulette *ADINMA* ; ou bien si sur chacune des ordonnées *PT*, *Od* dans la figure des sinus on prend *Pa*, *Ob* troisiémes proportionnelles après *PT*, *PG* & *Od*, *OF*, &c. il y aura même raison du cercle sur *PT* au cercle sur *PG*, que de la ligne *PT* à la ligne *Pa*, &c. Donc le cylindre sera au conoïde pointu comme le rectangle *EV* à la figure *EaVR*. Mais le rectangle *EV* n'étant consideré que comme la moitié du cercle entier dont le rayon est *IE*, aussi la figure *EaVR* ne donnera que la moitié de la roulette.

Maintenant pour la longueur de cette roulette *AMN*, puisqu'il y a même raison entre la base *NY* du dernier

triangle *INY* pris autant de fois qu'il y a de triangles, à la somme des bases de tous les triangles, que du rectangle *EV* au complément *EaVR* de la figure des sinus; & que la somme de la base *NY* du dernier triangle, laquelle est double d'une des divisions du quart de cercle comme *OP*, est double aussi de la circonference du quart de cercle; donc la circonference du demi-cercle qui a pour rayon *IE*, sera à la circonference de la roulette *AMN*, comme le rectangle *EV* au complément *EGVR* de la figure des sinus *EGVI*. Mais le rectangle *EV* est égal au demi-cercle dont le rayon est *IE*, & la figure des sinus est égale au quarré du rayon: donc enfin la circonference du demi-cercle dont *IE* est le rayon, sera à la roulette *AMN* comme la superficie du demi-cercle, à la difference de cette même superficie avec le quarré du rayon. Mais la superficie du demi-cercle est à la difference entre cette même superficie & le quarré du rayon, comme *IV* circonference du quart de cercle à la difference entre *IV* & *IE*; donc la longueur de la roulette sera double de la difference entre *IV* & *IE*, qui est aussi la difference double entre le diametre du cercle generateur de la base & sa demi-circonference.

METHODE GENERALE.

Pour réduire toutes les Lignes courbes à des Roulettes, leur generatrice ou leur base étant donnée telle qu'on voudra.

Et premierement la base étant donnée de position, il faut trouver la generatrice de la Courbe comme étant une Roulette.

PAR M. DE LA HIRE.

Soit une ligne courbe *ADB* donnée telle qu'on voudra 1706.
que l'on considere comme une roulette, dont la ligne 13. Aoust.
CB droite ou courbe soit aussi donnée de position pour la FIG. 20.
base de cette roulette.

De tous les points *DLN* de la Courbe *A*, soit mené à la Courbe les perpendiculaires *DF*, *LM*, *NO*, &c. indéfiniment proche les unes des autres, lesquelles rencontrent la base donnée en *F*, *M*, *O*, &c.

Sur quelqu'une de ces perpendiculaires comme *DF* pour base, soit formé le triangle *DFG*, dont le côté *DG* soit égal à la plus proche *LM* des perpendiculaires après *DF*, & le côté *FG* égal à la partie indéfiniment petite *FM* de la base donnée & comprise entre les perpendiculaires *DF*, *LM*. De même sur *DG* pour base égale à *LM* soit formé le triangle *DGH* dont le côté *GH* soit égal à *NO*, & le côté *GH* égal à *MO*, & ainsi de suite tant d'un côté que d'autre de la premiere *DF* qu'on a prise.

Il se formera par ce moïen une ligne droite ou courbe *IHGFK* qui sera la generatrice de la Courbe *ADB* proposée pour roulette, & dont la base *CB* est donnée de position, & le point *D* qui est l'extremité de la perpendiculaire *DF* qu'on a prise d'abord, sera le point décrivant de la roulette par rapprot à la generatrice trouvée dans la position où elle est sur la base *CB*.

On voit par la formation de la generatrice trouvée *IHGFK* que lorsqu'elle roulera sur la base *CB* proposée, le même point *D* du plan de la generatrice, doit passer successivement par tous les points de la Courbe *DLN*. Car la generatrice touchera la base dans tous ses points *FMO*, lorsque les points de la generatrice *FGH* qui leur répondent y seront posez, & alors les lignes *DG*, *DH* seront jointes aux perpendiculaires *LM*, *NO*. Et par consequent les lignes qui décrivent par leur évolution la base & la generatrice, auront une touchante commune qui passera par le point où la base & la generatrice se touchent ; ce qui suit de ce qui a été démontré d'abord.

Les differentes bases proposées pour une même Courbe donnée comme roulette, formeront des generatrices differentes qui auront des proprietez particulieres, comme toutes les bases qui ne rencontrent pas perpendiculairement les roulettes proposées, donneront des genera-

trices qu'on ne pourra terminer, quoique leur longueur soit connuë qui est celle de la base. La Spirale dont tous ses rayons font des angles égaux avec elle, est une Courbe de cette nature ; car si on la fait rouler sur une ligne droite qui lui serve de base, la roulette qu'elle formera sera une ligne droite ; & si une ligne droite étoit proposée comme une roulette, & qu'on donne une autre ligne droite pour sa base qui ne lui soit pas parallele, on trouvera pour sa generatrice une Spirale telle que nous venons de l'exposer ; mais si la base étoit parallele à la roulette, la generatrice seroit un cercle, & le centre en seroit le point décrivant ; ce qui est vrai aussi de toutes sortes de Courbes proposées, quand on propose pour base une ligne qui lui est parallele ; ce qui est évident, puisque tous les rayons comme *DF*, *DG*, *DH* seront tous égaux entr'eux.

Pour déterminer la nature de ces generatrices, il faut connoître quelque proprieté particuliere des perpendiculaires à la roulette proposée par rapport à la base donnée, ou quelque chose d'équivalent, comme on le verra clairement dans l'exemple suivant.

Exemple suivant.

Soit la Courbe *ADP* proposée comme une roulette, & soit donné sa base *CB* une ligne droite. Ayant pris sur la Courbe les parties *AD*, *DP*, indéfiniment petites, soit mené les perpendiculaires *AF*, *DM*, *PO* à la Courbe ; mais ayant formé comme on a expliqué cy-devant le triangle *AFG*, ensorte que les points *FG* soient sur la generatrice, on donne cette proprieté, que dans tous les triangles comme *AFG* formez pour trouver la generatrice, l'angle *FAG* sera égal à l'angle *AED* que font les deux perpendiculaires *AF*, *DM* en se rencontrant au point *E*. FIG. 212

Il s'ensuit de cette proprieté donnée que le triangle *AEM* ou *AEG*, car les deux points *M* & *G* ne sont regardez que comme un autre point, sera isoscelle ; & par

consequent l'angle *AMD* exterieur du triangle *AME* sera double de l'interieur *FAM* ou *FAG*.

Mais par ce qui a été démontré cy-devant, le point qui décrit la roulette étant en *A*, la touchante de la ligne qui décrit la generatrice *FG* par son évolution sera *FM* perpendiculaire à la generatrice *FG* & à la base *CB*, & sera aussi jointe à celle qui décrit la base par son évolution.

De même dans la seconde position du point décrivant en *D*, la ligne qui décrit la generatrice par son évolution comme *MK* sera aussi perpendiculaire à la base *CB*. C'est-pourquoi l'angle *DMK* sera plus grand que l'angle *AFM* de la quantité de l'angle *AED* ou son égal *FAG*.

Mais lorsque le point *D* étoit au point *A* & *DM* en *AG*, la ligne *KM* perpendiculaire à la generatrice devoit être placée en *MG*, & elle devoit rencontrer *FM* en quelque point *N*, ensorte que l'angle *FNG* étoit double de l'angle *FAM*.

Car les points *M* & *G* n'étant considerés que comme un seul point, si l'angle *DMK* se meut sur *M*, & que son côté *MD* passe en *MA*, le côté *MK* passera en *MN* ou *GN*, & l'angle *KGN* sera égal à l'angle *DMA*. Mais l'angle *DMA* a été démontré double de l'angle *FAM*; donc l'angle *KGN* est double de l'angle *FAM* ou *FAG*. Mais aussi à cause des paralleles *FN*, *MK*, l'angle *FNG* sera égal à l'angle *KGN*; donc enfin l'angle *FNG* sera double de l'angle *FAG*.

Il s'ensuit delà que les points *FGA* seront à la circonference d'un cercle dont le point *N* sera le centre, & les lignes *NF*, *NG*, *NA* seront égales entr'elles.

Si l'on poursuit la description de la generatrice comme on a enseigné, en cherchant un autre point *H*, ensorte que le triangle *AGH* soit formé par les lignes *PO* & *MO* sur *AG* égale à *DM*, on démontrera comme on a fait ci-devant que l'angle *GAH* sera la moitié de l'angle *GQH* formé par la ligne *GN* & par la ligne *OI* placée en *HQ*, & qui rencontrera *GN* en quelque point *Q*, & par con-

sequent le cercle qui passeroit par les points *GHA* auroit son centre en *Q*, & les lignes *QG*, *QH*, *QA* seroient égales entr'elles ; mais ce point *Q* placé sur *GN* ne peut pas être different du point *N*, puisque *NG* & *NA* sont aussi égales entr'elles ; c'est-pourquoi le point *N* sera le centre d'un cercle qui passera par les points *FGHA*.

On fera la même démonstration pour tous les autres points qu'on trouvera de la generatrice ; & par consequent la generatrice cherchée sera un cercle qui aura *NF* pour son rayon, & dont le point décrivant *A* de la Courbe proposée, sera placé à l'extremité d'un de ses diametres.

Autre Exemple.

Soit une Courbe *FB* donnée pour roulette, & la ligne droite *VA* aussi donnée pour sa base, & soit *FV* l'axe de la Courbe qui est perpendiculaire à la Courbe en *F* & à la base en *V*. FIG. 22.

Si de tous les points comme *B* de la Courbe on mene une perpendiculaire *BD* à la base, la proprieté de cette Courbe est telle que si sur *B D* comme diametre on décrit le demi-cercle *BOD*, & qu'on y mene la corde *BO* égale à l'axe *FV*, la ligne *BOA* sera perpendiculaire à la Courbe *FB* proposée.

Ayant tiré *DO*, on aura le triangle rectangle *DOB* semblable au triangle rectangle *ADB* ; & par consequent le rectangle *AO*, *OB* sera égal au quarré de *DO*.

Maintenant si sur quelque perpendiculaire à la Courbe comme *BA*, ou sur l'axe *FV* qui lui est aussi perpendiculaire, on forme la generatrice *AHI* par la methode proposée ci-devant, le point *B* étant le point décrivant, & toutes les lignes comme *BA*, *BH* representant dans cette generatrice les perpendiculaires à la Courbe, & *BI* étant la plus courte qui represente *FV*, *BI* sera aussi l'axe de la generatrice, & la perpendiculaire *Id* sur *BI* au point *I* representera la base *VD* perpendiculaire à l'axe *FV* en *V*.

Il s'ensuit de la proprieté donnée que si du point *B*

pour centre & pour rayon *BI* égale à *FV*, on décrit un cercle *IEO*, il doit passer par tous les points comme *O* des lignes qui representent sur la generatrice les perpendiculaires comme *BA* à la Courbe *FB*, & que *DI* menée du point *D* au point *I* de la generatrice, touchera le cercle en *I*, & sera égale à *DO*. Car par la formation de la generatrice, puisque la partie *BK* de la Courbe proposée *BKF* est indéfiniment petite, & *AB* étant perpendiculaire à la Courbe en *B*, on peut considerer *AK* comme égale à *AB*, & *KL* étant aussi perpendiculaire à la Courbe en *K*, le triangle *AKL* s'est placé en *ABH* pour la formation de la generatrice, ensorte que *AH* égale à *AL* est la corde indéfiniment petite de la generatrice, & par ce mouvement l'angle *BAK* est égal à l'angle *HAL*. Mais par le Lemme suivant l'angle *AKL* est double de l'angle *BAK*; donc tous les angles ensemble comme *ABH* égaux aux angles *AKL* qui sont formez dans la generatrice par les lignes menées du point *B* aux points de cette generatrice jusqu'à l'axe *BI*, feront ensemble un angle *ABI* double de tous les angles *BAK*, ou de ceux que font toutes les cordes comme *HAL* les unes avec les autres qui sera l'angle *IdT*. Et si par tous les points *K* on mene des paralleles *KS* aux perpendiculaires les plus proches comme *KA*, l'angle *AKS* étant égal à l'angle *BAK* qui est la moitié de l'angle *AKL*, on aura l'angle *SKL* égal à l'angle *BAK*. Mais aussi tous les angles ensemble *SKL* que font toutes les perpendiculaires à la courbe les unes avec les autres de suite, ne peuvent être égaux qu'à l'angle *ABD* fait de la premiere *AB* & de la derniere *VF*, ou de sa parallele *DB* : c'est-pourquoi l'angle *ABI* sera double de l'angle *ABD*, & par consequent la ligne *Id* perpendiculaire à *BI* en *I* tombera sur *ID*, & les deux triangles *DBO*, *DBI* seront égaux & semblables, & *DI* touchera le cercle *IEO* en *I* & sera égale à *DO*.

Mais de plus, puisque l'angle *DBI* est égal à l'angle *DBA*, & que *ADT* touche la generatrice en *A* & qu'elle rencontre

rencontre l'axe *BI* en *T*, *DA* sera égale à *DT*; & si du point *A* on mene *AR* parallele à *DI* ou perpendiculaire à l'axe *IB*, *IR* sera égale à *IT*, ce qui est une proprieté de la touchante d'une parabole au point *A*. Et comme ce sera la même chose pour tous les autres points de la generatrice *IHA*, les points *I* & *B* demeurant les mêmes, il s'ensuit que la generatrice sera une parabole.

Mais comme les deux triangles rectangles *TAR*, *ADO* ont leurs angles égaux en *T* & en *A*, ils seront semblables, & *TR* sera double de *AO*, comme *TA* est double de *AD*; donc *RI* est égale à *AO*, & par consequent le rectangle *RI*, *IB* ou le rectangle *AO*, *OB* qui lui est égal puisque leurs côtés sont égaux, lequel est égal au quarré de *DO*, sera aussi égal au quarré de *DI* qui sera le quart du quarré de *AR* ordonnée à l'axe *IB* & double de *DI*; donc enfin le point *B* est le foyer de cette parabole.

LEMME.

Soit le demi-cercle *HIG* dont le diametre *HG* est perpendiculaire sur la touchante *GA* prolongée vers *F*, & soit une corde *HI* appliquée dans le cercle & prolongée en *A* à la touchante *GA*. FIG. 2[illegible]

Soit aussi *HE* perpendiculaire à *HA* au point *H*; & de quelque point *E* indéfiniment proche de *H* soit *EF* perpendiculaire à *GA* & par consequent parallele à *HG*, & sur *EF* soit décrit le demi-cercle *ELF*. Du point *E* soit appliqué dans le cercle *ELF* la corde *EM* égale à la corde *HI* & prolongée en *D*, & soit mené *ELB* parallele à *HA*, & de plus la ligne *EA*.

A cause de l'angle *BED* indéfiniment petit, on a *EL* | *EM* || *ED* | *EB*. Mais à cause des paralleles qu'on a menées *EL* | *EM* ou *HI* son égale || *EF* | *HG* & || *EB* | *HA* ou *EA* qu'on peut lui supposer égale: donc *ED* | *EB* || *EB* | *EA*.

Mais *DA* étant indéfiniment petite par rapport à *EB* grandeur déterminée, si l'on mene *RBS* perpendiculaire à *ED* & à *EA*,

C'eſt pourquoi ayant *ED* | *EB* || *EB* | *EA*, ſi l'on diviſe, on aura *ED* | *EB*—*ED*, ce qui eſt *DR* || *EB* | *EA*—*EB*, ce qui eſt *SA*, donc *ED* | *EB* || *DR* | *SA*. Mais la difference des deux *ED*, *EB* eſt indéfiniment petite; donc la difference des deux *DR*, *SA* qui ſont elles-mêmes indéfiniment petites, ſera encore indéfiniment petite; c'eſt pourquoi elles doivent être conſiderées comme égales entr'elles, & *BR*, *BS* auſſi égales; & par conſequent l'angle *BER* égal à l'angle *BES* égal à l'angle *EAH*, donc l'angle *AED* ſera double de l'angle *EAH*.

Secondement.

Une courbe telle qu'on voudra étant propoſée comme une roulette avec une autre Courbe auſſi telle qu'on voudra pour être ſa generatrice, & donnée de poſition avec un point de la roulette ſur le plan de la generatrice, comme point décrivant, la generatrice étant dans la poſition donnée, il faut déterminer la baſe.

FIG. 24. Soit la Courbe propoſée *AP* pour roulette, & la Courbe *BE* pour generatrice qui eſt donnée de poſition par rapport à la roulette *AP*, quand le point décrivant *P* du plan de la generatrice eſt auſſi donné de poſition ſur la roulette quand la generatrice eſt en *BE*.

On ſuppoſe qu'on ſçache mener des perpendiculaires tant à la Courbe *AP* qu'à la generatrice *BE*.

Soit donc du point *P* la perpendiculaire *PB* à la roulette *AP*, laquelle rencontre en *B* la generatrice *BE*. Soit auſſi par le point *B* de la generatrice la ligne *CB* qui lui ſoit perpendiculaire, & qui par les propoſitions précedentes doit auſſi être perpendiculaire à la baſe dans ce même point *B*, quand le point *P* décrivant eſt ſur la roulette. C'eſt pourquoi ſi l'on mene *BF* perpendiculaire à *CB*, elle touchera la generatrice *BE* & la baſe auſſi dans ce même point *B*; & par conſequent une portion de *BF* indéfiniment petite & contiguë à ce point, ſera conſiderée comme partie de la baſe & de la generatrice tout enſemble.

Mais ſoit un autre point *A* de la roulette indéfiniment

proche du point *P*, & par ce point *A* soit la perpendiculaire *AG* à la roulette, laquelle rencontre la generatrice en *G* dans la position où elle est, & la touchante *FB* en *I*. Maintenant si sur *PB* on forme le triangle *PHB* dont le côté *BH* soit égal à *BG*, & le côté *PH* égal à *AG*.

Ayant fait mouvoir ce triangle *PHB* sur le point *B*, ensorte que la ligne *BH* soit posée en *BI* sur *FB*, & le côté *HP* en *IL*, & *BP* en *BL*, l'angle *PBL* sera égal à l'angle *HBI*, & les points *G* & *I* ne doivent être considerés que comme un même point, puisque la partie *BI* de la touchante *FB* de la Courbe *GB* est indéfiniment petite.

Mais si dans cette position du triangle *HPB* en *ILB*, la ligne *IL* n'est pas posée sur *GA*, & qu'elles fassent ensemble un angle comme *LIA*, par le point *I* soit mené la ligne *IK* qui fasse avec *FIB* au point *I* l'angle *FIK* égal à l'angle *LIA*, il s'ensuit que si l'on fait mouvoir sur le point *I* le plan sur lequel est le triangle *BIL*, ensorte que la ligne *IL* qui est *GD* ou *IA* soit placée sur *IA*, la ligne *IF* qui étoit touchante de la base en *B*, sera placée en *IK*, & le point *G* de la generatrice étant placé en *I*, toute la generatrice aura changé de place dans cette seconde position, ensorte que la perpendiculaire à *IK* au point *I* sera touchante des Courbes qui décrivent la generatrice & la base par leur évolution, ce qui suit des premieres propositions. Ainsi on aura les positions de toutes les touchantes indéfiniment petites de la base, comme *BI*, *IK*, &c. ce qui formera cette base.

Il s'ensuit delà que si le point *L* est joint au point *A* après le premier mouvement que la ligne *HP* a fait en *IL*, la base aura un recourbement dans le point *B*; mais si le point *L* est placé entre *P* & *A* comme dans cette figure, la base aura sa convexité tournée vers *P*, au contraire si le point *L* est au delà de *AI*, la base aura sa concavité tournée vers *A*; car il faudra dans le second mouvement ramener *IL* en *IA*, ce qui suit des propositions qu'on a démontrées d'abord.

On pourra auſſi déterminer la nature de la baſe ſi l'on a quelque proprieté particuliere tant de la roulette donnée que de la generatrice : mais il me ſuffit d'en avoir indiqué la methode, comme j'ai fait dans l'exemple précedent pour la détermination de la generatrice par les proprietez de la roulette & de la baſe.

SUITE DE LA PREMIERE Partie du Supplément au Memoire ſur la Voix & ſur les Tons.

PAR M. DODART.

IV. ADDITION.

De la difference des tons de la parole & de la voix du chant par rapport au recitatif, & par occaſion, des expreſſions de la Muſique antique & de la Muſique moderne.

1706. 14. Avril.

JE n'avois pas deſſein de rien dire ſur la difference des tons de la voix de la parole & de la voix de chant : mais à l'occaſion de ce que j'ai dit ſur la difference du ſon de ces deux voix, je dirai ce que je penſe ſur la difference de leurs tons, ſur ce en quoi elle conſiſte, ſur l'uſage qu'on en fait dans la Muſique recitative, ſur celui qu'on y en pourroit & peut-être qu'on y en devroit faire, & ſur ce qu'on pourroit attendre pour la perfection de cet art en ce qui eſt du chant, dans le progrès merveilleux qu'il a fait pour la ſimphonie depuis ſon renouvellement, c'eſt-à-dire, depuis près de 700 ans juſqu'à preſent. Car ce bel art avoit été abſolument perdu durant plus de 700 autres années avant Guy d'Arezzo pere de la Muſique telle que nous l'avons, très-differente de l'antique, fort au-deſſus pour le contre-point, & peut-être même pour le chant en ce qui regarde le plaiſir de l'oreille, mais fort au-deſſous en tout ce que le chant peut avoir de ca-

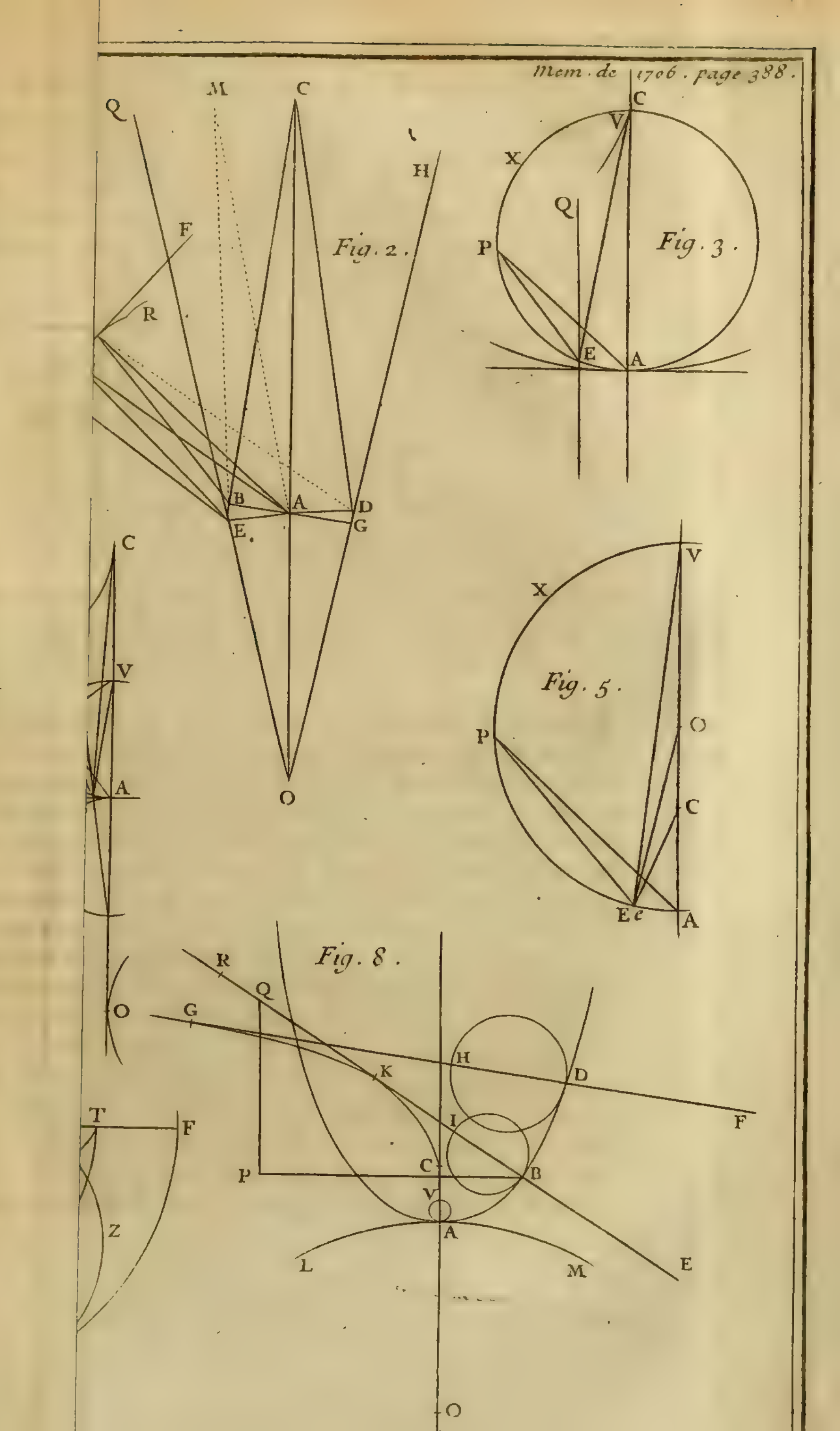
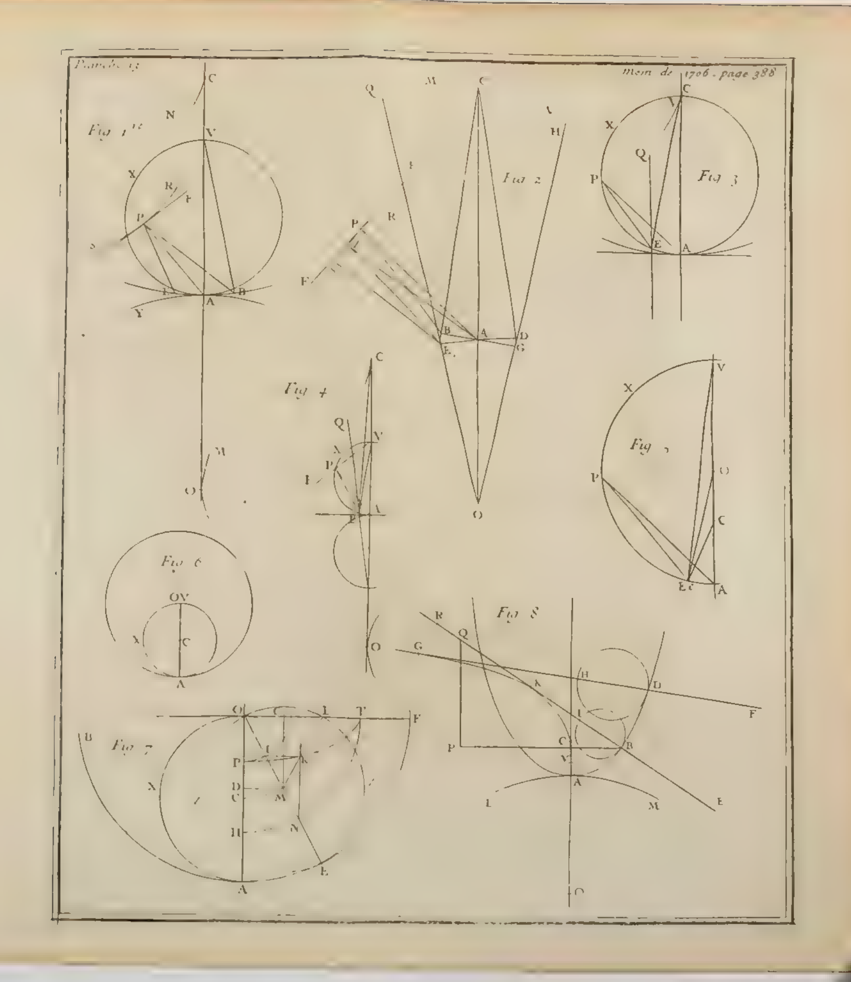
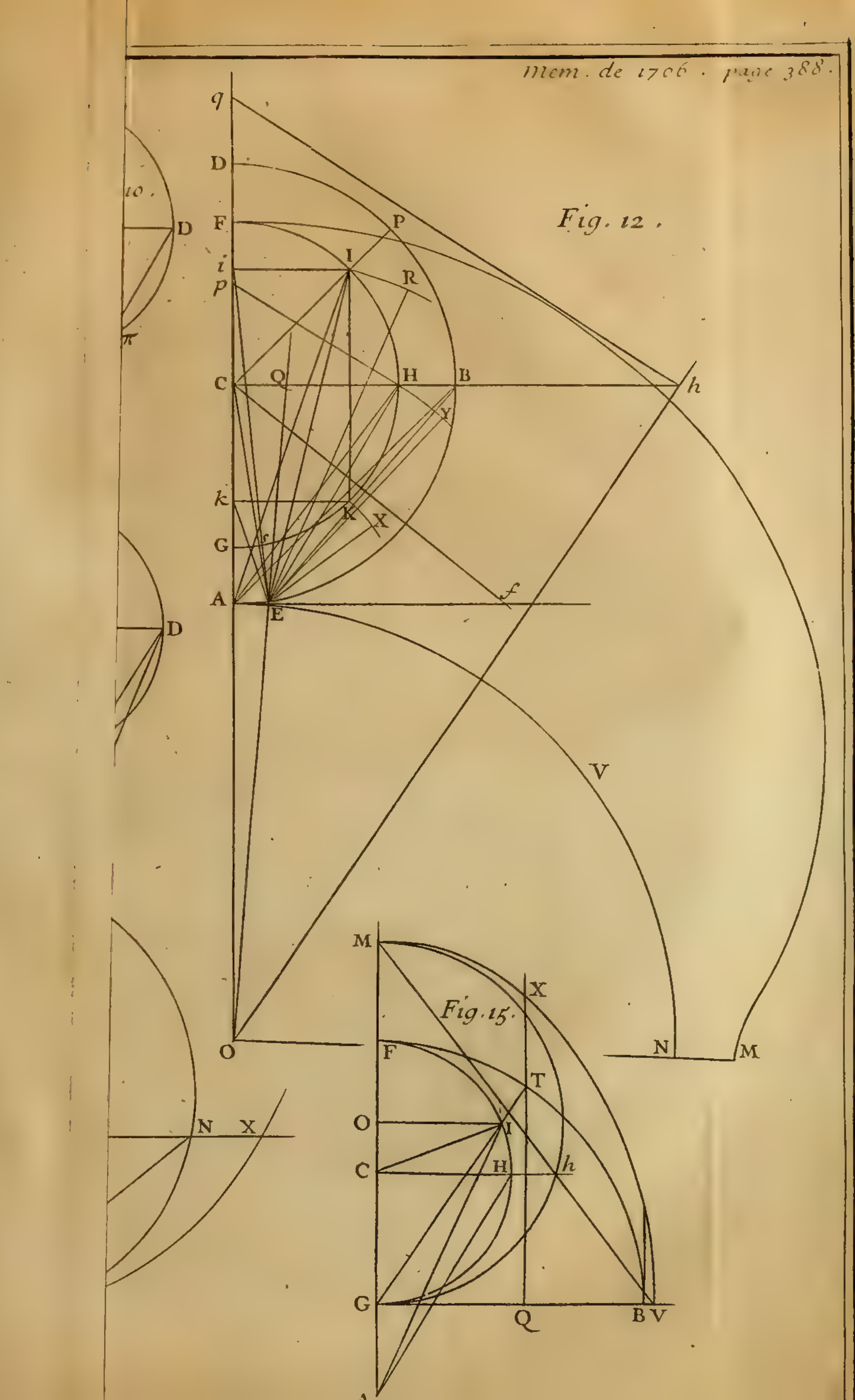


Fig. 2.
Q
M
C
H
F
R
B
A
D
E
G
O
Fig. 3.
C
V
X
Q
P
E
A
Fig. 5.
V
X
P
O
C
E
e
A
C
V
A
O
T
F
Z
Fig. 8.
R
Q
G
H
D
K
F
I
C
P
B
V
A
L
M
E
O


Fig. 1.re
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 7
Fig. 8


Fig. 12 .
q
D
F
P
i
I
R
p
C
Q
H
B
h
Y
k
K
X
G
A
E
f
V
O
N
M
Fig. 15 .
M
X
F
T
O
I
C
H
h
G
Q
B V
10 .
D
π
D
N X

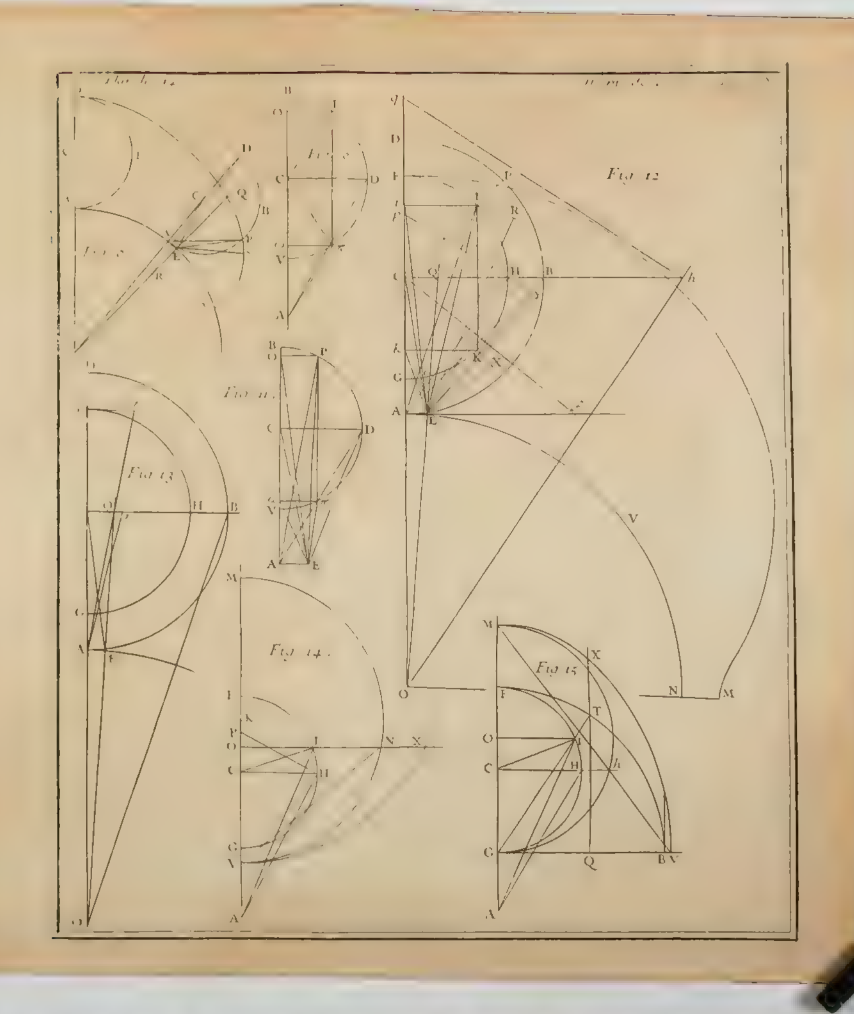
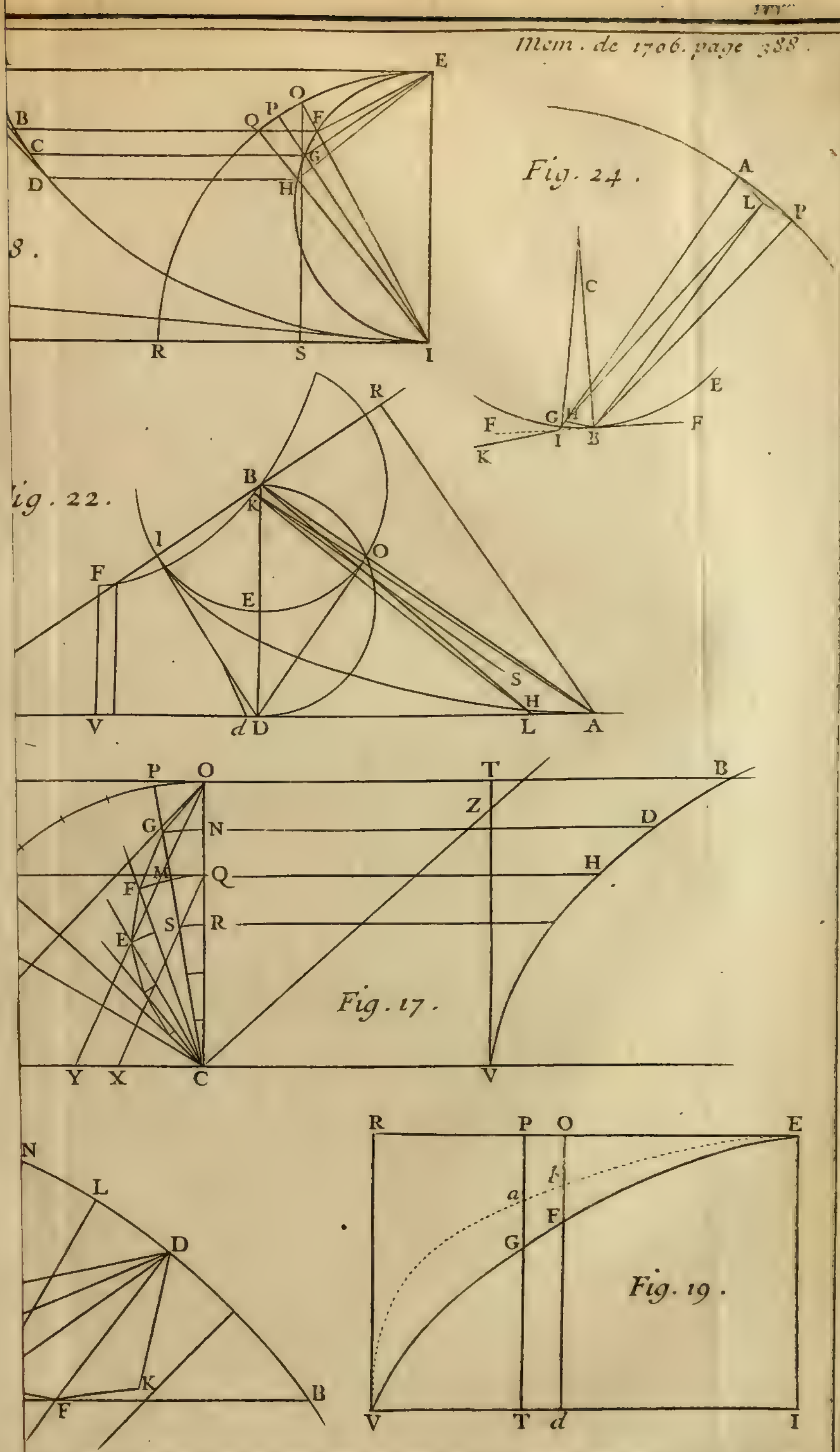
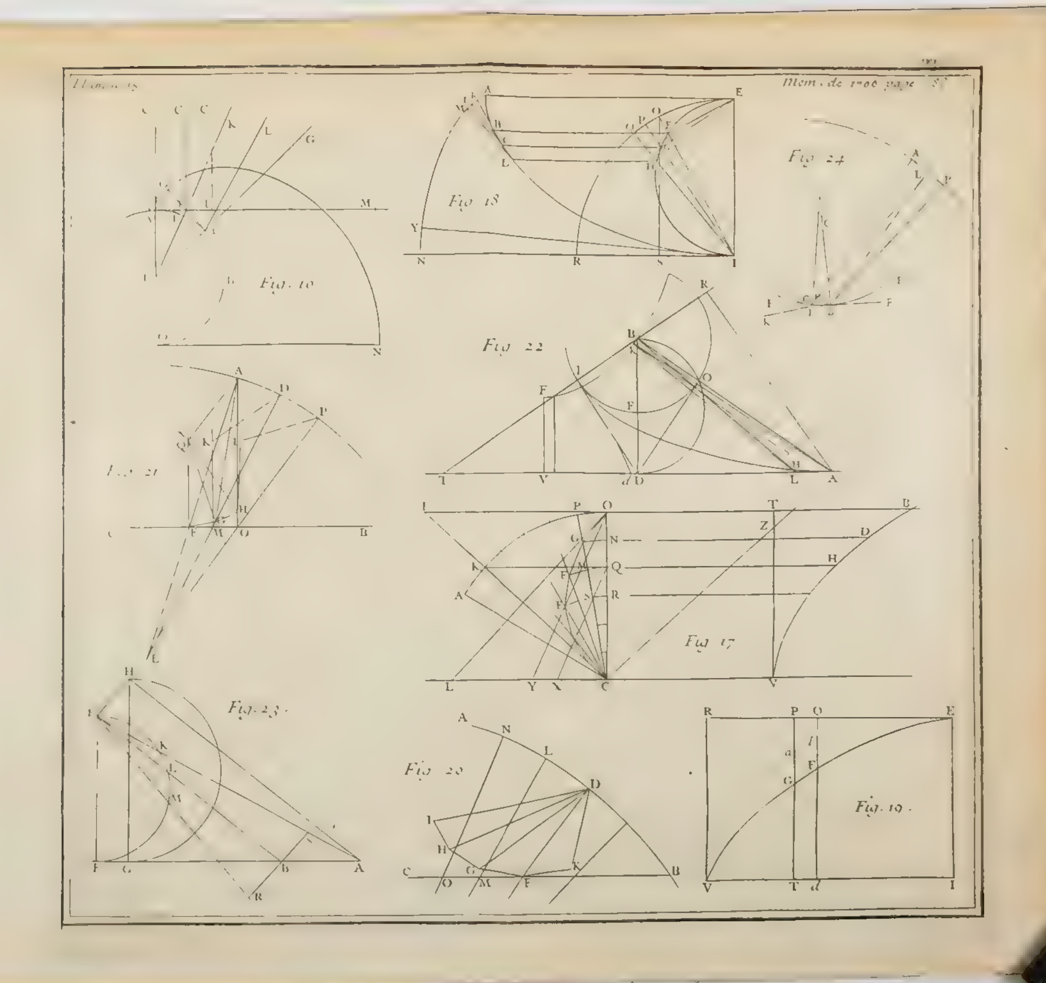


Fig. 12
Fig. 13
Fig. 14
Fig. 15



E
O
P
Q
F
B
C
G
D
H
8.
R
S
I
Fig. 24.
A
L
P
C
E
G
H
F
F
I
B
K
R
B
Fig. 22.
K
I
O
F
E
S
H
V
d D
L
A
P
O
T
B
Z
G
N
D
M
Q
H
F
S
R
E
Fig. 17.
Y
X
C
V
N
L
D
K
F
B
R
P
O
E
a
F
G
Fig. 19.
V
T
d
I


Mem. de 1706 page
Fig. 10
Fig. 18
Fig. 24
Fig. 22
Fig. 21
Fig. 17
Fig. 23.
Fig. 20
Fig. 19.

pable de toucher le cœur par l'expression des mœurs & des passions, dont les anciens Grecs ont sçû tirer de si grands avantages. Car la Musique étoit chez les Anciens un art très-serieux, étant consideré comme important au gouvernement des Etats par la part qu'ils lui donnoient à l'éducation de la jeunesse. Cet âge s'étendoit à cet égard jusqu'à 28 ans chez certains Peuples, & chez d'autres jusqu'à 30. Le but des Anciens du premier âge immediatement après les tems heroïques, environ mille ans avant l'Ere commune, étoit de former les mœurs, de moderer les passions qui les pouvoient corrompre, & d'exciter celles qui pouvoient les regler & les conserver, & cela par un moyen agreable capable d'insinuer la vertu. Celle-cy étoit leur fin, & le plaisir le moyen. Ainsi leur principale attention dans la Musique étoit d'émouvoir certaines passions, & calmer les autres pour parvenir au reglement des mœurs & toucher le cœur d'une maniere convenable à ces deux intentions. Quant au reste, c'est-à-dire, le plaisir de l'oreille, ils n'y avoient d'égard qu'autant qu'il étoit possible sans préjudice de leur principale intention.

Il falloit donc imiter dans le chant les tons les plus naturels aux passions, & ces tons doivent être dans la Musique recitative, & on peut même dire en toute Musique, surtout dans la vocale, les plus ressemblans qu'il se peut à ceux de la parole; car la parole a ses tons comme le chant a les siens. On connoît les tons de la parole dans la conversation; mais ces tons paroissent beaucoup plus dans les discours des personnes agitées de quelque passion que ce soit, & chaque passion a ses tons & ses mouvemens, au sens auquel on a coûtume de prendre ce mot en Musique. Les tons devroient être à peu près les mêmes en toute nation, car la nature est la même par tout; cependant il n'en est pas absolument ainsi. Il s'y mêle des tons d'institution qui sont ceux des langues & des dialectes; mais malgré ce mélange un homme attentif à une conversation passionnée entre plusieurs personnes de quelque nation que ce soit dont il ignoreroit la langue, distinguera

facilement par l'oreille ſeule quelle eſt la paſſion qui anime la converſation.

Il n'eſt pas aiſé de rapporter ces tons à la Muſique. Une perſonne paſſionnée ne penſe ni à chanter ni à divertir l'oreille, elle ne tend uniquement qu'à toucher le cœur en la maniere qui lui convient; par exemple, d'effroy ou de pitié, qui ſont les paſſions regnantes dans le tragique, ou de quelqu'autre paſſion ſelon les occaſions qui ſe preſentent dans la vie commune. Tout cela n'eſt touchant dans les ſpectacles & dans la Muſique, que parce qu'il l'eſt dans les actions ordinaires des hommes. Ainſi les tons & les mouvemens qui ont rapport aux paſſions ne ſont touchans dans la Muſique, qu'autant qu'ils ſont conformes aux tons & aux mouvemens que la paſſion produit dans le commerce ordinaire. Les intervales des ſons de la parole ne ſont ſouvent que d'un demi ton, quelquefois hors de mode, ſouvent d'un quart de ton. Cependant c'eſt delà que dépend preſque tout ce que la Muſique peut avoir de touchant par l'expreſſion des paſſions dans ſa partie harmonique. Car ils en comprenoient ſix ſous le nom de Muſique. Celle qu'ils comptoient la premiere & qu'ils regardoient comme la principale étoit la Rythmique, & celle qu'ils comptoient la derniere & qu'ils conſideroient le moins étoit l'Harmonique. Ils ſouffroient les fautes & les licences en celles-cy, mais ils n'en pardonnoient aucune dans la Rythmique. Cette partie regloit les démarches & certains autres mouvemens, le tems & la cadence de la recitation, les geſtes & la compoſition de toute la perſonne, & apparemment plus celle de ſon viſage que de tout le reſte du corps; car ils vouloient que tout concourût à l'expreſſion des mœurs & des paſſions. Cela étant, ce qu'ils pouvoient faire de mieux dans la partie harmonique de la Muſique pour arriver à cette expreſſion, c'étoit de ſe rendre attentifs aux inflexions naturelles de la voix paſſionnée, & de tâcher de les imiter dans la compoſition du chant. C'eſt ce qui a donné lieu au genre Chromatique de Timothée de Milet par les demi-tons

hors de mode, & à l'Enharmonique d'Olympe par la subdivision des semi-tons en quarts de ton.

On peut bien & mal user de ces subdivisions par rapport aux mœurs, car elles peuvent flatter les passions dangereuses, comme elles peuvent servir à en exciter de loüables & d'utiles. Mais sans entrer ici dans l'abus qu'on en peut faire, ces subdivisions ont servi dans la Musique antique à former une partie de ses expressions, & d'ailleurs il paroît certain que le genre enharmonique ne peut avoir été introduit que pour cette seule raison, n'offrant rien à l'oreille qui ne la doive blesser par la bizarrerie de ses intervalles, ni qui puisse plaire, sinon au cœur par une expression capable de le toucher, & par consequent capable de lui plaire dans l'imitation. Car il semble qu'on peut regarder le cœur à cet égard comme l'organe d'un sixiéme sens d'autant plus distingué des cinq sens externes, qu'ayant besoin des organes externes pour être ébranlé, & ne l'étant ordinairement que par leur rapport, il est souvent agreablement touché dans l'imitation, de ce qui frappe les sens desagreablement, & qui frapperoit le cœur de la même maniere, hors le cas de l'imitation.

Quoiqu'il en soit, les expressions de la Musique antique alloient à peindre les passions, dont les Legislateurs, les Magistrats & les Philosophes approuvoient la representation pour former les mœurs de l'Etat à la magnanimité, à l'humanité & à la sagesse, par la crainte & la pieté; plus curieux d'instruire & de toucher le cœur par des sentimens qui font les grands hommes, que de plaire à l'oreille en flattant les passions basses qui les avilissent, & qui n'ont nul besoin du secours de la Musique pour être excitées. Ces chants si concertés d'après nature n'étoient accompagnés pour tout contre-point que d'une espece de contre-partie en quarte, en quinte ou en octave sur l'instrument qui accompagnoit la voix; car les Anciens ne reconnoissoient pour accords ni les tierces ni les sixtes qui donnent un si grand jeu à la composition à plusieurs parties.

Cependant malgré cette ſimplicité ces chants faiſoient ſur les hommes, au moins une partie des grands effets auſquels toute l'antiquité rend témoignage. Effets ſurprenans qu'on a peine à croire en ce tems-cy, où on n'éprouve plus rien de pareil de la Muſique. Il ne ſeroit pourtant pas impoſſible de prouver non-ſeulement la poſſibilité, mais encore la verité d'une partie de ces grands effets. Mais cela ne ſe peut que dans un Memoire particulier, celui-cy n'étant déja que trop long.

Il n'auroit peut-être pas été impoſſible aux Anciens de rendre leur melodie morale & pathetique plus agreable, en la joignant avec une baſſe continuë, s'ils avoient ſçû le contre-point. Ils auroient même pû y joindre plus d'agrément, s'ils avoient connu le contre-point figuré : mais l'honneur du premier contre-point étoit reſervé à l'onziéme Siecle de l'Ere commune, & l'honneur du ſecond au quatorziéme. On pourroit donc dans 49 chordes du ſyſtême moderne, multipliées par le rétabliſſement des chordes du genre enharmonique juſqu'au nombre de 97, trouver tout enſemble & la Muſique expreſſive des Anciens, & l'agrément de la ſymphonie moderne, malgré les demi-tons hors de mode du Chromatique, & les quarts de ton de l'Enharmonique : mais trois cauſes nous priveront toûjours de cet avantage, malgré tous les efforts de la Muſique moderne pour parvenir à l'expreſſion. La premiere cauſe eſt l'impoſſibilité de faire entonner juſte aux Muſiciens des quarts de ton. C'eſt ce qui a fait renoncer toute la Muſique antique depuis Ariſtoxene, à plus forte raiſon toute la Muſique moderne au genre Enharmonique. La ſeconde cauſe eſt le peu de litterature d'une grande partie des Maîtres de l'art. La troiſiéme qui eſt une ſuite de la ſeconde, le peu d'attention que la plûpart des Maîtres donne à imiter les tons naturels. Ce n'eſt pas que tous les Maîtres de Muſique ne ſe piquent d'imiter, mais toute l'imitation que pluſieurs ſe propoſent ne conſiſte gueres en ce qu'il y a de moral dans le ſujet. C'eſt, par exemple, monter le ton quand le mot *Ciel* entre dans la

lettre

lettre du sujet, baisser le ton quand il y est parlé de la *Terre* & des abîmes, quoiqu'il fallût souvent faire tout le contraire par rapport au sens de la lettre. C'est encore imiter le bruit d'une tempête, ou d'un fracas, ou du tonnerre, ou l'agitation de la mer & des vents, quelques chûtes ou quelques vols qui sont choses si étrangeres à tout ce qu'il peut y avoir de moral dans la Musique, que rien au monde n'est plus propre à le faire entierement perdre de vûë. Cette imitation moderne consiste encore, & trop souvent, à exprimer par des tons & des mouvemens gais le sens d'une parole gaïe, enclavée dans un sujet serieux, grave ou même triste, ou à representer le sens d'une parole triste dans un sujet tout enjoüé, & tout cela parcequ'une partie des Maîtres ne cherche dans la Musique que la surprise de l'oreille des Auditeurs, sans aucun égard à satisfaire leur propre raison & celle de l'Auditeur. Je passe sous silence ces longs passages souvent composés de doubles & triples croches sur une seule syllabe, ces repetitions si multipliées, ces fugues & mille autres semblables jeux de composition, admirables surtout dans la Musique instrumentale, mais qui ne signifient rien dans la Musique vocale, sinon la délicatesse, la souplesse & la legereté d'un gosier capable de franchir ces passages à perte d'haleine, sur une seule syllabe, & le profond sçavoir d'un Compositeur capable de soûtenir l'agreable jeu de tant de parties les unes avec les autres. Car il n'y a personne qui ne s'apperçoive dans un moment de reflexion que tout cela ne va point au cœur, & n'est capable que de plaire à l'oreille & de la surprendre; ce qui paroît, comme j'ay dit cy-dessus, être l'unique ou le principal but de la Musique moderne. Il n'y a donc nulle apparence ni d'esperer le rétablissement de la Musique morale des Anciens pour la composition du chant & pour la culture politique des bonnes mœurs, ni de craindre ce rétablissement pour le mauvais effet qu'il pouvoit produire dans les mœurs, si on entreprenoit ce rétablissement sur le plan des mœurs publiques, & d'ailleurs rien n'est si opposé à la conciliation de

*J'en ay vû 46 sur une syllabe dans un motet d'*Occupati *Ce motet étoit sur le dernier Vers. du Pseaume* CXVIII. Erravi sicut ovis quæ periit, quære servum tuũ quia mandata tua non sum oblitus. *Et le passage étoit sur la syllabe* quæ *dans* quære

la Musique ancienne avec la moderne, quelque avantage réciproque qu'elles puissent tirer l'une de l'autre, que le charme des symphonies d'apresent, à cause de l'avantage que leur donne le système moderne par ses 49 chordes sur le système des Grecs, qui dans sa plus grande richesse n'a jamais eu que quinze chordes en chaque genre reglées sur l'étenduë ordinaire de la voix. Cela suffit sur la difference des tons de la parole aux tons musicaux.

V. ADDITION.

Les muscles propres des cartilages du larynx ne donnent aucun mouvement a la Glotte, qui ne soit contraire à la formation de la voix, ou qui y contribuë immediatement.

1706. 4 septemb. J'y dit dans les notes sur le Memoire de la voix, que qui considerera bien les suites de la Mechanique du larynx, telle que je l'ay décrite, tiendra pour prouvé que le seul usage des muscles propres exterieurs du larynx à l'égard de la voix, est de tenir ferme & ouverte la caisse composée des cartilages du larynx pour servir d'appui à la Glotte dans son mouvement actif, necessaire pour la voix: car elle a des mouvements passifs par certains muscles lateraux tant externes propres du larynx qu'internes propres à la Glotte même. Mais de ces muscles les externes ne peuvent que relâcher la Glotte & par consequent nuire à la voix, & les internes ne peuvent gueres que faciliter l'évacuation des gros excremens du poûmon. J'avois invité dans la même note Messieurs les Anatomistes à examiner cette matiere qui paroît importante pour confirmer la cause précise de la voix. En attendant leur décision je diray pour y donner lieu ce qui m'est venu dans l'esprit sur ce sujet.

Tout ce que j'ay lû d'Anatomistes imprimés qui sont entrés dans le détail des organes de la voix & des tons, ont crû que l'usage des muscles propres du larynx est de dilater la Glotte & de la resserrer ou de l'accourir & la dilater pour les tons bas, & de l'allonger & étrecir pour les tons hauts.

Il me paroît impossible que cela soit. La démonstration Mechanique résultede la position des muscles tant interieurs qu'exterieurs telle qu'elle est d'écrite sous la note susdite; car elle démontre qu'ils sont incapables d'augmenter ou diminuer la glotte, au moins d'une maniere qui puisse contribuer à la voix. De plus le raisonnement suivant me semble démonstratif.

Tous les mouvemens du larynx qui accourciroient la glotte approcheroient le cartilage anterieur des posterieurs. Or par cette approche ils en relâcheroient les levres, & il faut necessairement qu'elles soient bandées pour produire le son de la voix; car sans cela il n'y auroit nul fremissement, & sans fremissement il n'y auroit nul son de voix. De plus tous les mouvemns du larynx qui l'étreciroient iroient à l'allonger, ceux qui la dilateroient tendroient à l'accourcir. Or un de ces effets iroit à détruire ou à compenser l'autre, & par cette compensation il n'y auroit plus de changement de ton; car allonger est augmenter, & par-là tendre à produire un ton plus bas: étrecir est diminuer, & par-là tendre à produire un son plus haut. Ainsi le même mouvement iroit ou à produire deux effets incompatibles, ou à jetter à peu près le même son si on diminuoit autant l'ouverture en l'étrecissant qu'on l'augmenteroit en l'allongeant, réciproquement si on diminuoit autant l'ouverture en l'accourcissant qu'on l'augmenteroit en la dilatant. Aussi voit-on dans la coupe ou embouchure des anches des haut-bois que celles qui sonnent le plus bas sont tout ensemble & les plus ouvertes & les plus longues, & que les anches qui sonnent le plus haut sont tout ensemble & les plus serrées & les plus courtes. Les glottes depuis le plus bas âge où on a la voix la plus claire jusqu'à l'âge fait, où la voix est la plus grave vont toûjours en s'ouvrant & s'allongeant de plus en plus à proportion du progrés de l'âge jusqu'à l'âge de puberté, où l'accroissement précipité de tout le larynx fait müer la voix.

VI. ADDITION.

La suppression totale de l'air par la glotte formée exactement, confirme la même verité.

On peut voir dans le Memoire auquel celui-cy sert de upplément, la description de l'ouverture de la glotte en l'état où elle est mise pour produire la voix, & sous la note *b* l'état où est cette ouverture quand il ne s'agit que de respirer, ou de parler bas, ou de souffler, ou de donner issuë aux excremens du poûmon ; car elle a tous ces usages sans compter le nombre infini d'usages differens renfermés dans celui de produire la voix dans les sons innombrables que l'execution de la Musique suppose. Mais il n'est parlé dans ce Memoire qu'en un endroit & seulement en passant d'un troisiéme usage, qui consiste, dans la suppression totale & volontaire de la respiration, & il n'en est dit qu'un mot dans les notes, parce que dans ces deux endroits il ne s'agissoit pas principalement de cet usage, mais indirectement.

Cependant on peut tirer un grand avantage pour l'établissement de la cause précise de la voix, de l'état où la glotte se met elle même en supprimant l'air, & se rendant incapable par-là de produire en ce moment aucun son de voix. Car la cause principale & précise de la voix est fondée toute entiere sur le mouvement volontaire & actif des deux cordons musculeux-tendineux qui constituent les levres de la glotte, & qui doivent produire tous les mouvemens. Or plus on est obligé de les reconnoître actifs pour la suppression totale de l'air, plus on doit les reconnoître actifs pour l'économie de la dépense de l'air dans son passage gradué pour la formation des differens sons. Car on ne peut fermer le passage de l'air qu'en passant par tous les dégrés de resserrement depuis le premier jusqu'à l'extrême, duquel résulte la réduction de la ligne circulaire de chacune des levres à la ligne droite, d'où s'ensuit le contract immediat des deux levres dans toutes leur éten-

duë, & conſequemment l'entiere ſuppreſſion de l'air.

Dans les premiers degrés d'approche mutuelle des deux levres, on peut chicaner en attribuant la cauſe du rétreciſſement de la glotte pour la production des tons de la voix de bas en haut aux muſcles internes du larynx : mais on ne leur peut attribuer ni de fermer entierement la glotte, ni de remplir entierement tout le canal du larynx. Or il faudroit qu'ils fiſſent l'un ou l'autre pour ſupprimer totalement la reſpiration. Il ne faut que conſiderer le volume de ces muſcles tapis ſur le concave du larynx de part & d'autre de la glotte les attaches haut & bas de chacun de ces muſcles haut & bas au-deſſous de la glotte, la nature & la ſituation des parties auſquelles ils ſont attachés, pour voir qu'ils ſont incapables de ſatisfaire à aucun de ces deux uſages ; & en effet, s'ils ſont quelque choſe aux mouvemens de la glotte, c'eſt pour l'ouvrir quand elle eſt entierement relâchée pour laiſſer l'iſſuë libre aux excremens du poûmon, & non pour la reſſerrer. De tout cela réſulte ce raiſonnement.

Les tons de la voix ſont certainement l'effet d'un mouvement volontaire capable de reſſerrer la glotte moins ou plus en autant de degrés qu'il y a de tons actuels & poſſibles. Ce mouvement volontaire ne peut être celui des muſcles propres du larynx. Ce n'eſt pas celui des muſcles externes tant anterieurs que poſterieurs, qui ne peuvent que dilater la caiſſe du larynx en tout ſens. Ce n'eſt pas celui des muſcles externes lateraux qui ne peuvent que relâcher la la glotte ni celui des muſcles internes qui ne peuvent que la dilater pour donner paſſage aux gros excremens du poûmon. Il faut donc que ce ſoit quelqu'autre partie ſoumiſe à la volonté, qui par ſes attaches & ſa direction ſoit capable de reſſerrer la glotte naturellement ouverte, & de la reſſerrer en tous les degrés muſicaux depuis ſon ouverture naturelle juſqu'à ſon entiere clôture excluſivement.

Or les cordons des levres de la glotte ont leurs attaches, leur direction, leur poſition très-convenable à cet effet.

en tous degrés, & même à fermer exactement la glotte.

Ces cordons doivent donc être chacun de son côté l'organe du rétrecissement gradué de la glotte pour les tons musicaux du plus bas au plus haut son dans chaque glotte.

VII. ADDITION.

Les changemens de la Glotte viennent de la Glotte même par deux muscles de structure extraordinaire.

Comment ces cordons ne seroient-ils pas l'organe du rétrecissemenr gradué de la glotte, puisqu'ils sont certainement celui de la clôture absoluë de la glotte ? Car il est certain que la glotte ne peut passer de l'état de son ouverture naturelle, qui est celui qui convient à la respiration, libre, à celui de la clôture absoluë ; d'où s'ensuit la suppression de toute respiration, qu'en passant par tous les degrés possibles du rétrecissement. Or comme cette diminution poussée jusqu'à l'entiere suppression de l'air est absolument volontaire, il faut que l'organe de ce mouvement soit construit de maniere à pouvoir être commandé par la volonté ; il faut donc que chacun des cordons cachés dans les levres de la glotte soit ou un muscle ou quelque chose d'équivalent, c'est-à-dire un muscle d'une structure differente de la structure ordinaire du muscle, à moins qu'on ne voulût dire que la volonté de l'homme produit ce mouvement sans organe; ce qui ne se peut dire en Physique, ni proposer en Metaphisique sans égaler la volonté de l'homme à celle du Createur. Or c'est ce qu'on ne peut prétendre raisonnablement; ce n'est pas certainement un muscle ordinaire, c'est donc un organe extraordinaire équivalent à un muscle ordinaire, sinon dans sa structure, au moins dans son action.

Un Anatomiste celebre qui a bien voulu verifier par une dissection exacte ce que je lui avois dit de ces cordons cachés dans les levres de la glotte, consideroit comme ligamenteux ces deux cordons que j'appellois muscu-

leux tendineux. C'eſt un epithete dont je m'étois aviſé pour marquer par un mot inventé ce que je voyois d'extraordinaire dans ces cordons, muſculeux dans leur action, quoiqu'ils ne paroiſſent que tendineux dans leur ſtructure. Cet Anatomiſte les conſideroit comme ſimplement ligameux, parcequ'il n'y remarquoit non-plus que moi aucune trace de fibres charnuës à aucunes des deux extremités, ni mêlées avec les fibres du cordon; mais ſeulement quelques fibres charnuës paralleles à ces cordons, & qui ne faiſoient pas un ſeul corps avec eux : de ſorte que je ne croyois pas poſſible de ſoûtenir que ces fibres charnuës fiſſent avec ces fibres tendineuſes un corps de muſcles capable de mouvement volontaire qui pût conſtituer ces cordons tendineux en qualité de muſcles, n'y trouvant pas la ſtructure des autres muſcles du corps humain. Je trouvois donc alors ſa difficulté bien fondée, & elle l'étoit en effet à juger des choſes ſelon la ſtructure ordinaire.

Mais j'ay penſé depuis que l'action de ces cordons tendineux étant prouvée tant par leur poſition que par l'excluſion de toute autre cauſe capable de produire une action auſſi marquée que celle qui produit le contract parfait des deux levres de la glotte, on ne pouvoit ſe diſpenſer de conſiderer ces deux cordons comme deux inſtrumens du mouvement volontaire, c'eſt à dire comme deux muſcles d'une ſtructure particuliere.

Dés qu'on ne peut ſe défendre d'admettre cette ſtructure differente de celle de tout autre muſcle, il eſt avantageux de la recevoir comme un nouvel exemple ajoûté au nombre infini d'autres exemples de ſtructures differentes pour parvenir à un même effet, en d'autres genres d'effets qui prouvent comme celui-cy la richeſſe infinie de la Mechanique du Createur.

Toutes les inſtances fondées ſur les inconveniens prétendus, titrés du ſeul extraordinaire de la ſtructure ſeroient donc allegués mal à propos à moins qu'on ne fit voir que cette ſtructure extraordinaire eſt incompatible avec leur

action. Mais comment le pourroit-on montrer ? On connoît beaucoup mieux la ſtructure des grands muſcles de ſtructure ordinaire, mais on n'en ſçait gueres mieux ce que cette ſtructure contribuë à leur accourciſſement ; & qui pourroit empêcher que dans un auſſi petit muſcle on ne ſupposât une ſtructure tendineuſe inviſible ſemblable à celle qu'on remarque dans la partie charnuë des autres muſcles ? On connoît des contractions dans un nombre infini de fibres purement membraneuſes au moins en apparence, c'eſt à dire, autant que les yeux ſont capables de diſtinguer les parties dites vulgairement ſpermatiques de celles qu'on nomme charnuës. Le mouvement periſtaltique des inteſtins greſles ne s'execute pas autrement que celui de l'éſophage. Les mouvemens periſtaltiques des boyaux ne ſont pas à la verité ſoûmis à la volonté, mais ils n'en ſont pas moins reglés en eux-mêmes, & il ne leur manque rien pour être cenſés volontaires, que d'attendre les ordres de la volonté pour entrer en exercice, & pour interrompre, preſſer, ou rallentir leur action. Cette action s'execute avec un ordre merveilleux, chaque fibre membraneuſe circulaire entrant en mouvement à ſon rang pour exprimer & tranſmettre la charge du boyau à la fibre voiſine inferieure qui ſe reſſerre à ſon tour pour le même effet, ſans que cette ſucceſſion de mouvement ſoit troublée ni interrompuë tant que le beſoin ſubſiſte dans l'animal en ſanté à cet égard. Les mouvemens progreſſifs des vers ne ſont pas plus reglés, & perſonne ne peut nier que ces mouvemens dans les vers ne ſoient volontaires au moins ſelon la maniere ordinaire de parler, & parfaitement ſemblables au mouvement vermiculaire des boyaux quant à l'execution, quoique differente dans le principe.

La dépendance des muſcles à l'égard de la volonté eſt manifeſtement d'inſtitution, auſſi-bien que l'union d'une ame immortelle à un corps mortel. Ce n'eſt pas que l'Auteur de cette inſtitution n'ait donné des organes convenables à l'execution de cette dépendance, & ces organes ſont

ſont les muſcles ; mais on ne voit pas clairement dans ce qu'on connoît de leur ſtructure, comme il a été dit, la raiſon de leur mouvement, quoiqu'on ſoit aſſuré que cette ſtructure & l'influence des eſprits ſont la cauſe immediate de leurs mouvemens. Il eſt vrai que les cordons de la glotte ſont fort differens des muſcles ; mais s'il avoit plû au Createur de les faire dépendre de la volonté, on en ſeroit quitte pour admettre deux ſortes d'inſtrumens, des mouvemens volontaires, c'eſtà dire des muſcles, les uns charnus & ſanguins, les autres ſpermatiques. Car enfin dans les fibres blanches comme dans les fibres rouges, le mouvement eſt également, contraction par l'nce dinfluces eſprits, & relâchement par la ſuſpenſion du mouvement des eſprits ou par leur diſſipation. De quelque cauſe que procede le mouvement ou la ſuſpenſion du mouvement, il ſe fait également dans les fibres blanches comme dans les rouges, & apparemment par la même mechanique ou par une mechanique équivalente. La ſeule difference que j'y trouve eſt, que c'eſt le ſeul beſoin qui exige le mouvement des fibres blanches, & la ſeule volonté qui commande le mouvement des fibres rouges. Mais ni le beſoin, ni la volonté n'influënt rien par eux-mêmes dans les organes. Le beſoin & la volonté précedent & accompagnent, l'un les mouvemens des fibres blanches, l'autre ceux des fibres rouges : mais l'un & l'autre n'en ſont que l'occaſion, & ni l'un ni l'autre n'en ſont les cauſes, puiſqu'il eſt clair que ſans l'inſtitution divine, le beſoin exigeroit en vain les mouvemens des fibres blanches, & la volonté commanderoit inutilement celui des fibres rouges. Ces organes ne ſont nullement ſoûmis par eux-mêmes ni à la volonté, ni au beſoin. Car celui-cy ne peut être une cauſe active, puiſque ce n'eſt ſouvent qu'une pure privation ; quant à la volonté, quelque active qu'elle ſoit en tout ce qui eſt compris dans l'étenduë de ſon activité, c'eſt à dire de ſon pouvoir, elle en a auſſi peu par elle-même ſur les corps les plus délicats, que les corps les plus delicats & les plus mobiles ont par eux-mêmes peu d'intelligence pour recevoir les ordres de la volonté, pour

les comprendre & pour les executer. Y a-t-il donc quelque inconvenient de penser que le Createur a soûmis ces deux cordons à la volonté, en les construisant capables de recevoir des esprits? Les Physiciens sont réduits à l'égard des mouvemens volontaires qui s'executent par des muscles de structure ordinaire, de recourir à la seule institution du Createur pour comprendre, autant qu'ils en sont capables, comment il se peut faire qu'une ame remuë un corps, ce qui est encore plus difficile à concevoir, que de comprendre comment une ame peut être unie avec un corps. Sera-t-il donc plus difficile de reconnoître qu'une ame peut remuer un corps par un cordon de structure convenable, qu'il n'est difficile de comprendre qu'elle le peut remuer par un muscle de structure ordinaire, en vertu d'une institution toute-puissante, sans laquelle on ne peut entendre ni l'un ni l'autre, & par laquelle on entend également l'un & l'autre?

Les Physiciens qui regardent les brutes comme de pures machines, n'auroient nulle peine à admetre cette division de muscles en muscles sanguins & muscles spermatiques; car les mouvemens dits volontaires dans les bêtes ne s'executent selon cette opinion en consequence d'aucun ordre de volonté, mais seulement à l'occasion des impulsions externes sur les organes des sens, d'où s'ensuivent necessairement & mechaniquement les mouvemens dits volontaires dans les brutes. Ces mouvemens volontaires ne sont donc selon ces Physiciens en rien differens des mouvemens peristaltiques des boyaux des brutes, sinon que ces boyaux sont eux-mêmes tout ensemble l'organe d'un sens, c'est-à-dire, du toucher mechanique, en ce qui regarde leur œconomie, & en même tems les organes du mouvement peristaltique. Et ainsi les deux structures dans les brutes sont également des organes destinés à entrer en exercice dès qu'une impression externe l'exige.

Enfin si dans l'homme le cœur nous oblige de reconnoître au moins un muscle sanguin de structure ordinaire absolument indépendant de la volonté, sans aucun inconve-

nient, pourquoy y auroit-il de l'inconvenient qu'il y eût un muſcle ſpermatique de ſtructure extraordinaire qui fût ſoûmis à la volonté ? J'avouë que pour moy je n'y en vois aucun. Il y auroit un très-grand inconvenient à rendre l'homme maître abſolu des mouvemens vitaux du cœur par ſa ſeule volonté, ce qui ſeroit le rendre maître abſolu de ſa vie, & il y auroit un autre inconvenient très-conſiderable à ne le rendre pas maître des mouvemens neceſſaires pour la production de la voix & des tons qui ſont partie de la parole, ce qui ſeroit le rendre incapable de la ſocieté. Or la ſocieté eſt abſolument neceſſaire à la vie humaine.

Je donne donc pour vrai & pour prouvé dans ce Supplément, ce que je n'ay avancé que comme probable dans le Memoire & dans les Notes. C'eſt-à-dite que les cordons de la glotte ſont de vrais muſcles quant à leur uſage, & conſequemment des muſcles d'une ſtructure extraordinaire & ſinguliere dans l'homme.

VIII. ADDITION.

Ces cordons tendineux de la glotte ſurmontent ſans effort l'effort de pluſieurs grands muſcles & de l'air ſupprimé, non par leur propre force, mais par une adreſſe de méchanique naturelle, qui conſiſte toute, 1. dans leur poſition, 2. dans la ſimplicité d'un ſphincter rectiligne.

Avant que de quitter cet uſage de la glotte ſi oppoſé à la voix, puiſqu'il n'eſt établi que pour ſupprimer l'air, & cependant ſi propre à en démontrer l'organe ; je tâcheray de donner la ſolution d'une difficulté que Galien a propoſée ſans la réſoudre, s'étant contenté d'admirer ce qu'il auroit aiſément compris s'il avoit voulu faire uſage de la connoiſſance qu'il avoit de la Mechanique.

J'ay dit ſous le renvoy cy-deſſus que la ſuppreſſion de l'air eſt une action ſans comparaiſon plus forte que la voix, & cela eſt vrai ; car la clôture entiere ſuppoſe tous les degrés d'action neceſſaires pour le chant. Mais la ſuppreſſion totale comprend actuellement outre tous les degrés

neceſſaires pour le chant celui qui eſt neceſſaire pour la ſuppreſſion totale. Galien prouve la force de cette action par la force des muſcles du bas ventre, de ceux qui reſſerrent la poitrine, & de ceux qui remuënt les bras dans les actions les plus fortes de tous ces muſcles, ou de la plûpart, comme dans l'éternuëment, dans les plus preſſantes neceſſitez de vuider un ventre pareſſeux ou d'aſſener quelque coup de toute ſa force. Car dans toutes ces occaſions ſi importantes & ſi neceſſaires à la vie & à pluſieurs arts, ces deux petits cordons ſeuls joints enſemble, tiennent contre huit grands muſcles qui couvrent tout le ventre, quatre grands muſcles très-compoſés qui reſſerrent la poitrine, ſans compter les autres muſcles que pluſieurs Anatomiſtes croïent non ſans quelque ſondement capables de la même action, comme les intercoſtaux. Galien admire cette réſiſtance, & en effet elle eſt admirable: mais on y doit plus admirer la poſition que la force, car tout cela ſe fait ſans grand effort. En voici la preuve. Ces cordons de la glotte n'agiſſent que ſur le fondement que leur donnent les muſcles exterieurs du larynx anterieurs & poſterieurs, qui ne ſont que quatre, très foibles par leur poſition, & par-là incapables de ſoûtenir la contraction de ces deux cordons ſi elle avoit une force conſiderable. La contraction de ces deux cordons tendineux eſt donc manifeſtement un action foible. Tout cela augmente de beaucoup la difficulté propoſée par Galien. Ce qui ſuit la pourra réſoudre.

Il faut rabattre de l'effort des huit muſcles du bas ventre bandez contre les muſcles de la glotte, tantôt pour l'accouchement, tantôt pour l'évacuaiton d'un ventre pareſſeux, tout ce qui peut être ſoûtenu de cet effort par l'action du diaphragme bandé, qui en cette action eſt le principal antagoniſte de ces huit muſcles. Il eſt vrai que l'air reſpiré qui emplit la poitrine pour appuïer l'action du diaphragme appuïe ſa contraction, & l'appuïe de plus en plus à meſure qu'il ſe rarefie de plus en plus en s'échauffant dans la poitrine où il eſt retenu. Il faut donc rabattre ſur

l'effort du diaphragme contre les huit muſcles du bas ventre, tout ce que le volume & la rarefaction de l'air contenu dans les poûmons contribuënt à la réſiſtance du diaphragme contre ces huit muſcles. Et il faut tenir compte aux deux petits cordons de la glotte de toute la part que le volume & la rarefaction de l'air contenu dans les poûmons contribuënt à la réſiſtance du diaphragme ; car ce ſont eux ſeuls qui tiennent contre ce volume d'air qui a part à la réſiſtance du diaphragme. Or cette part n'eſt pas petite. Car il y faut ajoûter l'effort que les muſcles qui reſſerrent la poitrine font contre l'air qui la dilate, pour le reſſerrer de plus en plus à meſure qu'il ſe rarefie, & réünir tout ſon effort contre le diaphragme qui doit preſſer les boyaux de plus en plus pour en concourir avec les huit muſcles du bas ventre à chaſſer ce qui charge & incommode le ventre dans les deux ſexes, & la matrice dans les accouchemens. Or cette action eſt ſi forte qu'elle va ſouvent juſqu'à jetter une partie des boyaux & même la matrice hors de la capacité du ventre, c'eſt-à-dire les boyaux dans les deux ſexes, & la matrice dans les femmes : les boyaux en forçant l'ouverture étroite & très-forte des muſcles obliques & tranſverſaux du bas ventre menagée dans les aponevroſes pour donner paſſage au cordon des vaiſſeaux ſpermatiques dans les hommes, & aux ligamens ronds dans les femmes : la matrice, malgré les fortes attaches qui devroient la retenir en ſa ſituation naturelle. Or le plus fort de cette action, qui eſt le dernier degré de cet effort, eſt tout entier de l'air rarefié preſſé par les côtes ſur le diaphragme ; car le diaphragme contrebandé & retenu par le mediaſtin, ne peut par lui-même que commencer l'action en diminuant ſa voûture naturelle pour diminuer d'autant la capacité du ventre. Il faut donc reconnoître que le plus pénible de cet effort eſt réſervé aux deux foibles cordons de la glotte ; car ce n'eſt que leur contract immediat qui ſoûtient l'effort de l'air rarefié, preſſé par les muſcles intercoſtaux, par le diaphragme, & par tous les muſcles du ventre.

Cet effort paroît fort superieur à la force de ces deux petits muscles tendineux à n'en considerer que le volume & les fibres : mais si on en considere la situation & la direction, c'est toute autre chose ; car ils sont posez de sorte que sans effort ils peuvent soûtenir les plus grands efforts de tout ce grand nombre de grands muscles dont j'ay fait mention. Voici comment.

Les liquides qui n'ont point de ressort n'ont de force que selon leur poids, & leur poids n'agit que suivant leur hauteur. Les liquides qui ont ressort agissent en tout sens, dès que les causes de la rarefaction mettent leur ressort en état d'agir : mais les uns & les autres agissent en ligne directe, les premiers de haut en bas selon le diametre & la hauteur de leur colomne, les seconds du centre à la circonference en tout sens. Or l'air est un des liquides capables de rarefaction.

Cela étant, l'effort de l'air retenu & rarefié dans la poitrine se doit partager sur toutes les parties solides de la capacité de la poitrine qui en doivent soûtenir chacune leur part. La glotte ne doit soûtenir que la colomne ou la base du cone qui convient au diametre du larynx en sa partie superieure, ou plutôt la colomne qui convient à son ouverture naturelle : car la partie solide de la glotte doit être en cela considerée, à peu près, comme le reste de la circonference concave de la poitrine.

Ainsi ces deux petits muscles ne se trouvent chargez que de repousser l'air qui porte contre cette ouverture, ou plutôt celui qui porte contre le contract des deux levres jointes l'une à l'autre. Or elles sont jointes l'une à l'autre par un contract immediat. Cet effort se réduiroit donc presqu'à rien, c'est-à-dire à l'exercice de la seule force necessaire pour contrebander les attaches du demi tympan de part & d'autre de l'ouverture jusqu'au point de rendre droite la ligne circulaire de chaque levre.

Il est vrai qu'une colomne d'air égale à la capacité du larynx fait quelque effort contre le tympan : mais c'est à peu près comme quelqu'un qui voudroit passer au travers

d'une ouverture fermée par deux couliſſes, en pouſſant à plomb contre cette double couliſſe parfaitement jointe au milieu de cette ouverture, & bien arrêtée haut & bas. Car l'effort de l'air n'eſt que de bas en haut, & la force des levres & leur direction d'avant en arriere. De ſorte qu'au pis aller l'effort de l'air à l'égard des cordons tendineux ne peut être conſideré que comme deux poids égaux ſuſpendus chacun au milieu d'une corde de la longueur des deux muſcles tendineux qui conſtituënt les deux levres de la glotte, chaque poids ſuſpendu à ſa corde bien arrêtée à ſes deux extremités. Or ces deux poids peſant à plomb ne tendroient nullement à écarter, mais ſeulement & au plus à cambrer & plier chaque corde également, & par conſequent ſans préjudice de leur contact.

Ainſi l'air pouſſé directement de bas en haut ne tend qu'à ſoulever & ſeulement à proportion de ſon volume, & non à écarter. Il ne peut même ſoulever que fort peu les cordons tendineux, car il n'a de force ſur eux qu'autant qu'ils lui donnent de priſe. Or ils ne lui en peuvent donner qu'à proportion de leur diametre & de leur longueur, & tout cela eſt fort peu de choſe. Ils ſeront donc ſoulevés, ſi l'on veut, mais ſans préjudice de leur contiguité. La partie charnuë & membraneuſe de chaque demi tympan prêtera beaucoup davantage à proportion de ſon étenduë & de ſa conſiſtance, & ſoulagera d'autant les deux cordons.

Il n'y a donc pas lieu de s'étonner de la réſiſtance immenſe du bandement de ces petits muſcles à l'effort de l'air & de tant de grands muſcles. Ce n'eſt pas par une force extraordinaire, mais par l'application avantageuſe de leur peu de force qu'ils produiſent un ſi grand effet, jointe à la ſimplicité de leur ſtructure & de leur application mutuelle en ſphincter rectiligne, beaucoup plus exact pour la ſuppreſſion de l'air que les ſphincters circulaires. Ceux-ci ſont beaucoup plus aiſés à forcer ; car il n'eſt pas poſſible qu'ils ſuppriment l'air, qu'en accourciſſant leur diametre avec beaucoup d'effort. Or cela ne ſe peut que

leur circonference ne ſoit extrêmement froncée de pluſieurs plis tous fort ſerrés les uns contre les autres. Ce ſont donc autant d'ouvertures en rayon chacune capable d'être forcée dès que l'effort qui les ſerre diminuëra, ſans compter qu'il eſt difficile que le centre mechanique de ces rayons ſoit réduit à un point indiviſible. Et il eſt impoſſible au contraire que ces deux lignes parfaitement droites apliquées l'une à l'autre dans toute leur longueur, faſſent entr'elles par un contract immediat autre choſe qu'une ligne indiviſible. Ces plis froncés ſont donc dans les ſphincters circulaires pluſieurs échapées à garder avec autant d'efforts multipliés à proportion qu'il y a d'échappées, au lieu qu'un ſphincter rectiligne comme celui de la glotte demande d'autant moins d'effort que la ſeule juſteſſe de l'application ſuffit pour la ſuppreſſion totale. Je ne ſçay ſi je me trompe, mais il me ſemble qu'on pourroit calculer cette difference entre les ſphincters rectilignes & les circulaires par la proportion du diametre à la circonference, plus au nombre & à l'étenduë d'autant de rayons qu'il peut y avoir de plis dans les ſphincters circulaires

IX. ADDITION.

Conſideration ſur un prétendu fait allegué par Galien pour preuve de la clôture exacte de la Glotte, dont l'exactitude n'a nul beſoin d'être prouvée.

Galien donne pour preuve de l'exactitude de la ſuppreſſion de l'air par l'action de ces deux muſcles, un fait dont la verité me paroît fort ſuſpecte, quoiqu'il ſoit confirmé par pluſieurs relations modernes de voyageurs. Le fait prétendu eſt que pluſieurs Eſclaves au deſeſpoir, privés par leur état & par la précaution de leurs maîtres de tout moïen de s'échaper & de ſe tuer, ſe ſont aviſés de s'étouffer par la ſeule action de ces muſcles, opiniâtrée juſqu'à cet étrange effet. Voilà ce que Galien ſuppoſe, peut-être pour l'avoir oüi dire & l'avoir crû ſans preuve,

&

& sans approfondir la verité ou l'impossibilité du fait.

Les raisons que je crois avoir d'en douter m'ont porté à m'en informer plus particulierement, & j'en ay trouvé l'occasion par le retour du Directeur general de la Compagnie du Senegal. Il m'a confirmé le fait, & sur mes difficultés il a fait intervenir dans nôtre conversation un des principaux Commis chargé du soin des Negres vendus, & des embarquemens pour l'Amerique. Ce premier Commis a été autrefois Chirurgien.

M. Bru.

M. Castain.

Celui-ci m'a assuré qu'il avoit vû deux faits de cette espece. L'un de ces faits fut d'un jeune Negre de 14 ou 15 ans, qu'il fut contraint de faire embarquer les fers aux pieds & aux mains, se défiant de lui parcequ'il ne l'avoit jamais pû apprivoiser, quelque bon traitement qu'il lui eût fait pour le desabuser de l'opinion qu'ils ont tous qu'on ne les transporte en Amerique que pour les y manger. Demi-quart-d'heure après l'embarquement on vint dire au Commis que le jeune Negre étoit mort. L'autre étoit un Negre de 27 ou 28 ans qui mourut de la même maniere, étant assis à la vûë de plusieurs personnes qui ne pensoient à rien de semblable. Je lui demanday la cause de ces etouffemens volontaires prétendus, il me dit que c'étoit la langue ramenée vers la gorge & appliquée sur le conduit de la respiration. Je soûtins l'impossibilité de cette application, & lui voulois faire soupçonner quelque poison. Il repliqua que ces Negres étoient nuds comme la main, & qu'on les visitoit par tout avant l'embarquement, & sur tout avant le débarquement, parce qu'alors leurs fraïeurs redoublent.

Il ne paroît sur le corps de ces miserables aucune marque de violence, ils ne jettent du sang par aucun endroit, on n'a pas eu la curiosité de les ouvrir. On m'a promis de le faire à la premiere occasion, & de m'en envoyer une relation exacte suivant le Memoire que je dois donner pour cet effet.

J'avouë que j'ignore la cause de ces morts volontaires; mais je crois être assuré que ce n'est l'effet d'aucun mouve-

ment volontaire, quel qu'il puiſſe être, ſoit de la langue, ſoit des levres de la glotte. Aucun mouvement volontaire, quel qu'opiniâtré qu'il puiſſe être, ne peut être pouſſé que juſqu'à perte de connoiſſance; & dès qu'on en eſt venu là, le mouvement machinal de la reſpiration, tel qu'il s'exerce dans un profond ſommeil indépendamment de la volonté, recommence ſans attendre l'ordre de la volonté, & reprend peu à peu ſon train ordinaire. De ſorte que tout ce que la volonté peut faire en ceci, ſeroit de ſuſpendre la reſpiration juſqu'à perte de connoiſſance, & de donner par-là lieu à des retours alternatifs, qui donnant autant de fois lieu de ſe repentir d'une extravagance ſi outrée & ſi oppoſée à l'inclination naturelle de ſe conſerver, prévien-droient une déciſion finale dans tous les corps dont les vaiſſeaux ne ſeroient pas pleins à crever. La promptitude de ces morts ſans retour ne s'accorde pas avec ſemblables alternatives. Et d'ailleurs on ne voit pas que les Plongeurs de profeſſion meurent dans cet exercice de reſpiration ſupprimée, à moins qu'il ne leur arrive ſous l'eau quelque accident du dehors ou du dedans qui les empêche de prendre le haut pour reprendre haleine. Je ne puis donc croire cette cauſe; & comme ſemblables morts ſont rares, puiſqu'un Commis appliqué depuis 17 ans au ſoin de ces Eſclaves n'en a que deux exemples en une ſi longue ſuite de tems. J'aime mieux avoüer mon ignorance, ou attribuer ſemblables morts aux cas imprévus des morts ſubites par differentes cauſes, ou à la fraïeur d'un homme qui croit n'être embarqué ou ne débarquer que pour être égorgé par un Boucher, & ſon corps débité par quartiers dés qu'il ſera à terre au lieu de ſa deſtination.

Voilà les IX additions que je me ſuis propoſées pour la premiere Partie de ce Supplement au Memoire ſur la Voix. J'eſpere donner dans la ſeconde Partie de nouvelles preuves des principes du même Memoire.

QUE LES PLANTES contiennent réellement du fer, & que ce métal entre necessairement dans leur composition naturelle.

PAR M. LEMERY le fils.

IL y a quelque tems que M. Geoffroy fit part à l'Academie d'une découverte fort curieuse qu'il avoit faite sur un grand nombre de cendres de differentes Plantes : Il nous dit qu'il n'en avoit trouvé aucune où il n'y eût des grains capables d'être attirez par l'aimant. Mon Pere a fait voir depuis à la Compagnie que dans les cendres mêmes restées dans la cornuë après la distillation du miel, on trouvoit aussi de semblables grains, & j'en ay trouvé jusques dans les cendres du Castoreum. 1706. 13. Nov.

Quoique ces grains soient aussi facilement attirez par l'aimant que des grains de fer de même volume, n'y a-t-il point lieu de soupçonner que ces grains soient une matiere differente du fer, & neanmoins aussi propre que le fer méme à être attirée par l'aimant ? Ou si l'on prouve que ces grains ne peuvent être autre chose qu'un fer veritable, ou une matiere de même nature que celle de l'aimant, cette matiere n'a-t-elle point été formée pendant que la plante a été brûlée & réduite en cendres ? ou n'étoit-elle point déja dans la plante ? & n'y est-elle point montée avec les sucs qui ont servi à nourrir & à faire vegeter la plante pendant qu'elle étoit sur la terre ? Voilà, à mon avis, les doutes les plus raisonnables qu'on puisse avoir sur la nature & la formation de cette matiere surprenante. Je vais tâcher de les éclaircir le plus succinctement que je pourray.

Il me seroit aisé de prouver par plusieurs experiences que la matiere qui se trouve dans les cendres est une veri-

table fer ou aimant; mais je m'en tiens à une seule experience qui me paroît suffisante pour cela. J'ay exposé la matiere en question au verre ardent de Monseigneur le Duc d'Orleans : elle s'y est fonduë de la même maniere & avec les mêmes circonstances que le fer ou l'aimant, c'est-à-dire en petillant ou étincellant beaucoup, & après la fusion elle s'est réduite en une boule métallique comme fait la limaille de fer, ou la poudre d'aimant exposez au même verre ardent.

Puis donc que cette matiere est un veritable fer ou aimant, par quel hazard s'est-elle rencontrée dans les cendres? & que croire de sa formation? La principale raison qu'on allegue pour prouver que cette matiere a été formée dans le tems que le feu a brûlé & calciné la plante, c'est qu'on ne conçoit pas aisément comment des parties aussi grossieres que celles du fer auroient pû monter & se distribuer dans tous les vaisseaux d'une plante, passer jusques dans les tuyaux des fleurs qui doivent être d'une très-grande subtilité, être recüeillies par les abeilles, & se retrouver enfin après la distillation du miel, qui comme tout le monde sçait n'est qu'un composé des parties les plus subtiles des fleurs; mais cette objection disparoîtra peut-être par le raisonnement & les experiences suivantes.

Premierement le fer est un metal si commun, du moins dans nos païs, que je pose en fait qu'il n'y a point de terre où l'on n'en trouve. En second lieu ce métal se dissout avec la derniere facilité par toutes sortes de sels, & prend differentes formes suivant la nature des sels qui ont servi à le dissoudre. Quand il rencontre dans la terre des acides semblables à ceux de l'esprit de souffre, de l'esprit d'alun & de l'esprit de vitriol, il s'y réduit en un veritable sel concret que nous appellons vitriol. Pourquoy, par exemple, ce sel dont la base est du fer, comme je l'ay démontré dans un autre Memoire : ce sel, dis-je, résous dans une quantité suffisante d'eau, ne pourra-t-il pas se distribuer dans toute la plante? Est-ce parceque l'em-

bouchure de ses tuyaux est fort petite, & qu'on ne croit pas que ce sel soit divisible en d'assez petites parties pour enfiler des routes aussi étroites? On reviendra de ce préjugé si l'on considere qu'un seul grain de vitriol dissous dans neuf mil deux cens seize grains d'eau commune, teint sensiblement de sa couleur toute cette quantité d'eau, & lui donne en même tems un goût assez considerable de fer ou de vitriol; car en ce cas il faut que le fer ait été divisé en des parties bien petites & bien subtiles pour communiquer son goût, & une couleur sensible à un si grand nombre de particules d'eau. Cette divisibilité du fer ou du vitriol me paroît plus que suffisante pour le rendre capable de penetrer dans les tuyaux des plantes les plus déliez.

On objectera peut-être que si le fer peut prendre une forme assez petite pour passer par les filets les plus deliez des racines des plantes, il conserve toûjours sa pésanteur specifique qui les rendra éternellement incapable de s'élever plus avant dans la plante, & de monter jusques dans les fleurs.

Je réponds premierement que si l'on dissout dans de l'eau commune autant de vitriol qu'elle en peut contenir, & qu'on tire ensuite par un siphon cette eau chargée de fer ou de vitriol, elle montera aussi-bien malgré son nouveau poids, que si elle n'eut point contenu de fer ou de vitriol. Pourquoy donc le fer ne pourra-t-il pas monter de même dans les tuyaux de la plante qui peuvent être regardez comme des especes de siphons?

Mais si l'on veut encore une nouvelle preuve que la pesanteur specifique du fer ne peut jamais être un obstacle à son élevation dans les plus petits tuyaux des plantes, on n'a qu'à considerer que le principe le plus fixe & le plus grossier, sçavoir la terre qui comme tout le monde sçait, resiste à une violence de feu très-considerable, ne laisse pas de s'insinuer par le cours de la circulation dans le tissu même des fleurs; car on en trouve toûjours dans leur analyse: pourquoy donc le fer réduit en sel par des acides

ne montera-t-il pas dans les fleurs ? Et cela d'autant mieux que ce sel s'éleve & se sublime de lui-même avec la derniere facilité.

Je prouve la facilité qu'il a à s'élever, 1°. Parceque quand on met dans une même boëte du vitriol blanc, du vitriol verd, & du vitriol bleu sans les couvrir séparement, les parties qui s'exhalent naturellement de chacun d'eux, & qui retombent ensuite confusement sur ces vitriols, changent tellement leur couleur, que le vitriol blanc devient gris blanc, le vitriol verd d'un gris plus foncé, le vitriol d'Allemagne qui est bleuâtre devient gris brun, & jaunâtre en quelques endroits, & enfin le vitriol de Chypre qui est fort bleu devient d'un bleu tirant sur le gris. Il est encore à remarquer que ces vitriols ne changent point de couleur dans leur surface inferieure qui est appliquée contre la boëte, mais seulement dans leur surface superieure qui peut recevoir les differentes parties qui s'élevent de tous ces vitriols, & qui retombent ensuite indiffeemment sur chacun d'eux.

2° Si l'on met dans un pot du vitriol & qu'on l'humecte avec un peu d'eau, on verra quelque tems après le fer chargé d'acides monter de lui-même jusqu'au haut des parois du pot, & quelquefois même retomber en dehors & fort bas contre ces mêmes parois. Cette espece de sublimation naturelle du fer prouve assez la facilité qu'il a à s'élever quand il a été penetré par des acides ; mais voici une experience nouvelle qui la prouve encore infiniment mieux qu'aucune autre.

Quand on verse de l'esprit de nitre sur de la limaille de fer, on sçait qu'il se fait un boüillonnement violent & accompagné d'une chaleur si forte, qu'il n'est presque pas possible de tenir la main sur le vaisseau. Après le boüillonnement la liqueur devient rouge & chargée, à cause du fer qui y a été dissous. J'ay jetté de l'huile de tartre par défaillance sur cette dissolution de fer, il s'est fait une fermentation mediocre, pendant laquelle la liqueur s'est fort gonflée : je l'ay laissé reposer, & peu de tems aprés il s'est

formé aux parois du vaiſſeau quantité de petits branchages fort diſtincts, qui s'élevant toûjours de la liqueur ſans qu'il y eût de fermentation apparente dans cette liqueur & augmentant continuellement, ont bien-tôt gagné le haut du vaiſſeau, & ſont même retombez au dehors en ſi grande quantité qu'ils couvroient la ſurface interne & externe du vaiſſeau. On pourroit donner le nom d'arbre de fer ou de mars à cette eſpece de vegetation Chimique. Cette experience m'ayant paru curieuſe, je l'ay repetée un très-grand nombre de fois, tantôt augmentant, tantôt diminuant la doſe de l'huile de tartre, & il s'eſt toûjours fait differentes ſortes de vegetations qui quelquefois ne reſſembloient qu'à de purs branchages : ſouvent ces branchages étoient garnis comme de feüilles, & portoient en haut comme des fruits ou des fleurs, & à l'extremité d'en bas ou des petits filets qui y imitoient parfaitement la figure de ceux des racines, ou des tuyaux veritablement creux qui partoient du fond du vaiſſeau, & qui communiquoient au haut où étoit le fort de la vegetation. Enfin il m'eſt ſouvent arrivé de faire un mélange ſi exact d'huile de tartre par défaillance, & de la diſſolution de fer dont il a été parlé, que la liqueur après avoir ſuffiſamment fermenté, & avoir enſuite repoſé dans le verre pendant quelques heures, ſans produire aucune apparence de vegetation bien conſiderable, elle devint tout d'un coup d'une volatilité ſurprenante ; car elle s'éleva en fort peu de tems au haut du verre, & une partie de cette liqueur s'y condenſa ſous la figure de fleurs parfaitement bien formées, tandis que l'autre coula en dehors où elle produiſit de pareilles fleurs, & enfin le ſurplus de la liqueur tomba par terre ; de ſorte que je fus obligé de mettre au plutôt une petite écuelle ſous le verre qui reſta bien-tôt ſans liqueur. Je remis dans le verre la liqueur qui étoit tombée dans l'écuelle, mais elle ne demeura pas long-tems en place, & retomba de nouveau dans l'écuelle, augmentant toûjours en paſſant la vegetation qu'elle avoit commencée. Je remis encore la liqueur dans le verre, & je

continuäy un grand nombre de fois le même manege jusqu'à ce que toute cette liqueur se fût corporifiée, & eût été employée à couvrir de branchages & de fleurs la surface interne & externe du verre, & même une bonne partie de l'écuelle où elle s'étoit répanduë tant de fois ; ce qui fit un spectacle fort agreable à la vûë.

Je ne donne point icy un détail bien circonstancié de toutes les observations que j'ay faites sur cette operation, parceque je craindrois d'être long & de faire perdre de vûë le sujet principal pour lequel j'ay rapporté cette experience particuliere. Je réserve ce détail pour un supplément à ce Memoire-cy, que je donneray dans une autre Assemblée. Je diray seulement en passant que c'est le fer qui donne dans ce cas-cy toute la force & la volatilité à la liqueur dont il a été parlé, & que sans le mêlange de ce métal cette liqueur, qui n'est à proprement parler qu'un veritable nitre fondu dans une certaine quantité d'eau, ne produroit tout au plus au fond du verre que quelques cristaux semblables à ceux qu'on fait tous les jours quand on purifie le nitre commun.

Toutes les experiences qui ont été rapportées dans ce Memoire, prouvent que le fer dissous par des acides peut-être aisément réduit en des particules assez petites & d'une assez grande legereté pour pouvoir penetrer les tuyaux les plus petits & les plus élevez des plantes. Concluons donc que le fer qui se trouve dans les cendres des plantes, étoit dans ces mêmes plantes avant qu'elles eussent été brûlées ; & en effet le fer étant repandu en abondance dans toutes sortes de terres, & pouvant être aisément dissous par les premieres liqueurs salines qui l'arrosent, comme il a déja été dit ; ces liqueurs montant ensuite par la chaleur du Soleil dans les tuyaux des plantes pour les nourrir & les faite croître : ces liqueurs, dis-je, portent naturellement avec elles le fer dont elles se sont chargées. Ces raisons une fois conçûës, il y auroit bien plus de lieu d'être surpris si l'on ne trouvoit point de fer dans les plantes, que l'on ne doit être étonné d'en trouver,

On

On pourroit même dire avec quelque vrai-ſemblance, que non-ſeulement le fer eſt réellement exiſtant dans les plantes, mais qu'il leur eſt peut-être encore plus neceſſaire qu'on ne penſe; car comme ce métal ſuffiſamment attenué par des acides acquiert une force & une volatilité ſurprenante, qu'il prend avec la derniere facilité la figure de branchages, & qu'il produit un grand nombre de differentes ſortes de vegetations; ne pourroit-il pas ſervir par tout le mouvement & toutes les figures dont il eſt ſuſceptible, à étendre puiſſamment & de la maniere la plus convenable les petits tuyaux des plantes où il ſe rencontre, & contribuer par-là beaucoup à la vegetation de ces mêmes plantes? Enfin comme le fer ſe peut rencontrer plus ou moins abondamment dans certaines plantes que dans d'autres, & s'unir dans les unes à de certains ſels, & dans d'autres à des ſels d'une autre nature, ce métal contribuë peut-être encore beaucoup par-là aux differentes qualitez & vertus médicinales des plantes.

Il ne me reſte plus qu'à expliquer pourquoy les plantes dans leur entier ne donnent aucun goût ni aucune marque de fer. C'eſt que le fer s'y trouve en petite quantité par rapport aux parties huileuſes, ſalines, aqueuſes & terreuſes qui l'envelopent, & qui le cachent de maniere qu'il n'eſt plus reconnoiſſable en cet état. Mais quand la plante à été brûlée & réduite en cendres, & que l'on a eu ſoin de bien laver ces cendres pour en emporter les ſels fixes, les grains ferrugineux dégagez alors de leurs envelopes qui empêchoient l'aimant d'y produire aucun effet, reprennent leur premiere qualité, & ſont enſuite facilement attirez par l'aimant, ou par une lame d'acier aimantée; de même que le vitriol pouſſé par un grand feu ſe réduit par la perte de ſes acides en une matiere qui recommence à pouvoir être attirée par l'aimant, & qui certainement avoit ſervi de baſe à la formation du vitriol, comme je l'ay démontré dans un autre Memoire. On pourroit encore ajoûter que comme le fer qui a ſervi à faire du vitriol, & qui a été enſuite revivifié par la vio-

lence du feu, a perdu pendant cette operation un assez grand nombre de parties huileuses, pour être devenu sensiblement different de ce qu'il étoit auparavant par raport aux experiences Chimiques; le fer qui est entré dans la composition des plantes souffre aussi une alteration pareille par la calcination, & devient une matiere plus semblable par sa nature à la matiere propre de l'aimant qu'à celle du fer.

Je répondray dans le Tome de 1707 à une objection contre ce Memoire-cy, qui m'a été faite dans une Assemblée particuliere de l'Academie. Je renvoïe cette réponse à un autre Memoire, parce qu'elle demande plusieurs experiences nouvelles dont le détail la rend un peu longue.

OBSERVATION
SUR DEUX ENFANS
JOINTS ENSEMBLE.

Par M. du Verney, l'aîné.

1706. 13 Nov. LE dix-neuviéme du mois de Septembre de l'année 1706, Catherine Feüillet femme de Michel Alibert Jardinier du Village de Vitry près Paris, accoucha de deux Enfans mâles joints ensemble par la partie inferieure du ventre. C'étoit sa sixiéme grossesse, & elle entroit dans son neuviéme mois quand elle accoucha.

Il lui est arrivé ce qui est ordinaire à toutes les femmes qui sont grosses de deux Enfans, qui est d'être plus incommodée que dans les autres grossesses, d'avoir le ventre fort gros & fort tendu, & des varices aux jambes.

Le travail ne fut ni trop long ni trop penible, parceque l'un de ces Enfans se presenta dans la situation naturelle; & que la Sage-femme, qui dans cette occasion fit connoître



qui n'a couvert que la Surface interne et le haut du verre.

Figure d'une vegetation qui n'a couvert que la Surface interne et le haut du verre



egetation plus belle et plus distincte qui s'est faite
tems que la premiere et qui a couvert le dedans et
t mesme une bonne partie du petit vaisseau qu'on
a esté obligé de mettre dessous



Figure d'une autre vegetation plus belle et plus distincte qui s'est faite en beaucoup moins de tems que la premiere et qui a couvert le dedan[illegible] le dehors du verre et mesme une bonne partie du petit vaisseau [illegible] a esté obligé de mettre dessous

qu'elle eſt habile dans ſon art, ayant reconnu par les tentatives qu'elle avoit faites, qu'il y avoit quelque obſtacle qui empêchoit l'Enfant de ſortir, & examinant d'où cela pouvoit venir, s'apperçût que ſa poitrine étoit embraſſée par les jambes d'un ſecond Enfant qu'elle croïoit être ſeparé du premier; ce qui l'obligea de faire de nouvelles tentatives pour tirer celui qui ſe preſentoit au paſſage: mais ces tentatives furent inutiles; c'eſt-pourquoy elle réſolut ſur le champ de tirer dehors les deux pieds du ſecond Enfant, & d'achever ſon opération, comme ſi elle n'eût eu à en tirer qu'un ſeul qui ſe ſeroit preſenté par les pieds, ce qui réüſſit fort heureuſement.

Le délivre étoit compoſé d'un ſeul cordon & d'un ſeul *placenta*, & ces Jumeaux étoient renfermez ſous les mêmes membranes. Le *placenta* étoit plus grand & plus épais qu'à l'ordinaire, les envelopes plus fortes & plus épaiſſes, & le cordon plus gros.

Ces Enfans étoient fort vifs; ils ont vêcu depuis le 19. Septembre juſqu'au 26, & pendant ce tems-là ils ont fait leurs fonctions naturelles autant que la ſituation où on les mettoit a pû le permettre.

Celui qui paroiſſoit le plus fort mourut à quatre heures du matin, & l'autre trois heures après.

On peut penſer que trois choſes ont contribué à leur mort. La premiere eſt la mauvaiſe ſituation qu'on leur donnoit en les emmaillotant à l'ordinaire, ce qui a comprimé la partie du bas ventre qui leur étoit commune, & les conduits par où les excremens devoient ſortir, comme on le prouvera dans la ſuite.

La ſeconde, parce qu'ils n'ont jamais tetté, & qu'on ne les a nourris que de lait de Vache lequel s'eſt caillé dans l'eſtomac & dans les inteſtins qui en étoienr remplis, comme je l'ay reconnu en les ouvrant.

La troiſiéme, parcequ'on les découvroit trop ſouvent pour ſatisfaire la curioſité de pluſieurs perſonnes, & qu'à chaque fois on les tournoit en divers ſens.

Ces Enfans joints enſemble, comme on le voit dans la

premiere Figure, avoient 22 pouces de long. Il seroit inutile de décrire tout ce qui se presente depuis la tête jusqu'à la partie moïenne de leurs ventres, parceque toutes ces parties ont leur conformation ordinaire: mais la partie moïenne du ventre, qu'on nomme communément ombilicale, n'avoit point de nombril; & au lieu que ces Jumeaux en devoient avoir chacun un, il n'y en avoit qu'un seul pour tous les deux, dont on marquera la situation.

Le bas du ventre, qu'on nomme communément l'Hypogastre, est tout ce qu'il y a de singulier.

Dans la conformarion naturelle des autres enfans, les os pubis en se joignant font une espece de cintre, qui termine le bas de la partie anterieure du ventre; & par leur jonction avec les os des Iles & les Ischions qui s'unissent avec l'os sacrum, ils forment tous ensemble la cavité qu'on nomme le bassin.

Dans ces Jumeaux il n'y avoit point de Pubis; mais les os qui eussent dû le composer par leur jonction, étoient separez & placez vers les aînes; l'os pubis droit d'un de ces Jumeaux au lieu de se joindre avec l'os pubis gauche du même sujet, rencontroit l'os pubis gauche de l'autre, auquel il s'unissoit par un ligament très-fort & très- souple, & les deux faisoient en cet endroit une espece de cintre.

Ces ligamens qui joignoient les os pubis de chaque côté n'avoient chacun qu'environ 2 lignes de long, & faisoient une espece d'articulation aisée & commode, qui permettoit à ces Enfans d'approcher & d'éloigner réciproquement les troncs de leur corps jusqu'à un certain point.

On voyoit encore un ligament très-fort & très-épais, qui allant d'un côté à l'autre s'implanter dans la partie inferieure de la jonction des os pubis, divisoit en quelque maniere le bassin commun en deux parties. Ce ligament avoit la figure d'un cintre renversé, & la peau qui joignoit les deux derrieres de ces Enfans y étoit étroitement colée. Les os des Iles étoient plus plats qu'à l'ordinaire, tournez en arriere, & posez presque sur le même plan. Les Ischions

étoient auſſi tournez en arriere, les os ſacrum moins convexes & plus recouverts des os des Iles. Les coccyx plus racourcis, & leur pointe étoit un peu de côté.

Par cet arrangement les trous qu'on nomme ovales ſe trouvoient ſur les côtez & l'un vis-à-vis de l'autre, & la boëte des anches étoit fort tournée en arriere; ainſi les cuiſſes étoient tellement articulées que la pointe des pieds étoit entierement en dehors.

On découvre aiſément la conformation & la ſituation extraordinaire de ces os dans la troiſiéme Figure; & il eſt neceſſaire de la conſulter: on doit pareillement jetter les yeux ſur les autres Figures avant que de lire le reſte de la deſcription.

Le nombril commun aux deux Enfans étoit préciſément au milieu de la partie la plus baſſe du ventre, laquelle leur étoit auſſi commune; & en cet endroit le ventre étoit auſſi un peu plus étroit, & la peau qui le recouvroit étoit plus ferme, étant fortifiée par pluſieurs fibres tendineuſes; on y diſtinguoit même comme une eſpece de coûture qui marquoit le lieu où la peau des ventres de ces enfans s'uniſſoit. Cette peau alloit d'un des côtez de la jonction des os pubis juſqu'à l'autre, en faiſant une eſpece de cintre oppoſe à celui de deſſous.

On a déja vû quelques monſtres de cette nature. Paré dans ſes Oeuvres de Chirurgie, donne la figure de deux Jumeaux préſque ſemblables nez à Paris en mil cinq cens ſoixante & dix: mais au lieu que nos deux Enfans étoient tous deux mâles, Paré rapporte que les Chirurgiens jugerent que l'un des deux dont il parle étoit mâle, & l'autre femelle; ce que l'on ne peut connoître par la Figure qu'il en a donnée, parce qu'elle les repreſente ſeulement couchez ſur le dos.

Dans la ſeconde Figure qui repreſente les Enfans dont je parle icy, couchez ſur le ventre, tout eſt ſemblahle à ce que l'on voit dans les autres enfans: mais les os des Iles étant plus ſerrez contre l'os ſacrum, comme il a été dit, font que le derriere de chaque Enfant eſt plus plat & plus étroit.

Ces Enfans n'avoient point d'anus, & de l'endroit où il est ordinairement on voyoit sortir les verges, dont l'une étoit tournée d'un côté & l'autre de l'autre.

A chaque côté de ces parties on voyoit un repli de peau qui representoit assez bien la moitié d'un scrotum vuide & applati.

Voyez la 3. Figure. Ces Enfans étant couchez sur le ventre, les deux verges paroissoient situées d'une maniere bisarre, quoyqu'en effet elles fussent simplement abaissées & tournées vers le croupion.

En faisant la dissection de ce Monstre, la premiere chose qui me parut meriter quelque attention, fut la disposition des muscles droits; car dans l'état naturel ils vont droit du sternum par la partie anterieure du ventre s'inserer aux os pubis: mais dans ces Jumeaux, après être parvenus vers la partie moïenne du ventre, ils se détournent vers les côtez pour s'inserer aux os pubis qui sont leur appui naturel & qui y sont placez. Par ce moïen il restoit une espace à peu près de la figure d'un lozange qui étoit rempli par les aponevroses des autres muscles du bas ventre. Le nombril étoit placé au milieu de cet espace, le cordon qui en sortoit étoit plus gros qu'à l'ordinaire, & composé d'un plus grand nombre de vaisseaux, comme nous l'expliquerons dans la suite. *Voyez la 1. Figure.*

Comme les parties externes étoient semblables à celles des autres enfans depuis la tête jusqu'à la partie basse du ventre, les parties internes l'étoient aussi; le Foye, la Ratte, le Pancreas, l'Estomac & le canal des intestins grêles, tout y étoit semblable aux mêmes parties des autres sujets; mais les intestins grêles de chacun de ces Jumeaux venoient par leurs extremitez s'ouvrir dans un intestin commun, qui à l'un de ses côtez avoit un petit cœcum garni d'une appendice sans issuë; & la rencontre de ces trois intestins se faisoit vers un des côtez où les os pubis se joignoient.

Cet intestin commun doit être regardé comme un Colon, tant par rapport à son diametre qu'à la forme de son

appendice. Il étoit néanmoins garni de feüillets ſemblables à ceux des inteſtins grêles ; il étoit un peu évaſé à ſa naiſſance, & peu après il faiſoit deux plis en ſe tournant d'abord vers l'os ſacrum, puis il venoit s'ouvrir dans un autre inteſtin qui avoit de chaque côté un cœcum garni de ſon appendice aveugle. Ce ſecond inteſtin, qu'on peut nommer un ſecond Colon, faiſoit d'abord un long repli en allant ſous les inteſtins grêles de l'un de ces deux Enfans ; puis revenant, il faiſoit un autre repli, mais plus petit, ſous les inteſtins grêles de l'autre enfant, & enfin il alloit s'inſerer dans une eſpece de ſac commun à ces Jumeaux. Ce dernier colon qui étoit ſans cellules & ſans feüillets, avoit un pouce de diametre ſur neuf de long ; & le premier colon qui paroiſſoit y être enté, avoit un pouce de diametre ſur ſix de long.

Les inteſtins grêles avoient dans chaque Enfant leur mezentere & leurs vaiſſeaux particuliers ; mais le colon étoit attaché de chaque côté dans toute ſa longueur par un prolongement du mezentere de chacun de ces Jumeaux : ainſi les vaiſſeaux dont il étoit arroſé étoient communs aux deux Enfans, & outre les vaiſſeaux qu'il recevoit de l'artere qu'on nomme Mezenterique ſuperieure, il en recevoit auſſi de la Mezenterique inferieure, & la veine qui en rapportoit le ſang ſe déchargeoit dans la veine cave au-deſſous des Emulgentes. On voit par cette deſcription que la jonction de ces Freres étoit fort étroite, puiſqu'elle étoit formée non-ſeulement par les parties ſolides & molles, mais encore par le cours des liqueurs.

Le ſac où s'ouvre l'inteſtin dont on a parlé, paroiſſoit compoſé de deux veſſies applaties & jointes l'une à l'autre par le côté & ſans cloiſon ; de ſorte qu'il n'y avoit à proprement parler qu'une cavité. Ces veſſies n'étoient pas unies ſuivant toute leur longueur ; car par enhaut il s'en falloit environ trois lignes que la jonction n'allât juſqu'au ſommet, qu'on nomme ordinairement le fond, & par enbas il y avoit environ un demi pouce de ſéparation dans cet

endroit le ligament qui ſeparoit les deux baſſins ſupportoit cette veſſie qu'on peut nommer jumelle, & la partie de cette double veſſie particuliere à chacun de ces Enfans étoit ſituée dans la cavité du baſſin qui lui répondoit, & qui étoit propre à cet Enfant; mais elle n'occupoit pas cette cavité toute entiere, parce que quelques contours du côlon en occupoient une partie.

Les Ureteres s'ouvroient preſque à l'ordinaire dans chaque veſſie, dont la tunique charnuë étoit fort épaiſſe, & compoſée d'un double plan de fibres qui ſe croiſoient, & dont pluſieurs paſſoient obliquement d'une veſſie à l'autre en ſe croiſant.

Il y avoit dans chacun de ces Jumeaux à chaque côté du ligament qui ſeparoit les deux baſſins, deux gros trouſſeaux de fibres qui alloient s'épanoüir ſur les côtez de chaque veſſie, dont la tunique interieure étoit un peu goderonnée, épaiſſe, & comme calleuſe.

L'extremité de l'inteſtin s'appliquoit obliquement ſur un des côtez de cette veſſie, l'embouchure en étoit fort étroite par rapport à ſon diametre, & elle ne ſe trouvoit qu'à l'un des côtez de l'extremité de l'inteſtin, l'autre côté faiſant une eſpece de ſac aveugle. La plus grande partie de cette ouverture répondoit à l'une des veſſies; la plus petite avoit ſa direction vers l'autre veſſie: de maniere qu'il ſemble que l'un étoit compenſé par l'autre pour diſtribuer également les matieres dans les deux veſſies. Il y avoit auſſi ſur cette veſſie un petit ſac aveugle qui communiquoit avec l'embouchure de l'inteſtin.

Dans les Enfans d'une ſtructure ordinaire la veſſie a la figure d'une poire; ce qui fait qu'on y diſtingue un fond & un col, lequel diminuant inſenſiblement, s'abouche avec l'urethre: mais l'une & l'autre veſſie de ces Jumeaux n'avoit point de col, & l'urethre qui ſortoit d'abord de chaque veſſie, ſe courboit ſous le ligament qui ſepare les deux baſſins, à peu près comme il fait ſous les os pubis dans la conformation

mation ordinaire, & il paſſoit entre les corps caverneux.

Dans le trajet que l'urethre faiſoit depuis ſa naiſſance juſqu'à la verge, il étoit garni de pluſieurs muſcles.

Outre ceux qui tiennent lieu des accelerateurs, il y en avoit deux parties particulieres dans chaque Enfant.

La premiere prenoit ſon origine de la partie anterieure du trou ovale, & deſcendant un peu obliquement s'inſeroit à la partie de l'urethre qui regarde le coccyx. La ſeconde paire ſortoit de la partie inferieure du même trou ovale, & remontant & repaſſant ſous la premiere paire s'implantoit dans la partie anterieure de l'urethre. On voit par-là que de chaque côté ces muſcles ſe croiſent, & que leur plan repreſente la machine qu'on appelle Sauterelle, dont un lozange embraſſe le conduit de l'urethre.

Du côté où l'inteſtin s'ouvroit dans la veſſie, un des teſticules de chaque enfant étoit placé dans l'aine, & renfermé dans une poche émanée, du peritoine, dont l'entrée n'étoit pas fermée comme elle eſt dans les hommes, mais ouverte comme elle eſt dans les autres animaux.

De l'autre côté, les deux autres teſticules de ces Enfans étoient à nud dans la cavité du ventre, placés à la même hauteur, & attachés au peritoine. Les teſticules, les epidydimes, les veſſicules ſeminales, & tout ce qui appartient à ces parties avoit ſa conformation naturelle. Mais les vaiſſeaux déferens au lieu de s'ouvrir dans l'urethre, venoient s'inſerer dans chaque côté de cette veſſie un peu au-deſſus de la naiſſance de chaque urethre, & leur embouchure étoit ſimple & ſans caruncule.

Tout ce que les verges avoient de plus ſingulier, étoit que leurs racines étoient un peu plus écartées à cauſe de la ſeparation des os pubis, & qu'au lieu d'être ſuſpenduës en devant comme à l'ordinaire, elles étoient abaiſſées & tournées en arriere un peu ſur le côté.

La conſtruction de la veſſie étant bien connuë, il ſera plus aiſé de parler de la route des vaiſſeaux qui compoſoient le cordon.

Le cordon du fœtus ordinaire eſt compoſé de deux ar-

teres, d'une veine & de l'ouraque. Le cordon de ces Jumeaux étoit composé d'un ouraque, de deux veines & de trois arteres.

L'ouraque sortoit de l'échancrure superieure des deux vessies : elle ne paroissoit point percée, & l'on voïoit clairement qu'elle étoit formée par un prolongement des fibres charnuës des même vessies.

Il n'y avoit rien d'extraordinaire dans la route ni dans la grosseur des deux veines : mais au lieu que le cordon de chaque fœtus a deux arteres, il n'y en avoit que trois pour ces deux enfans, & elles étoient placées sur le même côté de la double vessie.

Pour rendre raison de la situation & de la route de ces trois arteres, il faut remarquer qu'un côté de la double vessie étoit presque tout occupé par les circonvolutions du colon & par son insertion, & que sur l'autre côté qui étoit libre, ces trois arteres étoient placées l'une au milieu, & les deux autres aux côtez.

L'un de ces Jumeaux avoit deux arteres ombilicales, & l'autre n'en avoit qu'une.

Dans celui qui avoit deux arteres, celle du côté droit faisoit sa route à l'ordinaire : celle du côté gauche ne pouvant se rendre au cordon à cause des obstacles qui s'y trouvoient, descendoit sous cette double vessie; & passant sous la grande separation dont on a parlé, remontoit par le milieu du côté opposé qui étoit libre jusqu'au cordon.

L'artere ombilicale de l'autre Jumeau étoit posée à son côté gauche ; il n'y en avoit point au côté droit, parceque l'intestin & son mezentere occupoit la place où elle eût dû être : mais si cette artere étoit unique, elle étoit en récompense plus grosse que les deux autres prises ensemble, & l'iliaque d'où elle sort étoit double de l'autre iliaque.

POUR comprendre les Usages des parties singulieres qui se rencontroient dans ces Jumeaux, on remarquera que l'os pubis droit de chacun de ces Enfans alloit ren-

contrer l'os pubis gauche de l'autre. Ces quatre os pubis joints ensemble deux à deux, & unis avec les os des iles, les ischions & les os sacrum, faisoient un bassin commun, ferme, solide, commode pour renfermer les gros intestins & la vessie qui étoient communs à ces Jumeaux.

Dans les autres hommes les os pubis sont joints par un cartilage d'une consistance ferme, & leur union est si étroite qu'ils prestent fort peu.

Dans ces Jumeaux, au lieu d'un cartilage on voïoit un ligament fort souple, qui joignoit de chaque côté l'os pubis droit de l'un avec l'os pubis gauche de l'autre; & cette espece d'union leur permettoit d'aprocher ou d'éloigner les troncs de leurs corps l'un de l'autre jusqu'à un certain point, comme on pourra voir dans la suite, & afin que ce mouvement fût plus libre, les extrémitez par où ces os se joignoient étoient arrondies.

Si cette conformation ne venoit que de l'union de deux œufs & d'une espece de rencontre fortuite, il faudroit qu'elle eût été fort heureuse; car pour peu que les extrémitez de ces os, qui ont peu de largeur eussent glissé l'une sur l'autre, presque toutes les parties tant solides que molles qui composoient le bassin, auroient été privées de leurs fonctions sans ressource; mais je n'entrerai pas dans ce détail qui meneroit trop loin.

On a observé que les muscles droits étant parvenus vers la partie moyenne du ventre, se détournoient vers les côtez pour aller s'inserer aux os pubis. Dans cette situation ils ne laissoient pas de faire leur fonction, & d'aider à comprimer le milieu de la partie inferieure du ventre; parce qu'étant dans chaque Enfant inserez aux os pubis, comme à deux points fixes, ils ne pouvoient se raccourcir que les aponevroses, ausquelles ils sont aussi attachez, ne s'approchassent du plan de leurs appuis autant qu'il étoit possible, & ne comprimassent le bas du ventre de chaque Enfant.

Le foye, la ratte, le pancreas, l'estomac & les intestins gresles avoient leur conformation ordinaire dans ces Ju-

meaux, qui étoient par ce moyen pourvûs de tous les organes necessaires pour digerer les alimens, pour les convertir en chyle, & pour le bien filtrer.

La structure des intestins merite une consideration particuliere.

Les intestins grefles venoient s'ouvrir par leurs extremitez dans un intestin commun qui leur servoit de colon. Il s'agit maintenant de faire voir la difference qui se rencontroit entre ce colon & celui des autres hommes.

Ce colon ordinaire fait un contour considerable en forme d'arc, attaché aux principaux visceres du bas ventre; il n'a qu'un mésentere, & il est garni de feüillets & de cellules.

Il n'y avoit qu'un seul colon pour ces Jumeaux; il étoit court, avec un double mésentere, & garni de feüillets seulement dans le tiers de sa longueur, & il n'avoit aucune connexion avec les visceres du bas ventre.

La longue circonvolution des colons, les cellules, & les feüillets ordinaires servent à leur donner une grande capacité pour contenir plus de matieres, pour en retarder le cours, pour les rendre plus épaisses, & pour nous dispenser de la necessité de les rendre trop souvent. Dans ces enfans le colon étoit fort court, sans cellules, & peu garnis de feüillets; ainsi les matieres y séjournant moins y prenoient moins de consistance; tout cela étoit necessaire à cause de la petitesse des passages par où elles devoient sortir.

Comme cet intestin étoit fort court dans ces enfans, il étoit aisément renfermé dans la partie du ventre qui leur étoit commune, sans avoir besoin d'être suspendu, ni attaché aussi fortement aux autres visceres que le colon des autres hommes, lequel étant très-long, le poids & la quantité des matieres qu'il contient demandent qu'il soit ainsi soûtenu; mais les matieres ne séjournant pas long-temps dans le colon de ces enfans, il n'étoit pas necessaire qu'il fût d'une grande capacité ni qu'il y en eût deux.

On a dit que le colon de ces Jumeaux étoit attaché de chaque côté à un prolongement de leurs mésenteres, & que les vaisseaux de ces mésenteres, par un très-grand nombre de rameaux, venoient se ramifier de chaque côté sur le corps de cet intestin où ils s'abouchoient les uns aux autres. Toutes ces anastomozes établissoient un commerce mutuel du sang entre ces enfans, & les nerfs, par une distribution à peu près semblable, y établissoient pareillement une communication reciproque des esprits.

De ce que l'on vient de dire, on peut juger aisément que les bonnes & les mauvaises qualitez du sang & des esprits pouvant se communiquer par cette partie, toutes les maladies qui y pouvoient arriver, ou par les liquides dont elle étoit arrosée, ou par les matieres qu'elle renfermoit, auroient été communes à ces deux freres. Ainsi il n'étoit pas possible, que l'un des deux venant à mourir, l'autre pût vivre que fort peu de tems.

On a fait observer que le colon s'ouvroit par son extrémité dans une vessie jumelle ; que son embouchure étoit fort étroite, mais disposée de maniere, qu'elle distribuoit presqu'également les matieres dans chaque vessie : Comme il n'y avoit point de sphincter à l'embouchure de l'intestin dans la vessie, on peut dire qu'elle faisoit dans ces Enfans la fonction des intestins *Rectum*. En effet elle servoit de receptacle aux excremens, & elle n'en permettoit la sortie, que quand le sphincter de l'urethre s'ouvroit : il tenoit donc lieu du sphincter & l'anus & de celui de la vessie.

Plusieurs choses favorisoient cette sortie. La premiere étoit la consistence des excremens qui étoit fort molle, tant par le peu de séjour qu'ils faisoient dans le colon, que par leur mêlange avec l'urine fournie par les quatre ureteres.

La seconde étoit la contraction de chaque vessie qui étoit beaucoup plus forte que dans les autres enfans ; parceque leur tunique musculeuse étoit beaucoup plus épaisse qu'à l'ordinaire. De plus, l'ouverture du conduit de

l'urethre étant plus large qu'à l'ordinaire & dans la partie la plus basse de chaque vessie, les excremens s'y portoient par leur propre poids. Quoique cette vessie jumelle n'eût qu'une capacité commune, cependant elle recevoit de chaque côté l'urine par les deux ureteres de chaque enfant, & chacune avoit son urethre qui lui servoit comme à l'ordinaire de conduit de décharge; ainsi les excremens solides & les liquides mélez ensemble sortoient par les verges, qui faisoient la fonction d'anus. Cette vessie n'avoit ni col, ni prostates, ni sphincter; mais les deux paires de muscles, dont l'urethre étoit garnie à sa naissance, & qui ont été décrites, tenoient lieu de sphincter: car comme elles se croisoient & qu'elles embrassoient le devant & le derriere de l'urethre dans un sens opposé, il falloit de necessité qu'agissant ensemble elles comprimassent ce canal.

Il nous reste à parler de la situation qui paroît avoir dû être la plus convenable & la plus commode à ces Jumeaux. Il nous a paru que c'eût été d'être à demi couchez avec quelque appuy sous le dos; d'autant que par ce moyen les parties du bas ventre, sur tout celles qui leur étoient communes, pouvoient alors faire librement leurs fonctions. Cette situation jointe aux vestiges qui restent de celle qu'ils avoient dans le sein de la mere avec ce qu'elle nous a dit, nous a fait juger qu'ils y étoient à peu près dans la posture que la figure represente, & qui instruira mieux que ce que nous en pourrions dire.

Quant au marcher, il nous a paru qu'ils pouvoient aller tous deux de côté du même sens; mais on voit qu'il étoit impossible, que l'un allât en avant que l'autre ne reculât en arriere; & qu'ainsi ils auroient marché avec beaucoup de difficulté.

Les canaux déferens s'ouvroient dans la vessie; & comme on n'y appercevoit point de sphincters qui auroient pû empêcher l'écoulement continuel de la semence, ainsi que dans les autres hommes, il y a apparence que ces Jumeaux eussent été steriles, parceque leur semence au-

roit été toûjours mêlée avec l'urine & les excremens grossiers.

On attribuë d'ordinaire la production des Monstres, tantôt au hazard, tantôt à des mouvemens purement naturels mais dereglez, tantôt aux égaremens d'une vertu formatrice aveugle, à ce qu'on dit, même dans ses ouvrages les plus reglez, & qui cependant agit comme si elle avoit de l'intelligence: mais le Monstre dont nous venons de faire la description, & le raport de sa conformation interne à sa figure exterieure, font bien voir qu'il n'a pû être l'ouvrage du hazard, ou d'une vertu formatrice aveugle, ni l'effet d'un dérangement fortuit des mouvemens naturels.

Depuis les envelopes jusqu'au plus profond des entrailles, tout y est d'un dessein conduit par une intelligence libre dans sa fin, toute puissante dans l'execution, & toûjours sage & arrangée dans les moïens qu'elle emploïe.

Suivant l'ordre commun les hommes & les animaux à quatre pieds ont deux issuës pour l'évacuation des excremens de la premiere digestion; l'une pour les solides, & l'autre pour les liquides: au lieu que dans ce Monstre l'intelligence dont je parle a voulu produire deux corps humains joints ensemble, qui pussent être droits, s'asseoir, approcher ou éloigner les troncs de leur corps l'un de l'autre jusqu'à un certain point; elle a voulu conduire par un seul canal les excremens solides jusques dans un receptacle commun où ils se mêlassent avec les liquides, afin que chacun de ces Jumeaux pût ensuite les rendre separément par la verge. On ne peut se dispenser de supposer cette volonté, puisqu'on en voit si clairement l'execution. Je laisse aux Theologiens à en chercher les raisons; mais cette volonté étant supposée, je dis que l'inspection de ce Monstre fait voir la richesse de la Mecanique du Createur, au moins autant que les productions les plus reglées, puisqu'à toutes les preuves que nous en avons, elle ajoûte encore celle-cy d'autant plus

forte & plus convaincante, qu'étant hors des regles communes, elle montre mieux & la liberté & la fecondité de l'auteur de cette Mecanique si variée dans ces sortes d'ouvrages ; car il doit passer pour constant que dans toutes les especes des Monstres qui ont paru, soit qu'ils aïent été examinez ou non, il y a toûjours eu une structure interne aussi extraordinaire que leur figure exterieure a paru differente de celle des autres animaux de la même espece.

DISSERTATION

SUR LES BAROMETRES ET THERMOMETRES.

PAR M. DE LA HIRE le fils.

1706. 13. Nov. ON a beaucoup d'obligation aux Philosophes du Siecle passé d'avoir trouvé le moïen de determiner les differens changemens qui arrivent à l'air consideré comme corps à ressort ou comme pesant : & l'on ne pouvoit faire dans la Physique une plus belle découverte ni une plus considerable, puisqu'elle sert à expliquer une infinité de Phenomenes qui avoient jetté les anciens Philosophes dans un grand embarras, dont ils n'avoient pû se tirer qu'en attribuant à la nature une proprieté qu'elle n'avoit pas, & de laquelle cependant ils s'étoient servis pour rendre raison de tout ce qui regardoit cette partie de Physique, dont tous les Phenomenes devoient être attribués à la pesanteur & au ressort de l'air.

Le celebre Galilée, Mathematicien du Grand Duc, fut le premier qui s'apperçut que l'eau dans le tuyau d'une pompe aspirante ne pouvoit s'y soûtenir qu'à la hauteur

teur environ de 32 pieds, & que le reste du tuyau, s'il étoit plus haut, demeuroit vuide. La consequence qu'il tira de cette remarque fut, que la nature n'avoit d'horreur pour le vuide qu'à cette hauteur. C'étoit, comme l'on voit conclure avec les Anciens, ce qui ne perfectionnoit point la Physique.

Toricelli qui fut son disciple & son successeur fit en 1643. une autre experience. Il prit un tuyau de verre de 4 pieds ouvert seulement par un bout, & l'ayant empli de mercure, il le renversa dans un autre vaisseau plein aussi de mercure, & s'apperçût que celui qui étoit dans le tuyau descendoit & laissoit en haut un espace qui devoit être vuide.

En 1644 on écrivit d'Italie cette experience au R. P. Mersenne Minime de Paris, qui la divulgua par toute la France; & M. Petit Intendant des Fortifications l'ayant sçûë & l'ayant apprise à M. Pascal, ils la firent ensemble à Roüen en 1646, & la trouverent conforme à ce qu'on avoit mandé d'Italie. Cela donna occasion à M. Pascal de faire plusieurs autres experiences dont il fit un petit Livre qu'il publia en 1647, & qu'il envoya par toute l'Europe. Il eut avis cette même année que Toricelli avoit soupçonné que c'étoit la pesanteur de l'air qui avoit été cause que le mercure s'étoit soûtenu dans le tuyau quand il avoit fait l'experience dont nous avons parlé. Cela lui donna occasion de faire encore de nouvelles experiences qui le confirmerent dans la pensée que Toricelli avoit euë, & qui lui firent avancer que tout ce qu'on avoit attribué à l'horreur du vuide n'étoit causé que par la pesanteur de l'air. Ce qu'il a parfaitement bien prouvé dans le Livre que nous avons de lui sur cette matiere, & dont tous les Sçavans sont demeurés d'accord. Voilà la suite & les dattes des experiences qui ont été faites pour découvrir cette belle proprieté de la pesanteur de l'air ignorée de tous les Philosohes pendant un si grand tems. Je vais donner presentement la description des Machines qui ont été faites pour découvrir sa vertu élastique, & je com-

menceray par la plus ancienne, & j'iray de suite suivant l'ordre des tems.

Sanctorius qui étoit de Capodistrie, Medecin celebre par les Ouvrages qu'il a laissé, s'avisa de faire une Machine appellée Thermometre, pour connoître les differens degrès de chaleur de ceux qui avoient la fiévre, sans faire attention, suivant toutes les apparences, que la même Machine pourroit lui montrer les changemens qui arriveroient à l'air, qui peut augmenter de volume par les differentes chaleurs, & qu'elle seroit fort curieuse, & plus utile au public par la connoissance qu'elle lui donneroit des degrès de la temperature de l'air, que par l'application qu'il en vouloit faire à la Medecine.

Ce Thermometre étoit composé de deux boules de verre attachées à un tuyau de verre recourbé par enbas, & tout proche de la boule inferieure; la boule superieure qui n'avoit point de communication avec l'air exterieur, & une partie du tuyau étoit pleine d'air tel que nous le respirons, & le reste avec une partie de la boule inferieure, qui étoit ouverte par sa partie superieure, étoit remplie d'eau seconde. Il est aisé de voir par cette construction que lorsque l'air de la boule superieure se dilatoit par la chaleur, il comprimoit l'eau seconde qui étoit dans le tuyau & l'obligeoit d'y descendre, & la laissoit remonter quand il se condensoit.

Cette Machine, quoique sujette à quelques irrégularités, ne laissa pas d'être trouvée fort curieuse par tous les Sçavans, & d'être mise en usage jusqu'au tems où l'on trouva le Barometre; car alors on s'apperçut d'un très-grand défaut qu'elle avoit, qui étoit d'agir aussi comme Barometre, ce qui pouvoit souvent détruire tout l'effet qu'elle pouvoit avoir comme Thermometre, à cause que l'air de la boule inferieure communiquant avec l'air exterieur agissoit sur la liqueur, & l'obligeoit à monter ou à descendre selon qu'il étoit plus ou moins pesant. Ce fut un malheur pour le Thermometre de Sanctorius de ce qu'on découvrit le Barometre: mais il ne dura pas long-

tems ; car quelques Sçavans de Florence ayant travaillé sur cette matiere, en construisirent un autre qui n'avoit point le défaut du premier. Je n'ay pû sçavoir d'autre datte du tems où il avoit été trouvé, quoique je l'aye cherché avec beaucoup de soin, que dans le Livre de Guerick intitulé *Experimenta Madeburgica*, & imprimé en 1672, où il dit qu'il y a environ 30 ans qu'il a été découvert, & dans les Dissertations Academiques de M. Petit imprimées en 1671 où il y en a une description, & où il est marqué que l'invention en est dûë à l'Academie de Florence qui en a donné une figure & une description dans le Livre qu'on a d'elle intitulé *Saggi di Naturali Experienze*.

Ce Thermometre qu'on doit appeller de Florence, & qui est celui qui est le plus en usage presentement, & très-commode pour toutes les experiences qu'on veut faire, pour être transporté, & pour sa construction qui est fort simple ; car il n'est composé que d'une boule de verre à laquelle est attaché un tuyau scelé hermetiquement par en haut, dont la grosseur & la longueur sont proportionnées de telle maniere au diametre de la boule qui est remplie d'esprit de vin avec une partie du tuyau, que dans les plus grandes chaleurs la dilatation de l'esprit de vin ne remplisse pas tout à fait le tuyau, & que dans les plus grands froids sa condensation n'aille pas jusqu'à rentrer dans la boule.

Quoique ce Thermometre eût de très-grandes commodités, il ne laissoit pas d'avoir une très-grande incommodité : c'étoit de ne pouvoir faire la comparaison de la temperature de l'air d'un païs avec celle d'un autre, à moins que ce ne fût le même Thermometre qu'on transportât, ou differens divisés sur les mêmes degrès de chaleur : mais M. Amontons qui étoit de cette Academie, & un des meilleurs genies de ce Siecle pour la Physique, trouva le moïen de le rendre universel sans rien changer à sa construction, en fixant un degré de chaleur auquel on pouvoit rapporter tous les autres, qui est celui de l'eau boüillante, & qui doit être le même par toute la terre sui-

vant l'experience de M. Amontons ; enſorte qu'il ſembloit qu'on ne pouvoit rien ſouhaiter de plus parfait ſur cette matiere. Cependant M. Nuguet vient d'en publier un autre cette année, qu'il prétend bien meilleur que tout ce qui paru juſqu'à préſent, comme on le peut voir par le titre qu'il y a mis, que voicy.

Nouvelle découverte d'un Thermometre cherché depuis longtems par Meſſieurs de l'Academie Royale des Sciences, exemt des défauts des autres Thermometres, contenant tous les avantages qui ne ſe trouvent que ſéparément & par parties dans ceux dont on s'eſt ſervi juſqu'à preſent.

Je ne doute point que M. Nuguet n'ait crû par ce titre faire beaucoup valoir ſon Thermometre dans l'eſprit du public ; mais il ne devoit pas pour cela y citer l'Academie, n'ayant vû en aucun endroit qu'elle ait jamais cherché un Thermometre tel qu'il le propoſe, à moins que ce ne ſoit à cauſe que M. Amontons, environ 12 ans avant que d'être de l'Academie, en avoit voulu faire un qui étoit à peu près ſemblable à celui qu'il a fait ; mais ayant reconnu qu'il ſeroit défectueux & bien plus difficile à conſtruire que celui de Florence, il l'abandonna. Je ne crois pas que ce que je viens de rapporter ſoit valable pour autoriſer M. Nuguet à citer l'Academie qui n'eſt point garante des fautes que peuvent faire ceux qui en ſont, & à plus forte raiſon de celles qu'ils ont pû faire quand ils n'en étoient pas encore. Paſſons à l'examen de ſon Thermometre, & voïons s'il répond au titre qu'il porte.

Ce Thermometre eſt aſſez ſemblable au Barometre de M. Hugens. Il eſt compoſé d'une boule de verre ſcelée hermetiquement & pleine d'air condenſé par le froid de l'eau à la glace, & de 4 tubes cylindriques ſoudés & joints les uns aux autres, & qui tous enſemble n'en font qu'un ſeul recourbé dont la courbure eſt en bas. On emplit ce tuyau comme le Barometre double, avec des précautions cependant dont nous parlerons dans la ſuite ; ce qui fait que l'eſpace depuis le haut de ce tuyau juſques vers le milieu du premier tube eſt vuide d'air groſſier, & qu'enſuite

il y a du mercure jusque vers le milieu du troisiéme tube qui est au-dessus de la courbure dans l'autre branche, & au-dessus du mercure il y a de l'esprit de vin jusque vers le milieu du quatriéme tube au haut duquel est attaché la boule qui est pleine d'air comme le reste de ce même tube. Il est aisé de voir par cette construction que dans la chaleur l'esprit de vin doit descendre, & remonter dans le froid ; parceque l'air de la boule & d'une partie du tuyau se dilatant par la chaleur oblige l'esprit de vin de descendre, & se condensantp ar le froid laisse la liberté à l'esprit de vin de remonter. Je ne crois pas que cette construction, non-plus que la maniere de le remplir, paroisse plus simple que celle du Thermometre de Florence. Mais voïons surquoi il établit le raport de ses tubes, d'où dépend toute la construction de son Thermometre.

La proportion qu'il a prise entre le tube où se meut l'esprit de vin & les tubes dans lesquels le mercure se termine de part & d'autre, & entre la pesanteur de l'esprit de vin & celle du mercure, est telle que quand la liqueur est arrivée au haut du troisiéme tube qui marque les plus grandes chaleurs de l'esté, l'air de la boule suporte 4 pouces de mercure plus qu'il n'en soûtient quand cette même liqueur est parvenuë à l'entrée de la boule qui marque les plus grands froids de l'hyver. La raison qu'il rapporte pour prendre cette proportion, est que l'air renfermé acquiert par les plus grandes chaleurs de l'esté la force de soûtenir 4 pouces de mercure plus qu'il n'en soûtient pendant les plus grands froids de l'hyver.

Il y a plusieurs remarques à faire sur ce que je viens de dire qui est tiré de son écrit.

1°. Qu'il ne parle point du diametre de la boule dans laquelle l'air est enfermé, à quoi cependant il devroit faire attention ; car nous avons fait des experiences qui nous ont montré que differens volumes d'air enfermés & exposés à un même degré de chaleur soûtenoient le mercure à differentes hauteurs, ce qui l'obligera à faire ces boules parfaitement égales dans tous ses Thermometres, &

les tubes égaux ou dans la même proportion, ce qui est presqu'impossible dans l'exécution.

2°. Qu'il ne dit pas en quel endroit de la terre la difference des plus grandes chaleurs de l'esté aux plus grands froids d'hyver soûtient 4 pouces de mercure, il est probable que c'est à Paris, où les termes en ont été connus depuis un certain tems : mais quand on voudra avoir de ces Thermometres dans d'autres païs, il en faudra faire; ceux qu'il a fait pour Paris n'y pouvant pas servir, à cause que les plus grandes chaleurs d'esté & les plus grands froids d'hyver, sur lesquels il en établit la construction, changent suivant les païs; ce qui obligera de les connoître, & ce qui est une grande difficulté.

3°. Qu'il devoit marquer si cet air tel que nous le respirons qui a la force en esté de soûtenir 4 pouces de mercure plus qu'en hyver, est enfermé en la comprimant ou condensant; parceque quand on lit l'explication de son Thermometre, il ne paroît pas que cet air soit condensé : cependant celui de la boule de ses Thermometres l'est par le froid de l'eau à la glace. C'est ce qui jette dans une difficulté, à cause que celui sur lequel il établit la construction de ses Thermometres est d'une façon, & que celui qui est dans la boule est d'une autre, & que cependant il paroît conclure l'effet que doit faire celui de la boule par celui que l'autre a produit.

4°. Qu'il aura toujours besoin de glace pour construire ses Thermometres, ce qui est un embarras.

5°. Qu'il doit faire attention, quand il veut faire ses Thermometres, aux differentes hauteurs d'atmosphere qui causent des changemens au corps de l'air.

6°. Qu'il doit prendre garde aux differens degrès de secheresse & d'humidité de l'air qui peuvent produire quelque alteration dans son Thermometre.

Voilà bien des précautions qu'on aura de la peine à prendre, & des difficultés bien difficiles à surmonter dans l'exécution.

Examinons présentement les précautions que cet Au-

teur dit qu'il faut apporter pour remplir son Thermometre.

Avant que de sceler l'extrémité de la boule, il faut avoir soin que l'esprit de vin contenu dans le tube qui est joint à la boule, répond par sa partie superieure au degré de la graduation du Thermometre ordinaire qui exprime exactement le froid de l'eau à la glace dans laquelle ils sont plongés, & parce qu'il proportionne tellement la quantité de l'eau & la quantité de glace dont il se sert, que le froid qui provient du mélange de ces deux choses, est suffisant pour faire descendre la liqueur du Thermometre ordinaire au 33ᵉ degré de sa graduation : il introduit de la liqueur dans ce tube jusqu'à ce que son extrémité superieure réponde à un point qui marque le 33ᵉ degré de la graduation de son Thermometre.

Il est évident que par cette maniere de remplir ses Thermometres, il aura toûjours besoin de celuy de Florence, & qu'il ne les rendra pas universels, puisqu'il n'y aura que ceux qui auront été faits sur un même Thermometre ordinaire qu'on pourra comparer, supposé que dans toutes les autres parties ils puissent être égaux, n'étant pas persuadé que le 33ᵉ degré de ceux dont on se sert ordinairement, exprime le même degré de froid, parce que ce 33ᵉ degré n'est point determiné par une même cause par toute la terre comme celui qui est marqué par la chaleur de l'eau boüillante. Ce sont en géneral des difficultés qui m'ont paru dans la construction du Thermometre de M. Nuguet ; il ne me reste plus qu'à donner la comparaison que j'en ai faite avec celui de Florence dont nous nous servons il y a très long-temps.

Le 25 Juin de cette année 1706 à 2 heures & $\frac{1}{4}$ après midy, le ciel étant serein, j'exposai au soleil dans un lieu où il ne faisoit point de vent, ce dernier Thermometre & celui dont nous nous servons que mon Pere fit faire par M. Hubin il y a plus de 30 ans, dont la boule a 1 pouce 11 lignes de diametre, & le tuyau a 3 pieds 9 pouces de long sur une ligne à peu près de diametre inte-

rieur. Celui de M. Nuguet étant posé bien à plomb, à quoi il faut prendre garde afin qu'il fasse son effet, descendit jusqu'à 93 degrès & demi, & quelques minutes après remonta jusqu'à 80 degrès & demi, & y resta étant toûjours exposé au Soleil; ce qui fait voir qu'on ne peut pas attribuer cet effet ni à l'air qui auroit pû être rafraîchi pendant l'experience, parce que ou l'air auroit continué d'être rafraîchi, & alors l'esprit de vin auroit dû continuer de monter, ce qu'il ne fit pas; ou l'air ne l'auroit été que pour quelques minutes, & alors les rayons du Soleil l'auroient réchauffé & l'esprit de vin auroit dû redescendre, ce qu'il ne fit pas non plus; ni à la diminution de l'action des rayons du Soleil causée par sa difference de hauteur sur l'horizon, parce qu'ayant descendu au plus bas en peu de temps, quand il commença à remonter il auroit dû continuer jusqu'à la fin de l'experience, ce qu'il ne fit pas; il ne faudra donc pas avoir recours à ces raisons-là pour expliquer ce fait, mais à celles que je donne dans la suite. Le nôtre étant à côté, monta jusqu'à 86, & ne s'éleva plus sensiblement; le temps qu'ils y furent exposés fut d'environ 25; ensuite je les ôtai tous deux, & les mis dans une chambre ouverte à l'est & où le Soleil ne donnoit point; & après y avoir été assez de temps pour ne plus changer ni l'un ni l'autre, je trouvai que celui de M. Nuguet étoit remonté à 78 degrès & demi, & que le nôtre étoit descendu à 64 degrès & demi; & ainsi la difference de l'état où étoit celui de M. Nuguet exposé au Soleil à celui de la chambre, étoit le 11 degrès qui valent 3 pouces 3 lignes & demie, & la difference des deux expositions du nôtre étoit de 21 degrès & demi, qui valent 7 pouces 3 lignes & demie: donc le nôtre a été une fois plus sensible que le sien; mais on en pourra faire comme le nôtre qui seront encore beaucoup plus sensibles; car il n'y aura qu'à augmenter le diametre de la boule, ou mettre un tuyau plus delié qu'il faudra faire assez long afin qu'il ne casse pas pendant les grandes chaleurs.

Il

Il eſt à propos d'avertir ici ceux qui ne ſçavent pas les regles de Dioptrique, qu'ils ne doivent pas attribuer le grand effet des Thermometres de Florence quand ils ſont expoſés au Soleil, à la figure ſpherique de leurs phioles, qui ne doit pas plus augmenter l'action de ſes rayons ſur l'eſprit de vin qui y eſt contenu, que s'il y étoit expoſé à nud dans tout autre vaiſſeau, parce que ſi par la figure de la courbure de la phiole, les rayons qui y tombent vont en ſe raſſemblant en paſſant au dedans de la liqueur, & qu'ils échauffent la partie qu'ils touchent par cette réünion plus qu'ils ne feroient s'ils n'étoient raſſemblez, auſſi ils abandonnent une autre partie de cette liqueur contre laquelle ils ne font aucune action; ce qui fait que l'un recompenſe l'autre.

Le Thermometre de M. Nuguet n'aura donc pas l'avantage qu'il prétend de parcourir un plus grand eſpace que celui de Florence. De plus le ſien doit toûjours avoir près de 3 pieds; au lieu qu'on peut faire l'autre auſſi petit qu'on veut, & qui aura néanmoins autant de juſteſſe à proportion que les plus grands; ce qui eſt fort commode en pluſieurs occaſions.

Il ne me reſte plus qu'à expliquer pourquoi, quand j'eus expoſé au Soleil ce nouveau Thermometre, il deſcendit au plus bas à 93 degrés & demi, & qu'enſuite il remonta à 89 degrés & demi; c'eſt parce que la chaleur agiſſant ſur l'air & ſur l'eſprit de vin en même temps, & l'air étant plus ſuſceptible de dilatation, il fit d'abord deſcendre l'eſprit de vin aſſez promptement, qui eſt le ſeul avantage que je ſçache que ce Thermometre ait pardeſſus les autres: mais enſuite l'eſprit de vin s'étant échauffé, il comprima l'air par ſa dilatation, & remonta de 4 degrez, ce qui prouve qu'on doit regarder ce nouveau Thermometre comme compoſé de deux autres, l'un à air comme celui de Sanctorius, & l'autre à eſprit de vin comme celui de Florence, mais qui agiſſent l'un comme l'autre. Enfin l'on peut conclure aprés ce que je viens de rapporter, que le Thermometre de M. Nuguet n'a pas tous

les avantages qu'il lui attribuë, puisqu'il est beaucoup moins sensible, beaucoup moins exact, beaucoup moins portatif, beaucoup plus difficile à construire, & beaucoup plus composé que l'ordinaire à esprit de vin.

DES LOIX DU MOUVEMENT.

PAR M. CARRE'.

1706. 7. Decemb.

IL n'y a gueres de questions dans la Physique, qui ayent plus exercé les Philosophes & les Mathematiciens du siécle passé, que celles des Loix du mouvement. En effet ces questions sont des plus curieuses & des plus importantes de cette Science. Je ne parlerai point de tous les Auteurs qui en ont traitté, ni des erreurs où plusieurs sont tombez ; je m'attacherai seulement à démontrer une Regle generale, de laquelle je tireraí par Corollaires, le grand nombre de Propositions, que ces Auteurs ont démontrées d'une maniere très-longue & très-embarrassée.

DEFINITIONS.

1. La *Masse* d'un corps est la quantité de matiére propre qu'il contient dans l'espace qu'il occupe, & cet espace s'appelle *Volume*.

2. La *Vîtesse* d'un corps est le rapport de l'espace au tems, ou l'espace parcouru divisé par le tems employé à le parcourir

3 La *Force* d'un corps est le produit de sa masse par sa vîtesse.

L'on nommera dans la suite les masses de deux corps qui se choquent, m, n, & leurs vîtesses v, r,

COROLLAIRES.

Il est évident, 1°. Que si deux corps inégaux se meuvent avec des vîtesses égales, leurs forces seront en même

raiſon que leurs maſſes ou quantitez de matiere.

2°. Si ces corps ſont égaux, & ſe meuvent avec des vîteſſes inégales, leurs forces ſeront en même raiſon que leurs vîteſſes.

3°. Si ces corps ſont inégaux en maſſes & en vîteſſes, leurs forces ſeront en raiſons compoſée de leurs maſſes & de leurs vîteſſes.

4. Si deux corps inégaux ont des forces égales, leurs vîteſſes ſeront réciproquement proportionelles à leurs maſſes.

L'on ſuppoſe dans la ſuite que les corps ſont à reſſort, & qu'ils ſe choquent directement, c'eſt-à-dire que le centre de peſanteur de chacun de ces corps & leur centre commun de peſanteur ſe trouvent dans la même ligne; ou bien, ſi ce ſont des globes, que la ligne qui joint le centre de ces corps paſſe par leur point d'attouchement dans l'inſtant du choc; ce qui revient au même.

PROPOSITION GENERALE.

I. Si deux corps à reſſort ſe choquent par des mouvemens contraires; je dis que la ſomme de ces corps eſt au double de l'un ou de l'autre, comme la ſomme de leurs vîteſſes eſt à une vîteſſe telle, qu'étant ôtée de la vîteſſe de l'un ou de l'autre de ces corps avant le choc, le reſte ſera la vîteſſe de ce même corps après le choc; ou ce qui revient au même, que la vîteſſe de chacun de ces corps après le choc ſera égale à ſa vîteſſe avant le choc moins le produit du double de l'autre par la ſomme de leurs vîteſſes diviſé par la ſomme de leurs maſſes.

Soient deux corps inégaux, m, n, qui ſe choquent par des mouvemens contraires avec les vîteſſes, v, r; il faut démontrer que ſi l'on fait, $m+n.\ 2n :: v+r.\ \frac{2n \times \overline{v+r}}{m+n}$; & $m+n.\ 2m :: v+r.\ \frac{2m \times \overline{v+r}}{m+n}$, ces vîteſſes étant ôtées de v & de r, les reſtes $v - \frac{2n \times \overline{v+r}}{m+n}$, $r - \frac{2m \times \overline{v+r}}{m+n}$ ſeront les vîteſſes que ces corps m & n auront après le choc.

Pour démontrer cette Propoſition, il faut conſiderer que par le choc ces corps ſe compriment mutuellement, la réaction étant égale à l'action. Ils s'applatiſſent même quelque peu dans l'endroit dont ils ſe choquent. L'experience le confirme : car ſi l'on met ſur un plan poli & fort dur une legere couche de ſuif fort mince, & qu'on laiſſe tomber deſſus une balle d'yvoire, de verre ou d'acier d'une ſphericité la plus parfaite que faire ſe pourra, on voit ſur ce plan un cercle qui eſt d'autant plus grand, que la balle eſt tombée de plus haut, ou qu'elle a été pouſſée avec plus de force: ce qui fait connoitre viſiblement que cette balle, qui ne devoit toucher ce plan que dans un très-petit eſpace, s'eſt appliquée ſur un grand nombre de ſes parties en s'applatiſſant. D'où l'on doit conclure que les corps à reſſort qui ſe choquent, s'applatiſſent réciproquement, c'eſt-à-dire que les petites parties dont ils ſont compoſez, cedent & obéïſſent pour ainſi dire les unes après les autres à l'effort du choc, juſqu'à ce que la force des mouvemens contraires, qui comprime & applatit ces corps, ayant forcé la matiere ſubtile qui fait leur reſſort, d'en abandonner les pores pour un inſtant, faſſe équilibre avec l'effort que cette matiere fait pour y rentrer. Mais dans cet état, il eſt clair que ce qui reſte de force ou de mouvement dans la partie la plus éloignée du point de rencontre, c'eſt-à-dire dans celle qui n'a point été comprimée par le défaut de réſiſtance, ou parceque le choc n'a pas été aſſez grand, doit ſe diſtribuer également dans le reſte de ſa maſſe, & dans celle du plus foible de la même maniere que dans les corps mous : Donc ce qui reſtera de force dans ces deux corp, que l'on regarde dans cet inſtant comme réünis en un, eſt égale à la difference de leurs momens ou de leurs forces qui eſt $mv - nr$; diviſant donc cette difference par la ſomme des maſſes $m + n$, on aura $\frac{mv - nr}{m + n}$ pour leur vîteſſe commune dans cet inſtant du choc : ce qui eſt évident, puiſque dans cet inſtant il ſe perd ou ſe détruit autant de force dans le grand que

Voyez la seconde partie des Loix du Mouvement du P. Malebranche Rech. de la Verité de l'Edition de 1700.

dans le petit, & que ces corps allant de compagnie s'ils étoient veritablement mous, la force restante se distribuëroit également dans les deux corps que l'on doit regarder comme n'en faisant plus qu'un. Or la force ou le moment d'un corps est le produit de sa masse par sa vîtesse, donc il faut diviser cette force restante par la somme des masses, & l'on aura leur vîtesse commune.

Il faut prendre garde que le mouvement du plus fort se fait du même côté devant & après ce premier instant du choc; ainsi sa vîtesse est réellement $\frac{mv-nr}{m+n}$: mais pour celle du plus foible, elle doit être $\frac{-mv+nr}{m+n}$, parceque son mouvement tend à se faire du côté opposé après le choc.

Maintenant parceque la compression & l'applatissement de ces corps ne se fait qu'à proportion de la force du plus foible, c'est-à-dire de la résistance que le plus fort trouve dans le plus foible, il est clair que cette compression ne doit augmenter que jusqu'à ce que celui qui a le moins de force, ait acquis une vîtesse égale à celle qui reste dans le plus fort, puisqu'alors le plus foible ne lui résiste plus ou n'empêche plus son mouvement: car le ressort des corps qui se choquent, ne se bande que jusqu'à ce qu'ils puissent aller de compagnie; alors leurs pores ne sont plus réciproquement comprimez par l'action du plus fort sur le plus foible: ainsi le ressort commence à se débander par l'action de la matiere subtile qui les penetre, & qui rentre dans les pores d'où elle a eté chassée: il est donc évident que ces corps, dont je suppose que le ressort n'a point été affoibli par le choc, doivent être repoussez à proportion que cette matiere subtile a reçû du mouvement par la compression, laquelle dépend toûjours de la vîtesse respective des corps qui se choquent. Or puisque ces deux corps s'appuïent immediatement l'un sur l'autre dans le tems que la matiere subtile leur rend le même mouvement qu'elle a reçû de leur compression, il est necessaire qu'ils soient repoussez l'un & l'autre avec des forces égales, & par consequent que ces secondes vîtesses

soient réciproques à leurs masses. Faisant donc $m+n.n::v+r.\frac{nv+nr}{m+n}$, ce sera la vîtesse du corps m; puis faisant $m+n.m::v+r.\frac{mv+mr}{m+}$, ce sera la vîtesse du corps n; mais il faut encore prendre garde que ces vîtesses sont negatives. à cause de la réaction de la matiere subtile, qui retablit ces parties comprimées & applaties dans leur état naturel, & par consequent repousse ces corps du côté opposé à leur mouvement avant le choc. Ajoûtant donc les premieres vîtesses $\frac{mv+nr}{m+m}$, & $\frac{-mv+nr}{m+n}$, puisqu'elles ne sont point detruites, avec celles-ci $\frac{-nv-nr}{m+n}$, & $\frac{-mv-mr}{m+n}$; l'on aura enfin pour la vîtesse du corps m après le choc $\frac{mv-nv-2nr}{m+n}$, & $\frac{nr-mr-2mv}{m+n}$ pour celle du corps n: ou ce qui est la même chose $v-\frac{2n\times\overline{v+r}}{m+n}$, & $r-\frac{2m\times\overline{v+r}}{m+n}$. D'où l'on tire cette Regle generale, que pour avoir la vîtesse de ces corps après le choc, il faut faire: *La somme de ces corps est au double de l'un ou de l'autre, ainsi la somme des vîtesses ou leur vitesse respective, est à une vîtesse telle, qu'étant ôtée de la vîtesse de l'un ou de l'autre de ces corps avant le choc, le reste sera la vîtesse de ce même corps après le choc.* Ce qu'il falloit démontrer.

Il est évident, 1°. que si mv est moindre que $nv+2nr$, & si nr est moindre que $mr+2mv$, les corps m & n réjailliront: que s'il arrive le contraire, il se mouvront du même côté d'où ils sont venus; & si ces grandeurs sont égales, ils demeureront en repos. L'on en va donner quelques exemples en nombres Mais auparavant il est bon d'avertir que les lettres m & n ne servent qu'à designer les corps qui se choquent; que les chiffres qui se trouvent devant marquent le rapport des masses, & ceux qui sont après marquent celui des vîtesses. Ainsi $2m3$ signifie qu'un corps à 2 de masse, & 3 de vîtesse. Que s'il ne se trouve point de chiffre devant la lettre, on y sous-entend toû-

jours l'unité ; & s'il y a un o après, cela veut dire que le corps eſt en repos.

I. Exemple.

Que $4m6$ & $3n4$ ſe choquent par des mouvemens contraires, on fera par la Regle $4+3 . 6 :: 6+4$. $\frac{6 \times \overline{6+4}}{4+3} = \frac{60}{7}$, laquelle vîteſſe étant ôtée de 6, il reſtera $-\frac{18}{7}$, c'eſt-à-dire que m réjaillira avec $\frac{18}{7}$ de vîteſſe : faiſant de même $4+3 . 8 :: 6+4$. $\frac{8 \times \overline{6+4}}{4+3} = \frac{80}{7}$. Or $4 - \frac{80}{7} = -\frac{52}{7}$, donc n réjaillira auſſi avec $\frac{52}{7}$ de vîteſſe. Auſſi dans ce cas mv eſt moindre que $nv+2nr$, & nr moindre que $mr+2mv$.

II. Exemple.

Que $3m12$ & $2n2$ ſe choquent, on fera $5.4 :: 14. \frac{56}{7}$; or $12 - \frac{56}{5} = \frac{4}{5}$; donc m continuëra de ſe mouvoir du même côté avec $\frac{4}{5}$ de vîteſſe ; auſſi mv eſt plus grande que $nv+2nr$. Pour le corps n on trouvera qu'il doit réjaillir avec $\frac{74}{5}$ de vîteſſe.

III. Exemple.

Que $4m4$ & $2n2$ ſe choquent, on trouvera que le corps m après le choc demeurera en repos ; car dans ce cas $mv = nv+2nr$. Pour le corps n il réjaillira avec 6 degrez de vîteſſe.

II. Il eſt évident, 2°. Que ſi un des corps comme n eſt en repos, il n'y a qu'à effacer dans la formule qui marque ſa vîteſſe après le choc, tous les termes où r ſe rencontre ; ce qui donnera $\frac{2mv}{m+n}$ pour ſa vîteſſe après le choc ; donc pour avoir la vîteſſe de ce corps, voici la Regle. *La ſomme des corps eſt au double du corps choquant ; ainſi ſa vîteſſe eſt à la vîteſſe du choqué.*

Pour la vîtesse du choquant on la trouvera par la formule égale à $\frac{mv - nv}{m + n}$, c'est-à-dire que pour avoir cette vîtesse, il faut faire: *La somme des corps est à leur difference; ainsi la vîtesse du choquant avant le choc, est sa vîtesse après le choc.* Ce que l'on trouveroit encore par la Regle generale, en ôtant de v cette grandeur $\frac{2nv}{m + n}$.

Il est évident que si mv est plus grand que nv, le choquant continuëra de se mouvoir du même côté; si ce terme est plus petit, le corps réjaillira; & s'il est égal, il demeurera en repos.

EXEMPLE.

Que 5 m 12 choque 3 n 0, l'on fera par la regle $5 + 3 . 10 :: 12 . \frac{10 \times 12}{5 + 3} = 15$; donc n se mouvra avec 15 degrez de vîtesse. Pour avoir celle de m, on fera $5 + 3 . 5 - 3 :: 12 . \frac{12 \times \overline{5 - 3}}{5 + 3} = 3$, c'est-à-dire que ce corps se mouvra encore après le choc avec 3 degrez de vîtesse.

Il est encore évident que si la masse du corps n est plus grande que celle de m, celui-ci réjaillira toûjours; au contraire il continuëra de se mouvoir après le choc s'il est plus grand.

III. Si les corps qui se choquent, se meuvent du même côté, l'on fera toûjours les mêmes raisonnemens: car s'ils étoient mous, ils iroient de compagnie avec la somme de leurs mouvemens; donc cette somme étant $mv + nr$, leur vîtesse seroit $\frac{mv + nr}{m + n}$. Maintenant distribuant réciproquement aux masses la difference de leurs vîtesses, qui est leur vîtesse respective, $v - r$, on aura pour la vîtesse de m, $\frac{nv - nr}{m + n}$ qui doit être negative à cause de la reaction de la matiere subtile: & pour celle du corps n, $\frac{mv - mr}{m + r}$ du même côté; & ajoûtant ces vîtesses, on trouvera enfin pour la vîtesse du corps m après le choc, $\frac{2nr + mv - nv}{m + n}$ $=v$

$= v + \frac{2n \times \overline{r - v}}{m + n}$; & pour celle de n, $\frac{2mv + nr - mr}{m + n} = r + \frac{2m \times \overline{v - r}}{m + n}$. D'où l'on peut tirer cette Regle génerale.

La somme des corps qui se choquent par des mouvemens de même part, est au double de l'un ou de l'autre de ces corps, comme la difference de leurs vîtesses ou leur vîtesse respective, est à une vîtesse telle, qu'étant ôtée ou ajoûtée à la vîtesse de l'un ou de l'autre de ces corps avant le choc, le reste sera la vîtesse de ce même corps après le choc. Car $m + n . 2n :: v - r . \frac{2nv - 2nr}{m + n}$; & cette vîtesse étant ôtée de v, on aura $\frac{2nr + mv - nv}{m + n} = v + \frac{2n \times \overline{r - v}}{m + n}$; faisant de même $m + n . 2m :: v - r . \frac{2mv - 2mr}{m + n}$, laquelle étant ajoûtée à la vîtesse r, donnera $\frac{2mv + nr - mr}{m + n} = r + \frac{2m \times \overline{v - r}}{m + n}$. Il est facile de voir si le corps qui a le plus de vîtesse ou qui attrape l'autre, doit encore se mouvoir après le choc, s'il doit réjaillir, ou s'il doit demeurer en repos.

I. EXEMPLE.

Que 8 m 12 attrape 4 n 4, l'on fera par la regle $8 + 4 . 8 :: 12 - 4 . \frac{8 \times \overline{12 - 4}}{8 + 4} = \frac{16}{3}$; or $12 - \frac{16}{3} = \frac{20}{3}$; donc m après le choc continuëra de se mouvoir avec $\frac{20}{3}$ de vîtesse. De même $8 + 4 . 16 :: 12 - 4 . \frac{16 \times \overline{12 - 4}}{8 + 4} = \frac{32}{3}$; mais $4 + \frac{32}{3} = \frac{44}{3}$; donc n se mouvra avec $\frac{44}{3}$ de vîtesse.

II. EXEMPLE.

Que m 24 attrape 3 n 4, on trouvera par la regle que m réjaillira avec 6 degrez de vîtesse, & n continuëra de se mouvoir avec 14.

Ces exemples sont plus que suffisans pour faire voir l'application de la Regle generale; mais pour en marquer la fecondité, voici un grand nombre de consequences qu'on en peut tirer, qui sont autant de propositions démontrées par plusieurs Auteurs qui ont traité cette matierer.

1. Les corps qui se choquent ont toûjours leur vîtesse respective égale avant & après le choc. Car par la Regle generale * du choc des corps qui se rencontrent par
* Art. 1. des mouvemens contraires, on a trouvé après le choc $\frac{mv - nv - 2nr}{m + n}$; & $\frac{nr - mr - 2mv}{m + n}$ pour la Vîtesse de deux corps qui se choquent; mais ces vîtesses étant ajoûtées ensemble donnent $v + r$, qui est la vîtesse respective avant le choc; donc, &c. Il en est ainsi des autres cas.

2. Le centre de pesanteur de deux corps qui se sont choquez, se meut toûjours avec la même vîtesse avant ou après le choc; & si ce centre demeure en repos dans le mouvement qui précede le choc, il demeurera aussi en repos après le choc. Cela est évident par l'article précedent. C'est ainsi qu'il faut entendre cette proposition, que Dieu conserve toûjours dans la nature une égale quantité de mouvement, non une égale quantité de mouvement absolu, mais une égale quantité de mouvement de même part.

Il y a eu de grands Philosophes & il y en a encore qui soûtiennent que Dieu conserve toûjours une égale quantité absoluë de mouvement dans la nature, parceque tout autre principe leur paroît ne pouvoir s'accorder avec l'immutabilité de Dieu, ni avec les loix générales suivant lesquelles il a construit & conservé ce vaste Univers: ce qui paroît d'abord très-vrai-semblable, & il n'y a gueres que l'experience qui en puisse faire voir la fausseté. Mais parceque les experiences que l'on a faites sur les corps durs à ressort, ne sont pas d'accord avec ce principe, puisque dans une infinité de chocs il y a du mouvement qui se perd & d'autre qui se rétablit, il a fallu en chercher un autre qui ne s'opposât ni à l'immutabilité divine ni aux experiences. Le R. P. Malebranche qui a donné des loix du mouvement, & qui avoit soûtenu ce sentiment, examinant cette matiere de plus près, a enfin trouvé le dénouëment de ce mystere, en considerant que dans tous les chocs des corps, leur centre commun de pesanteur a toûjours avant & après le choc une

égale vîtesse. Voici comme ce grand Philosophe s'explique. *Dans cette Proposition*, Dieu conserve toujours dans l'Univers une égale quantité de mouvement, *il y a une équivoque qui fait qu'elle est vraïe en un sens, & fausse en un autre, conforme ou contraire à l'experience. Elle est vraïe en ce sens, que le centre de pesanteur de deux ou plusieurs corps qui se choquent de quelque maniere que ce puisse être, se meut toûjours de la même vîtesse avant & après le choc. De sorte qu'il est vrai que Dieu conserve toûjours une egale quantité de mouvement de même part, ou un égal transport de matiere. Par exemple lorsque* m6 *choque* 5m0, *l'experience apprend qu'après le choc* m6 *réjaillit* m4, *&* 5 m0 *avance* 5 m 2. *Or* 5m2 *ou* m10 *en avant moins* m4, *ou ce qui est la même chose, plus* m4 *en arriere, est égal à* m6, *qui est la quantité de mouvement de même part, ou la même force qui étoit avant le choc. Ainsi cette proposition*, Que Dieu conserve toûjours une égale quantité de mouvement, *est vraïe en ce sens.*

Mais cette proposition est fausse & contraire à l'experience prise en ce sens, que la somme du mouvement de chacun des corps, de quelque maniere qu'ils se choquent, soit aprés le choc égale à celle qu'ils avoient avant le choc, ou que la quantité absoluë de mouvement demeure toûjours la même. Car dans l'exemple ou l'experience précedente, avant le choc la quantité de mouvement n'étoit que m 6, *celle de* 5 m 0 *étant nulle: mais aprés le choc elle devient* m14, *puisque* 5m2, *ou* m10 *plus* m4 *est égal à* m14. *Ainsi par le choc la quantité de mouvement prise absolument, c'est-à-dire sans avoir égard aux sens contraires dont les corps sont mûs, augmente ou diminuë sans cesse.*

Comme il en est de même dans une infinité d'autres exemples, l'on doit conclure que la Loi immuable que l'Auteur de la nature suit constamment dans la conservation de ce monde visible, est que dans tous les chocs des corps, il y ait toûjours une égale quantité de mouvement de même part, ou un égal transport de matiere. Mais les Metaphysiciens ne manqueront pas de demander pourquoi Dieu observe plûtôt cette Loï, que celle de conserver toûjours une égale quantité absoluë de mouvement,

puisque cela s'accorde également bien avec son immutabilité. L'on peut répondre que suivant cette derniere Loi, il n'y auroit pas cet équilibre si necessaire à la conservation des corps dont ce monde est composé : car comme on ne sçauroit mouvoir un corps que par le choc d'un autre, le choc étant la cause occasionnelle de la communication des mouvemens, il faut toûjours dans tous les mouvemens considerer deux ou plusieurs corps, & les rapporter l'un à l'autre, puisqu'ils agissent l'un sur l'autre. Or comme c'est de leur centre commun de pesanteur que doit dépendre l'équilibre, c'est aussi à ce centre auquel il faut avoir égard pour connoître le résultat de leurs mouvemens. Ainsi il y aura toûjours équilibre lorsque ce centre aura avant & après le choc une égale vîtesse, ou ce qui revient au même, que Dieu conservera une égale quantité de mouvement de même part. Il faut donc dire que cette Loi *porte beaucoup plus le caractere des attributs divins* (ce sont les paroles du P. Malebranche) *nonobstant la varieté infinie des mouvemens des corps particuliers. Car le mouvement de tous les corps en general est toûjours le même, tout demeure, pour ainsi dire, dans un parfait & immuable équilibre. Il est clair que Dieu agit toûjours de la même maniere, avec uniformité, une parfaite simplicité, puisqu'il observe sans cesse cette Loi dans les chocs infinis des corps, que leur centre de pesanteur demeure en repos, ou se meuve toûjours nonnobstant le choc avec la même vitesse; & par consequent qu'il y ait toûjours dans toutes les parties de l'Univers prises ensemble le même mouvement ou la même force, nonobstant les mouvemens variables des corps particuliers necessaires pour perfectionner l'Univers, & pour exprimer la sagesse & les autres attributs du Createur.*

3. Si deux corps se choquent de nouveau avec la même vîtesse qu'ils ont acquise après le premier choc, ils reprendront par ce nouveau choc la même vîtesse qu'ils avoient avant le premier choc. Cela est évident.

4. Dans les corps qui se choquent, il ne se conserve pas toûjours la même quantité de mouvement après le

choc, mais elle peut augmenter ou diminuer. Soit un petit corps m choquant un grand $m + x$ en repos avec la vîtesse v: on trouvera qu'après le choc la vitesse de $m + x$ sera $\frac{2mv}{2m+x} = v - \frac{xv}{2m+x}$, & celle de m sera $-\frac{xv}{2m+x}$; donc la quantité de mouvement après le choc sera $\frac{2mmv + 2mxv + mxv}{2m+x} = \frac{2mmv + 3mxv}{2m+x} = mv + xv - \frac{xxv}{2m+x}$; mais avant le choc elle étoit mv; donc elle est plus grande après le choc, parceque $\frac{xxv}{2m+x}$ est plus petite que xv.

Que si maintenant l'on faisoit choquer ces mêmes corps avec les vîtesses résultantes du premier choc, sçavoir $m + x$ avec $\frac{2mv}{2m+x}$, & m avec $\frac{xv}{2m+x}$; comme * ces corps reprendroient les mêmes vîtesses qu'il avoient avant le premier choc, il est clair que la quantité du mouvement seroit diminuée. * *Art.* 3.

5. Si deux corps égaux se choquent avec des vîtesses égales ou inégales, ils feront échange de leurs vîtesses après le choc, & réjailliront.

6. Si deux corps inégaux se choquent par des mouvemens contraires, & que leurs vîtesses soient en raison inverse de leurs masses; ils réjailliront après le choc avec la même vîtesse qu'ils avoient avant le choc.

7. Si deux corps inégaux se choquent par des mouvemens contraires, & qu'après le choc ils aillent tous deux du même côté, ou que l'un demeure en repos, la somme de leurs quantitez de mouvement après le choc, sera égale à la difference de celles qu'ils avoient avant le choc.

Exemple 1. Que $4m12$, & $2n4$ se choquent, on trouvera par la regle que le premier continuëra de se mouvoir après le choc avec $\frac{4}{3}$ de vîtesse, & que le second réjaillira avec $\frac{52}{3}$. Or $\frac{16}{3} + \frac{104}{3} = 40$ qui est la difference des quantitez de mouvement avant le choc; donc, &c.

Exemple 2. Si les corps qui se choquent sont $4m8$ & $2n4$, le premier deviendra $4m0$, & le second $-2n12$, c'est à dire que l'un demeurera en repos, & l'autre réjaillira avec 12 degrez de vîtesse : or $32 - 8 = 24$; donc, &c.

8. Que si les corps réjaillissent tous deux après le choc, la somme de leurs quantitez de mouvement après le choc sera plus grande que la difference de celles qu'ils avoient avant le choc, & cette nouvelle difference sera égale au double de la quantité de mouvement du corps auquel il en reste le moins. Que $5m4$ & $3n2$ se choquent, le premier réjaillira $5m\frac{1}{2}$, & le second $3n\frac{11}{2}$: or $\frac{5}{2} + \frac{33}{2} = 19$, qui est la quantité du mouvement après le choc, la difference avant le choc étoit 14 ; donc $19 - 14 = 5$ est double de $\frac{5}{2}$

9. Si un corps est triple d'un autre, & qu'ils se choquent avec des vîtesses égales, le plus grand après le choc demeurera toûjours en repos, & le plus petit réjaillira avec une vîtesse double de celle qu'il avoit avant le choc. Soient ces deux corps $9\,mv$ & $3\,mv$, on trouvera par la regle que le premier deviendra $9m0$, & le second $-3m2v$.

10. Si deux corps se choquent par des mouvemens contraires, la vîtesse qu'un des corps perdra est à celle qu'il perdroit s'il choquoit le même corps en repos, comme la somme des vîtesses est à la vîtesse du corps choquant. Soient ces deux corps m & n qui se choquent d'abord par des mouvemens contraires avec les vitesses v & r, l'on trouvera par la regle que la vîtesses que le corps m perdra sera $\frac{2n \times \overline{v + r}}{m + n}$; mais que si n étoit en repos, la vitesse que m perdroit seroit $\frac{2n \times v}{m + n}$. Or $\frac{2n \times \overline{v + r}}{m + n} . \frac{2n \times v}{m + n} :: v + r . v$; donc, &c.

11. Si deux corps se choquent par des mouvemens contraires, la vîtesse que le plus fort perd par le choc du plus foible est égale à celle que ce même corps s'il étoit en repos recevroit du plus foible, & qu'il fût choqué avec une

vîteſſe égale à la ſomme ou à la vîteſſe reſpective de ces corps. Soient ces deux corps m & n qui ſe choquent avec les vîteſſes v & r la vîteſſe que le corps m perdra ſera $\frac{2n \times \overline{v+r}}{+n}$; ſi le corps m étoit en repos, & que le corps n le choquât avec la vîteſſe $v+r$, celle qu'il lui donneroit ſeroit la même; donc, &c.

12. Si deux corqs inégaux ſe choquent avec des vîteſſes égales, le plus petit réjaillira toûjours. Pour le plus grand, quelquefois il continuëra ſon mouvement, quelquefois il rejaillira, & quelquefois il demeurera en repos; ce qui eſt évident par la regle generale.

13. Si deux corps ſe choquent, & les produits faits de la grandeur ou des maſſes de ces corps par les quarrez de leurs vîteſſes, étant ajoûtez enſemble, feront des ſommes égales devant & après le choc. Il n'y a qu'à en faire le calcul pour en être convaincu.

14. Si un corps quelque petit qu'il ſoit & quelque vîteſſe qu'il ait, en choque un autre en repos quelque grand qu'il ſoit, il lui communiquera toûjours du mouvement: car par la regle il communiquera toûjours quelque vîteſſe au grand; à quoi il faut ajoûter que le grand étant en repos, n'a point de force pour reſiſter au mouvement, puiſque la force d'un corps eſt le produit de ſa maſſe par ſa vîteſſe.

15. Si un corps en rencontre un autre égal & en repos, il lui communiquera toute ſa vîteſſe, & il reſtera en repos.

16. Si un corps en choque un plus petit en repos, il lui donnera toûjours une plus grande vîteſſe que la ſienne; mais elle ſera toûjours moindre que le double de la ſienne. Soit le corps $m+x$ choquant avec la vîteſſe v le plus petit m en repos, ſa vîteſſe après le choc ſera $\frac{2mv+2xv}{2m+x}$ $= v + \frac{xv}{2m+x}$. Or cette vîteſſe eſt plus grande que celle du choquant, mais moindre que $2v$; donc, &c.

17. Si un corps en choque un autre plus petit en repos,

& que la vîtesse du choquant soit égale à la somme des masses de ces corps, le petit après le choc aura une vîtesse égale au double de la masse du grand, & celle que le grand perdra sera double de la masse du petit. Soit $5m8$ choquant $3m0$, le premier après le choc deviendra $5m2$, & le choqué $3m10$; donc, &c.

18. Que si c'est le petit corps qui rencontre le plus grand en repos, & que la vîtesse du petit soit égale à la somme des masses des deux corps, le grand après le choc aura une vîtesse double de la masse du petit, & par consequent celle que le petit perdra sera aussi double de la masse du grand. Ce qui est évident.

19. Si un corps en rencontre un autre plus grand que lui en repo, il lui donnera une vîtesse moindre que sa sienne, & il réjaillira toûjours. Que m choque $m+x$ avec la vîtesse v, celle qu'il lui communiquera sera $\frac{2mv}{2m+x} = v - \frac{xv}{2m+x}$, & celle qui lui restera sera toûjours negative; donc, &c.

20. La vîtesse qu'un grand corps donneroit à un petit corps en repos, est à celle que ce petit corps donneroit au grand s'il étoit en repos, les vîtesses des choquans étant égales, en même raison que la masse du grand est à la masse du petit. Car soit mv choquant $n0$, la vîtesse de $n0$ sera $\frac{2mv}{m+n}$. Que si nv choque $m0$, sa vîtesse sera $\frac{2nv}{m+n}$. Or ces vîtesses sont comme m à n; donc, &c.

21. Si un même corps en choque un autre en repos avec deux vîtesses inégales, les vîtesses que le corps choqué acquerera seront en même raison que celle du corps choquant. Ce qui est évident.

22. Si un même corps choque l'un après l'autre deux corps inégaux en repos avec les vîtesses égales, les vîtesses que ces corps recevront seront réciproquement proportionnelles à la somme du choquant & de quelqu'un des choquez. Soient ces trois corps m, n, p, dont les deux derniers sont en repos, & que v exprime la vîtesse de m, la vîtesse du corps n après le choc sera $\frac{2mv}{m+n}$, celle du

corps

corps p ſera $\frac{2mv}{m+p}$. Or ces vîteſſes ſont comme $m+p$ à $m+n$; donc, &c.

23. Si un corps en choque deux autres inégaux & en repos, & qu'il leur communique des vîteſſes égales, les vîteſſes du choquant doivent être entr'elles comme la ſomme du choquant & de quelqu'un des choquez. Soient encore ces trois corps m, n, p. On aura (en ſuppoſant les vîteſſes du choquant x & y) pour la vîteſſe du corps n, $\frac{2mx}{m+n}$, & pour celle de p, $\frac{2my}{m+p}$. Or par la ſuppoſition ces deux vîteſſes doivent être égales, donc $\frac{2mx}{m+n} = \frac{2my}{m+p}$, donc $x.y :: m+n. m+p$; donc, &c.

24. Si deux corps inégaux en frapent un autre en repos avec la même vîteſſe, les vîteſſes qu'ils lui communiqueront ſeront en raiſon compoſée de la raiſon des corps choquans, & de la raiſon reciproque de ces mêmes corps plus le corps choqué. Que m & n choquent p en repos avec la vîteſſe v, la vîteſſe p choqué par m ſera $\frac{2mv}{m+p}$, & choqué par n ſera $\frac{2nv}{n+p}$. Or $\frac{2mv}{m+p}. \frac{2nv}{n+p} :: m \times \overline{n+p}. n \times \overline{m+p}$; donc, &c.

25. Si un corps en choque un autre en repos, & qu'après le choc ils avancent tous deux du même côté, ou que le choquant demeure en repos, les quantitez de mouvement ſeront égales avant ou après le choc. Par exemple, que $5m3$ choc $3n0$, le premier après le choc deviendra $5m\frac{3}{4}$, & le ſecond $3n\frac{15}{4}$; donc les quantitez de mouvement ſont égales avant & après le choc. Que ſi $4m4$ choque $4n0$, le premier demeurera en repos, & le ſecond ſe mouvra avec 4 degrez de vîteſſe; donc, &c. Mais ſi le choquant réjaillit, la quantité de mouvement de celui qui s'avance ſera plus grande que celle du choquant avant le choc, & la difference ſera égale à la quantité de mouvement avant le choc, du corps qui réjaillit. Car que $3m8$ choque $9n0$, la quantité de mouvement eſt 24; mais

$9n0$ devient $9n4$, & $3m8$ devient $-3m4$. Or $36-12=24$; donc, &c.

26. Si plusieurs boules égales sont rangées de suite, & qu'une autre boule égale choque la premiere, la derniere seule en recevra la vîtesse, & les autres demeureront en repos. Que s'il y en a deux qui se meuvent ensemble, & qui en choquent une suite qui se touchent, il n'y aura que les deux dernieres qui acquereront du mouvement, les autres demeureront en repos. Que s'il y en a trois qui se meuvent ensemble, il y en aura trois de celles qui se touchent qui recevront du mouvement, & ainsi de suite. Ce qui est évident par la regle.

27. Si trois corps inégaux m, n, p, sont tels que m soit plus grand que n, & n plus grand que p, & que n & p soient en repos; je dis que le corps p étant mis en mouvement par m par l'entremise du corps n, recevra une plus grande vîtesse que s'il étoit choqué immediatement par m.

Ayant nommé le premier corps m & sa vîtesse v, on prendra $m-x$ pour le second, & $m-x-y$ pour le troisiéme. Maintenant on fera par la regle $2m-x . 2m :: v . \frac{2mv}{2m-x}$ vîtesse de n choqué par m; ensuite $2m-x-y . 2m :: v . \frac{2mv}{2m-x-y}$ vîtesse de p choqué aussi par m; enfin $2m-2x-y . 2m-2x :: \frac{2mv}{2m-x} . \frac{2mv \times \overline{2m-2x}}{\overline{2m-x} \times \overline{2m-2x-y}}$ qui est la vîtesse du corps p choqué par n avec la vîtesse qu'il a reçûë du corps m. Et divisant cette grandeur haut & bas par $2m-2x$, on aura

$$\frac{2mv}{2m-x-y-\frac{xy}{2m-2x}}$$

. Or il est visible que cette fraction est plus grande que $\frac{2mv}{2m-x-y}$ qui étoit la vîtesse de p choqué immediatement par m; donc, &c. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Que si l'on suppose que le corps m qui est le plus grand soit en repos, & que p choquant n, ce corps n avec la vîtesse qu'il a reçûë de p aille fraper le corps m; on démontrera de la même maniere que m acquerera plus de vîtesse

étant ainſi choqué, que s'il l'étoit immediatement par p. Il eſt donc évident qu'un corps en repos reçoit moins de vîteſſe d'un autre corps plus grand ou plus petit, s'il en eſt choqué immediatement, que s'il étoit choqué par l'entremiſe d'un troiſiéme de moïenne grandeur.

28. Si le repos du milieu eſt moïen proportionnel entre les deux autres, je dis que le troiſiéme corps acquerera une plus grande vîteſſe étant choqué par le moïen qu'on ſuppoſe avoir été frapé par le premier, que s'il étoit choqué de la même maniere par tout autre corps. Car ſuppoſant encore les trois corps m, n, p, & cherchant quel raport le corps du milieu n doit avoir aux deux autres, afin que la vîteſſe de p choqué par m par l'entremiſe de n, ſoit la plus grande qu'il eſt poſſible; on trouvera par la regle que la vîteſſe du corps n choqué par m avec la vîteſſe v ſera $\frac{2mv}{m+n}$; que celle de p choqué auſſi par m ſera $\frac{2mv}{m+p}$; enfin que celle de p choqué par n avec la vîteſſe que m lui a communiquée ſera $\frac{4mnv}{nn+mn+mp+np}$, qui doit être un plus grand. Prenant donc ſuivant la regle *de la 3 Section de l'Anal. des Infiniment petits*, la difference de cette fraction dans laquelle il n'y a que n de variable, & l'égalant à zero, on en tirera cette égalité $nn=mp$; donc $m.n::n.p$; donc le corps n doit être moïen proportionnel entre m & p, afin que p acquiere la plus grande vîteſſe poſſible. *Ce qu'il falloit démontrer.* Ces deux derniers articles avoient déja été donnez par M. Saurin dans un Journal des Sçavans, en ſuppoſant la regle generale lorſqu'un corps eſt en repos, démontrée par M. Hugens.

29. Il eſt évident que plus on interpoſera de corps, & plus on augmentera la vîteſſe du dernier, & que cette vîteſſe ſera toûjours la plus grande qu'il eſt poſſible, ſi tous ces corps ſont en progreſſion geometrique. Par exemple, ſi l'on donne 100 corps diſpoſez par ordre en progreſſion double, & que le mouvement commence par le plus grand, on trouvera après en avoir fait le calcul, que la vîteſſe du plus petit eſt à celle qu'avoit le plus grand avant le choc,

comme 14760000000 eſt à 1. Que ſi c'eſt le plus petit qui commence à ſe mouvoir, la quantité de mouvement ſera augmentée en raiſon de 1 à 4677000000000. C'eſt-là un des paradoxes les plus ſurprenans, dont la découverte eſt dûë à M. Hugens.

30. Si deux corps égaux étant mûs du même côté avec des vîteſſes inégales, ſe choquent, ils continuëront toûjours de ſe mouvoir du même côté, mais ils feront échange de leurs vîteſſes : ce qui eſt évident par la regle.

31. Si un corps en rencontre un autre plus petit mû du même côté, la vîteſſe qu'il acquerera ſera plus grande que celle du grand avant le choc ; & celle que le grand conſervera ſera auſſi plus grande que celle du petit avant le choc. Soient ces deux corps $m + x$ & m qui ſe meuvent du même côté avec les vîteſſes v & r ; on fera par la regle $2m + x . 2m + 2x :: v - r . \frac{\overline{2m + 2x} \times \overline{v - r}}{2m + x}$, qui eſt la vîteſſe que le grand donnera au plus petit. Ajoûtant donc cette vîteſſe avec r, on aura pour la vîteſſe du petit aprês le choc $v + \frac{xv - xr}{2m + x}$ qui eſt plus grande que v. Et pour avoir celle du grand, on fera $2m + x . 2m :: v - r . \frac{2mv - 2mr}{2m + x}$, laquelle étant ôtée de v, donnera pour celle du grand après le choc $r + \frac{xv - xr}{2m + x}$, qui eſt plus grande que r ; donc, &c.

32. Que ſi c'eſt le plus petit qui en rencontre un plus grand mû du même côté, la vîteſſe que le grand aura après le choc ſera plus petite que celle du petit ; mais pour le petit quelquefois il continuëra ſon mouvement avec une vîteſſe plus petite que celle du grand avant le choc ; quelquefois il demeurera en repos, & quelquefois il réjaillira. Cela eſt évident par la regle, & il eſt inutile d'en donner des exemples.

33. Si deux corps ſe choqent en ſe mouvant de même part, la vîteſſe que le corps qui en a le moins reçoit de celui qui en a le plus, eſt égale à celle qu'il recevroit s'il étoit en repos, & qu'il fût choqué par le même corps avec une

vîtesse égale à la difference des vîtesses de ces deux corps : car si ces deux corps sont m & $m-x$, & leurs vîtesses v & r ; on trouvera dans les deux cas que la vîtesse que le plus petit reçoit du plus grand est $\frac{2mv-2mr}{2m-x}$.

34. Si deux corps se choquent en se mouvant de même part, la vîtesse que le plus grand communiquera au plus petit, est à celle qu'il lui communiqueroit s'il étoit en repos en même raison que la difference des vîtesses est à la vîtesse du plus grand avant le choc. Ce qui est évident.

35. Si un corps en choque un autre mû du même côté, la somme des quantitez de mouvement des deux corps après le choc sera la même qu'avant le choc, s'ils avancent tous deux, ou si celui qui a le plus de vîtesse demeure en repos. Mais si celui qui attrape l'autre réjaillit, la quantité de mouvement de l'autre sera plus grande que celle des deux corps avant le choc, & la difference sera égale à la quantité de mouvement du corps rejaillissant.

I. EXEMPLE.

1. Que $4m8$ attrape $2n4$, la quantité de mouvement est 40 ; mais après le choc $4m8$ devient $4m\frac{16}{3}$ & $2n4$, devient $2n\frac{28}{3}$; donc &c.

Que $m12$ attrape $3n4$ la quantité de mouvement est 24 ; mais après le choc $m12$ devient $m0$, & $3n4$ devient $3n8$; donc &c.

Enfin que $2m8$ attrape $10n2$, la quantité de mouvement sera 36 ; mais après le choc $10n2$ devient $10n4$, $2m8$ devient $-2m2$, c'est-à-dire qu'il réjaillit avec deux degrez de vîtesse. Or la quantité de mouvement du second est 40 qui differe de 36, du nombre 4 qui est la quantité de mouvement du premier après le choc ; donc, &c.

L'on résoudra avec la même facilité une infinité d'autres questions ou de problêmes, que l'on pourra proposer sur cette matiere, & l'on ne s'y est peut-être que trop arrêté.

COMPARAISON

De diverses Observations de l'Eclipse du Soleil du 12 May 1706 faites en diverses Villes de l'Europe.

PAR M. CASSINI le fils.

1706. 17. Nov. APrès avoir reçû de divers lieux les Observations de cette Eclipse, nous les avons comparées à l'Observation qui en a été faite à Paris, décrite dans la Figure par la methode que nous pratiquons ordinairement, pour déterminet la difference des meridiens entre Paris & les lieux où cette Eclipse a été observée.

Parmi ces Observations il y en a plusieurs qui ont été faites dans la bande de la terre où l'Eclipse a été totale, comme Montpellier, Arles, Marseille, Geneve & Zurik. Dans les autres endroits elle a été plus petite à proportion que ces lieux étoient plus éloignés de cette bande. Comme l'on ne put pas observer le commencement de l'Eclipse à Paris, & qu'on ne l'apperçût qu'à $8^h\ 25'\ 38''$, auquel tems on jugea qu'il pouvoit y avoir environ 20 secondes qu'elle étoit commencée; l'on a supposé dans la Figure son commencement à $8^h\ 25'\ 20''$.

Nous ne nous sommes pas contenté de déterminer la difference des meridiens par le commencement & par la fin de l'Eclipse, dans lesquels il y a souvent quelque ambiguité; mais nous avons aussi examiné celle qui résulte des autres Phases dans les endroits où l'on a observé la quantité des doigts éclipsés, afin d'avoir un plus grand nombre d'observations qui concourent à la détermination de la difference des meridiens.

Comparaison de l'Eclipse observée à Montpellier par Messieurs de la Societé Royale des Sciences.

	A Montpellier.	A Paris par la Figure.	Difference des meridiens entre Paris & Montpellier.
Commencement à	8h 21′	8 16′ 10″	4′ 50″.
Un doit.	8 25 37	8 21 25	4 12
Deux doits.	8 30 52	8 26 40	4 12
Trois doits.	8 36 11	8 31 45	4 26
Quatre doits.	8 41 11	8 37 0	4 11
Cinq doits.	8 46 10	8 42 15	3 55
Six doits.	8 51 34	8 47 40	3 54
Sept doits.	8 56 55	8 53 15	3 40
Huit doits.	9 2 33	8 58 35	3 58
Neuf doits.	9 8 19	9 4 20	3 59
Dix doits.	9 13 57	9 9 40	4 17
Onze doits.	9 19 52	9 15 20	5 32
Immersion totale.	9 25 55	9 22 0	3 55
Commencement de l'Emersion.	9 30 5	9 24 10	5 55
Onze doits.	9 36 50	9 30 30	6 20
Dix doits.	9 42 36	9 36 25	6 11
Neuf doits.	9 48 13	9 42 10	6 3
Huit doits.	9 54 2	9 48 0	6 2
Sept doits.	9 59 47	9 53 50	5 57
Six doits.	10 5 33	9 59 40	5 53
Cinq doits.	10 11 35	10 5 40	5 55
Quatre doits.	10 17 28	10 11 40	5 48
Trois doits.	10 23 17	10 17 40	5 37
Deux doits.	10 29 26	10 23 35	5 51
Un doit.	10 35 25	10 29 20	6 5
Fin de l'Eclipse.	10 40 38	10 35 20	5 18

En prenant une moyenne entre ces differences, l'on aura la difference des meridiens entre Paris & Montpellier de 5′ 5″.

A Arles par M. Davizard.

	A Arles.	A Paris par la Figure.	Difference des meridiens entre Paris & Arles.
Commencement à	8h 28′ 24″	8h 16′ 0″	6′ 44″
Quatre doits.	8 45 44	8 37 30	8 14
Cinq doits.	8 52 44	8 43 15	9 30
Onze doits.	9 24 44	9 16 0	8 45
Obscuration totale.	9 30 44	9 21 50	8 54
Recouvrement de lumiere.	9 35 44	9 26 10	9 34
Dix doits.	9 45 44	7 37 10	8 24
Neuf doits.	9 51 44	9 43 0	8 44
Huit doits.	9 57 44	9 49 0	8 44
Sept doits.	10 3 44	9 54 50	8 55
Six doits.	10 8 44	10 0 40	8 4
Cinq doits.	10 15 45	10 6 45	9 0
Quatre doits.	10 21 45	10 12 40	9 5
Trois doits.	10 27 45	10 18 45	9 0
Deux doits.	10 33 15	10 24 30	8 45
Un doit & demi.	10 36 30	10 27 45	8 45
Fin de l'Eclipse.	10 45 45	10 36 55	8 50

M. Davizard nous ècrivit qu'il n'avoit pas observé exactement le commencement de l'Eclipse, & qu'il falloit s'en tenir aux Observations suivantes. En prenant une moyenne entre les differences des meridiens qui résultent de cette Observation, l'on aura la difference des meridiens entre Paris & Arles de 8′ 50″.

A Avignon dans le College des Jesuites.

	A Avignon.	A Paris par la figure	Difference des meridiens entre Paris & Avignon.
Commencement à	8h 27′ 55″	8h 17′ 25″	10′ 30″
Un doit.	8 32 3	8 22 20	9 43
Deux doits.	8 36 10	8 27 25	8 45
Trois doits.	8 41 18	8 32 40	8 38
Quatre doits.	8 47 12	8 38 0	9 12
Cinq doits.	8 52 46	8 43 55	8 51

Six doits.

Six doits.	8h 58′ 29″	8h 49′ 10″	9′ 19″
Sept doits.	9 4 20	8 54 40	9 40
Dix doits.	9 21 56	9 11 15	10 41
Onze doits.	9 26 24	9 16 50	9 34
Eclipse totale.	9 33 47	9 22 50	10 57
Recouvrement de lumiere.	9 36 17	9 26 10	10 7
Onze doits.	9 43 10	9 32 20	10 50
Dix doits.	9 48 55	9 38 5	10 50
Neuf doits.	9 54 50	9 43 50	11 0
Huit doits.	9 59 20	9 49 30	9 50
Sept doits.	10 5 21	9 55 20	10 1
Six doits.	10 11 11	10 1 5	10 6
Cinq doits.	10 18 29	10 7 25	11 4
Quatre doits.	10 24 28	10 13 25	11 3
Trois doits.	10 30 5	10 19 30	10 35
Deux doits.	10 35 28	10 25 15	10 13
Un doit.	10 41 1	10 31 5	9 56
Fin de l'Eclipse.	10 46 48	10 36 55	9 53

En prenant une moyenne entre les differences qui résultent de cette Observation, l'on aura la difference des meridiens entre Paris & Avignon de 0′ 31″.

A Marseille par le P. Laval & M. Chazelles.

	A Marseille.	A Paris par la Figure.	Difference des meridiens entre Paris & Marseille.
Commencement à	8h 28′ 43″	8h 17′ 0″	11′ 43″
Un doit.	8 33 50	8 22 15	11 35
Deux doits.	8 38 39	8 27 10	11 29
Trois doits.	8 44 10	8 32 40	11 30
Quatre doits.	8 49 44	8 38 5	11 39
Cinq doits.	8 54 4	8 43 5	10 59
Six doits.	8 59 54	8 48 50	11 4
Sept doits.	9 5 46	8 54 10	11 36
Huit doits.	9 11 54	8 59 50	12 4
Neuf doits.	9 16 54	9 5 0	11 54
Dix doits.	9 23 4	9 11 0	12 4
Onze doits.	9 28 21	9 16 30	11 51
Eclipse totale.	9 34 40	9 22 30	12 10

Recouvrement de lumiere.	9h 37′ 40″	9h 26′ 30″	11′ 10″
Onze doits.	9 43 41	9 32 30	11 11
Dix doits.	9 49 14	9 38 0	11 14
Neuf doits.	9 55 30	9 43 50	11 40
Huit doits.	10 0 4	9 49 30	10 34
Sept doits.	10 5 38	9 55 0	10 38
Six doits.	10 12 26	10 1 10	11 16
Cinq doits.	10 18 6	10 7 5	11 1
Quatre doits.	10 23 36	10 13 0	10 36
Trois doits.	10 30 35	10 19 20	11 15
Deux doits.	10 36 5	10 25 0	11 5
Un doit.	10 42 35	10 31 0	11 35
Fin de l'Eclipse.	10 47 30	10 36 50	10 40

En prenant une moyenne entre les differences qui résultent de l'Observation de ces Phases, l'on aura la difference des meridiens entre Paris & Marseille de 11′ 22″.

A Geneve par messieurs Violier & Gautier.

	A Geneve.	A Paris par la Figure.	Difference des meridiens entre Paris & Geneve.
Immersion totale.	9h 45′ 32″	9h 29′	16′ 32″
Recouvrement de la lumiere à	9 48 32	9h 31 30	17 2

L'Observation de l'Immersion totale & du recouvrement de lumiere s'accorde à 13 secondes prés de celle que M. Fatio a faite à Geneve dans un autre endroit.

A Zurik par M. Scleuzer.

	A Zurik.	A Paris par la figure.	Difference des meridiens entre Paris & Zurik.
Commencement à	8h 54′	8h 26′ 20″	27′ 40″
Le milieu.	8 58	9 33 50	24 10
Fin de l'Eclipse.	11 12	10 47 20	24 40

Il y a apparence qu'il y a quelque erreur dans l'Observation du commencenment de l'Eclipse, & qu'il faut s'en tenir à celle de la fin qui s'accorde à quelques secondes prés à celle du milieu de l'Eclipse.

Le Soleil fut couvert à Zurik pendant quatre minutes, que l'on voyoit les étoiles de la premiere grandeur & Venus. L'obscurité y fut si grande qu'on ne reconnoissoit pas les gens à quatre pas de distance. Le bord de la Lune paroissoit comme un anneau d'or, & la rosée tomba & moüilla les herbes.

A Strasbourg par M. Einsenschmid.

	A Strasbourg.	A Paris par la Figure.	Difference des meridiens entre Paris & Strasbourg.
Commencement à	8h 49′ 38″	8h 27′ 55″	21′ 43″
Le milieu.	9 58	9 35 30	22 30
Fin de l'Eclipse.	11 9 5	10 48 0	21 5

La grandeur de l'Eclipse fut observée à Strasbourg de 11 doits 38 minutes.

A Genes par M. le Marquis Salvago.

	A Genes.	A Paris par la Figure.	Difference des meridiens entre Paris & Genes
Fin de l'Eclipse.	11h 9′ 23″	10h 43′ 40″	25′ 43″

Les nuages empêcherent d'observer exactement à Genes le commencement de l'Eclipse & la plûpart des Phases.

A Modene par le Pere Fontana.

	A Modene.	A Paris par la Figure.	Difference des meridiens entre Paris & Modene.
Commencement à	8h 57′ 0″	8h 22′ 40″	34′ 20″

A Bologne par Messieurs Manfredi & Stancari.

	A Bologne.	A Paris par la Figure.	Difference des meridiens entre Paris & Bologne.
Commencement à	8h 58′ 50″	8h 22′ 50″	36′ 0″
Un doit.	9 4 5	8 28 10	35 55
Deux doits.	9 10 4	8 33 45	35 19
Trois doits.	9 15 14	8 39 10	36 4

Quatre doits.	9ʰ 20′ 50″	8ʰ 44′ 40″	36′ 10″
Cinq doits.	9 26 48	8 50 25	36 23
Six doits.	9 32 15	8 56 5	36 10
Sept doits.	9 38 20	9 2 0	36 20
Huit doits.	9 43 42	9 7 40	36 2
Neuf doits.	9 49 40	9 13 30	36 10
Dix doits.	9 55 58	9 19 50	36 8
Onze doits.	10 3 10	9 26 45	36 29
Dix doits.	10 19 26	9 44 45	35 41
Neuf doits.	10 25 29	9 51 5	34 24
Huit doits.	10 32 10	9 57 10	35 0
Sept doits.	10 39 32	10 3 50	35 42
Six doits.	10 44 57	10 9 40	35 17
Cinq doits.	10 51 53	10 15 50	36 3
Quatre doits.	10 58 20	10 22 25	35 55
Trois doits.	11 3 56	10 28 40	35 16
Deux doits.	11 10 36	10 34 50	35 46
Un doit.	11 16 18	10 40 45	35 33
Fin de l'Eclipse.	11 22 30	10 47 0	35 30

Cette Eclipse fut observée à Bologne de 11 doits un tiers. Au temps de la plus grande obscuration la lumiere du jour étoit fort pâle; & on pouvoit souffrir sans incommodité à la vûë la lumiere du Soleil. En prenant une moyenne entre ces differences, l'on aura la difference des meridiens entre Paris & Bologne de 35′ 50″.

A Rome par M. Bianchini aux termes de Diocletien.

	A Rome.	A Paris par la Figure.	Difference des meridiens entre Paris & Rome.
Commencement à	8ʰ 59′ 48″	8ʰ 19′ 25″	40′ 23″
Un doit.	9 6 33	8 25 25	41 8
Six doits.	9 34 0	8 53 45	40 15
Sept doits	9 41 15	8 59 55	41 20
Huit doits.	9 46 45	9 5 55	40 50
Neuf doits.	9 53 15	9 12 20	40 55
Dix doits.	10 1 15	9 20 5	41 10

Neuf doits.	10h 27′ 0″	9h 46′ 20″	40′ 40″
Huit doits.	10 33 30	9 53 0	40 30
Trois doits.	11 7 0	10 25 40	41 20
Deux doits.	11 12 32	10 31 50	40 42
Fin de l'Eclipse.	11 24 5	10 44 25	39 40

Le Soleil étoit éclipsé de dix doits 36 minutes à 10h 9′ 15″. Il se cacha ensuite dans les nuages, mais on jugea que l'Eclipse n'avoit pas augmenté sensiblement. En prenant une moyenne entre ces differences, l'on aura la difference des meridiens entre Paris & Rome de 40′ 45″.

A Madrid dans le College Imperial par le P. Cassani Jesuite.

	A Madrid.	A Paris par la Figure.	Difference des meridiens entre Paris & Madrid.
Commencement à	7h 43′ 50″	8h 6′ 45″	22′ 55″
Fin de l'Eclipse.	9 57 34	10 20 0	22 26

Le Soleil parut éclipsé à 8h 44′ 30″ de onze doits & demi. L'Eclipse augmenta encore pendant quelques minutes qu'on ne pût pas marquer. On fit l'Observation de cette Eclipse avec un verre de 12 pieds qui representoit l'image du Soleil dans une chambre obscure, & l'on marquoit les minutes & les secondes à une Pendule reglée exactement au Soleil les trois jours précedens.

Depuis le rapport que nous avons fait à l'Academie de diverses Observations de l'Eclipse du Soleil du 12 *May* 1706, *nous en avons reçû plusieurs autres faites en Allemagne qui nous ont été envoyées par M. Einsenschmid. En voici le résultat.*

A Nuremberg par M. Wulzelbaur.

	A Nuremberg.	A Paris par la Figure.	Difference des meridiens entre Paris & Nuremberg.
Commencement à	9h 6′ 30″	8h 32′ 0″	34′ 30″
Fin de l'Eclipse.	11 28 0	10 54 10	34 0

L'Eclipse a été totale à Nuremberg.

A Neubourg sur le Danube par les PP. Jesuites.

	A Neubourg.	A Paris par la Figure.	Difference des meridiens entre Paris & Neubourg.
Commencement à	9h 6′ 20″	8h 30′ 30″	35′ 50″
Immersion totale.	10 12 10	9 37 30	34 40
Recouvrement de lumiere	10 15 33	9 40 50	34 43
Fin de l'Eclipse.	11 26 20	10 52 40	33 40

A Jena par M. Hambergerus.

	A Jena.	A Paris par la Figure.	Difference des meridiens entre Paris & Jena.
Commencement à	9h 11′ 40″	8h 35′ 0″	36′ 40″
Fin de l'Eclipse.	11 32 18	10 56 25	35 53

La grandeur de l'Eclipse fut observée à Jena de 11 doits $\frac{5}{6}$.

A Leipsik par Messieurs Rivinus & Junius.

	A Leipsik.	A Paris par la Figure.	Difference des meridiens entre Paris & Leipsik.
Commencement à	9h 14′ 9″	8h 35′ 45″	38′ 24″
Fin de l'Eclipse.	11 37 31	10 58 0	39 31

A Zeitz par M. Teuberus.

	A Zeitz.	A Paris par la Figure.	Difference des meridiens entre Paris & Zeitz.
Commencement à	9h 15′ 30″	8h 35′ 40″	38′ 50″
Fin de l'Eclipse.	11 36 41	10 57 30	37 11

La grandeur de l'Eclipse fut observée à Zeitz de 11 doits & demi.

A Berlin par M. Hofman.

	A Berlin.	A Paris par la Figure.	Difference des meridiens entre Paris & Berlin.
Commencement à	9h 24′ 20″	8h 39′ 45″	44′ 35″
Fin de l'Eclipse.	11 45 27	11 1 0	44 27

La grandeur de l'Eclipse fut observée à Berlin de 11 doits 52 minutes & demi.

A Breslaw par le P. Heinrich.

	A Breslaw.	A Paris par la Figure	Difference des meridiens entre Paris & Breslaw.
Commencement à	9h 39′ 40″	8h 39′ 45″	59′ 55″.
Immersion totale.	10 49 0	9 49 25	59 35
Recouvrement de lumiere	10 50 0	9 51 10	58 50
Fin de l'Eclipse.	12 2 20	11 4 0	58 20

DE L'ECLIPSE DE LUNE

Du 21 Octobre 1706 à l'Observatoire.

PAR Mrs. DE LA HIRE.

LE Ciel a été couvert ici dans toute la durée de cette Eclipse, & les gros pelottons de nuées qui passoient assez promptement, n'auroient pas empêché qu'on n'en eut observé plusieurs phases, s'il n'y eut eu encore au-dessus une espece de gros broüillard, au travers duquel les corps lumineux paroissent comme coronneux, ensorte qu'on ne peut voir leur disque ni leurs parties bien terminées ; ce qu'on remarque assez souvent en observant le Soleil, quoique son disque paroisse assez net à la vûë simple. 1706. 17. Nov.

Cependant nous avons observé avec le micrometre appliqué à une Lunete de 7 piés de foyer le diametre de la partie éclairée avec autant de justesse qu'il nous a été possible, quoique les termes de l'ombre ne parussent qu'à peine dans les tems où l'on voïoit la Lune le plus distinctement, dont nous avons tiré la quantité de l'Eclipse, comme il suit.

Diametre de la partie éclairée.				Qantité de l'Eclipse.	
H.			de degré.	Doits.	Minutes.
à 6	37.	15′	0″	5	9
	46.	15	50	6	18
	58.	15	0	6	36
7	17.	14	15	6	42
	23.	13	10	7	14

Le Ciel fut si couvert dans tout le reste de l'Eclipse que nous n'en pûmes plus rien observer, & à peine voïoit-on un leger vestige du corps de la Lune par intervalles.

On ne pouvoit rien remarquer des taches dans le tems où le Ciel paroissoit plus découvert.

Un peu aprés l'Eclipse le Ciel devint assez clair, & nous observâmes le diametre de la Lune de 33′ 24″ à la hauteur de 46 degrés $\frac{1}{2}$, d'où nous concluons que son diametre horizontal étoit de 33′ 0″.

OBSERVATIONS

Faites sur le Squelet d'une jeune femme âgée de seize ans, morte à l'Hôtel-Dieu de Paris le 22 Fevrier 1706.

PAR M. MERY.

AVIS.

Les Parties de ce Squelet sont décrites dans leur situation naturelle; mais les figures representent à gauche celles du côté droit, & celles du côté gauche à droit.

Premiere Observation. Le Squelet de cette femme n'a que trois pieds de haut ou environ. Son peu de hauteur a pour cause la courbure de l'épine, & celle des os des cuisses & des jambes; Celle-cy est telle que la plante des pieds posant

posant à terre, les fœmurs se trouvent necessairement fléchis en devant; de sorte que ces deux os ne contribuënt en rien, ou très-peu à sa hauteur. Delà vient aussi que ce Squelet étant debout sur ses jambes, paroît comme s'il étoit assis : ce qui donne lieu de croire que cette femme gardoit pendant sa vie une semblable posture en marchant.

Cette conjecture paroît d'autant plus vrai-semblable que les os des cuisses & des jambes étant étendus, la plante des pieds de ce Squelet, au lieu de poser à terre, comme elle devroit faire, si ces os n'étoient point courbez, se trouve au contraire tournée en arriere comme quand on est à genoux; ainsi il n'y a que l'extremité de la derniere phalage des orteils de ce Squelet qui puisse toucher la terre; situation dans laquelle il étoit absolument impossible que cette femme pût marcher. Sur cela voyez la seconde Figure.

Seconde Observation. Les os des cuisses de ce Squelet étant étendus, & ceux des jambes fléchis, il n'y a que la rotule avec la partie superieure du tibia qui posent à terre, parceque le demi-cercle que décrivent dans leur partie moïenne le tibia & le peroné, fait que ce Squelet étant appuïé sur ces genoux, la partie inferieure de ses jambes se trouve dans cette situation tournée en enhaut; delà vient que la plante des pieds regarde le Ciel, au lieu d'être située en arriere, comme elle se trouve dans les personnes à genoux, dont la conformation des os des jambes n'a rien de vicié.

De ces deux Observations on peut tirer ces deux consequences. Premierement, la plante des pieds de ce Squelet se trouvant tournée en dessus quand ses jambes sont fléchies & ses cuisses étenduës, il étoit très-difficile à cette femme pendant sa vie de se tenir à genoux.

Secondement, cette femme ayant été obligée de tenir ses cuisses aussi fléchies en marchant qu'étant assise, il est évident que sa hauteur demeuroit la même dans ces deux situations. Mais s'appuïant sur ses genoux ses cuisses éten-

duës & ſes jambes fléchies, elle pouvoit ajoûter à ſa hauteur ce que le fœmur à de plus de longueur que le tibia, ce qui ne va pas à plus d'un pouce, en meſurant l'un & l'autre par une ligne droite; au lieu qu'elle l'auroit augmentée d'environ ſix pouces ſi elle avoit pû ſe tenir à genoux ſur la partie convexe des os de ſes jambes, ce qui n'étoit peut-être pas impoſſible; alors elle auroit parû plus grande en gardant cette poſture qu'en marchant. C'eſt ce qu'on remarque en effet par ſon Squelet en le mettant dans ces differentes ſituations.

Troiſiéme Obſervation. L'épine de ce Squelet, dont la courbure eſt la cauſe de la difformité de toutes les autres parties de ſon tronc, imite parfaitement bien par ſes differens contours la figure du corps d'un ſerpent qui rampe ſur la terre pour s'avancer en avant. Tous ces contours extraordinaires ſe font ſur les côtez de l'épine; ce qui n'empêche pas cependant les vertebres de former devant & en arriere les mêmes enfoncemens & les mêmes éminences qu'elles on dans un Squelet dont l'épine n'a rien de difforme.

De la premiere vertebre du coû à la derniere, l'épine eſt peu ſenſiblement cave du côté droit, & convexe du côté gauche; mais depuis la premiere vertebre du dos juſqu'à la derniere, l'épine eſt fort convexe du côté droit, ce qui fait que de ce côté-là le corps des vertebres eſt peu éloigné des côtes: mais parce que cette épine eſt fort concave du côté gauche, il y a entre les côtes & les vertebres une diſtance beaucoup plus grande. D'ailleurs la partie anterieure des vertebres du dos eſt un peu tournée du côté droit.

Au contraire les vertebres des lombes forment par leur aſſemblage une gibboſité très-grande du côté gauche, & une concavité du côté droit qui lui eſt proportionnée, & le devant de ces vertebres panche un peu du côté gauche.

Enfin l'os ſacrum joint au coxis paroît convexe du côté droit & concave du côté gauche, quoiqu'il garde outre

cela ſa figure naturelle qui eſt d'être creux par devant & gibbe par derriere.

Quatriéme Obſervation. Ces differens contours que fait l'épine ſur ſes côtez, ſont cauſe de ce que la ſimphiſe du menton qui répond en ligne droite à celle des os pubis dans un Squelet bien formé, s'en trouve éloignée dans ce Squelet difforme de deux à trois pouces ; delà vient que la face paroît un peu tournée ſur le côté gauche, & le baſſin de la cavité hypogaſtrique tourné ſur le côté droit. Cependant l'extrémité du coxis eſt directement oppoſée à la premiere vertebre du coû ; de ſorte que malgré la grande obliquité de l'épine, le corps de cette femme ne panchoit point plus d'un côté que de l'autre ; ce qui empêchoit qu'il ne parut, étant garni de ſes chairs & revêtu de ſa peau, auſſi contrefait que l'eſt le tronc de ſon Squelet.

Cinquiéme Obſervation. Les vertebres du dos repouſſant du côté droit par leur convexité l'extrémité poſterieure des côtes ſuperieures, forment avec elles de ce côté-là une boſſe conſidérable par derriere ; delà vient que l'omoplate droit paroît fort relevé. La même convexité de ces vertebres fait auſſi que les côtes du même côté décrivent en dedans par leur partie poſterieure un arc fort courbé, ce qui rend la capacité de la poitrine beaucoup plus petite du côté droit que du côté gauche.

Mais parceque les mêmes vertebres du dos entraînent avec elles au dedans de leur courbure les côtes gauches qui leur ſont articulées, delà vient que l'omoplate gauche paroît de ce côté-ci applati ſur le dos, & que les côtes gauches décrivent un arc beaucoup plus ouvert que n'eſt celui des côtes droites, ce qui rend la capacité gauche de la poitrine beaucoup plus vaſte que la droite. C'eſt encore cette même courbure des vertebres du dos qui eſt cauſe que le ſternum décrit une ligne un peu oblique ſur le devant de la poitrine, au lieu d'y décrire une ligne droite comme il fait ordinairement.

Sixiéme Obſervation. Comme les vertebres des lombes

forment au contraire une convexité fort grande du côté gauche, & une concavité très-considerable du côté droit; delà vient que l'espace qui se trouve entre les fausses côtes, les os des iles & ces vertebres est beaucoup plus grand du côté droit que du côté gauche; ce qui rendoit la capacité du ventre de cette femme plus petite du côté gauche que du côté droit.

Septiéme Observation. Mais parceque la courbure que forme l'os sacrum avec les coxis est faite dans un sens contraire à celle des vertebres des lombes, l'espace qui se rencontre entre ces os & l'ischium, est par cette raison plus petit du côté droit que du côté gauche.

Par toutes ces observations il est facile de voir que toute la difformité du tronc du Squelet de cette femme ne peut avoir d'autre cause que la courbure des vertebres: mais il est difficile de trouver celles des contours contraires que fait l'épine par le moïen de leur assemblage. Tâchons cependant de la découvrir.

Huitiéme Observation. De ce que les vertebres ont un peu plus d'épaisseur du côté que l'épine est convexe que de son coté concave, il semble d'abord qu'il n'est rien de si aisé que d'expliquer sa courbure par ce plus & moins d'épaisseur; cependant si l'on fait reflexion que cette épaisseur n'est point une cause efficiente, on concevra sans peine que l'épine n'a pû par son moïen se contourner sur ses côtez en sens contraires; ainsi l'on reconnoîtra qu'il est impossible de rendre raison de ses differens contours par ce plus & le moins d'épaisseur des vertebres, & qu'il faut necessairement avoir recours à la seule contraction des muscles racourcis de l'épine pour expliquer sa differente courbure; parceque le relâchement de ses muscles allongez, & le plus & le moins d'épaisseur des vertebres ne peuvent être que des effets de ses muscles racourcis, comme je le ferai voir par la suite de ces Observations.

Neuviéme Observation. Quand l'épine a sa figure reguliere, & que tous ses muscles agissent ensemble en même tems avec force égale de part & d'autre, ils la fléchissent

ſeulement en arriere, & ne lui font décrire qu'une ſeule ligne courbe; de ſorte que dans cette diſpoſition des muſcles l'épine ne peut pancher d'un côté ni d'autre. Mais s'il arrive que tous les muſcles du côté droit entrent en contraction, & que tous ceux du côté gauche tombent dans le relâchement. Alors l'épine ſe flechit toute entiere du côté droit : le contraire ſuccede quand après cela tous les muſcles du côté gauche ſe contractent, & que ceux du côté droit ſe relâchent.

Or comme l'ame preſide aux mouvemens de tous les muſcles de l'épine en faiſant couler tantôt dans les uns & tantôt dans les autres les eſprits animaux qui les gonflent, il eſt évident que les nerfs qui donnent paſſage à ces eſprits dans les muſcles de l'épine, doivent être tous parfaitement libres & également ouverts de part & d'autre quand ſes muſcles la fléchiſſent en arriere, à droit & à gauche alternativement.

Dixiéme Obſervation. Quand donc l'épine demeure conſtamment flechie de l'un ou de l'autre côté, il faut neceſſairement que le cours des eſprits animaux dans ſes muſcles ne ſoit plus ſoûmis à la direction de l'ame, & qu'une partie de ſes nerfs ſouffre quelque obſtruction, pendant que l'autre reſte libre. Il doit donc couler tout naturellement dans celle-ci plus d'eſprits que dans l'autre; donc les muſcles de l'épine qui en reçoivent une plus grande quantité doivent en ſe gonflant s'acourcir & tenir toûjours l'épine flechie de leur côté.

Par ce ſyſtême ſi vrai-ſemblable il eſt aiſé & de rendre raiſon de la figure irréguliere de l'épine, & de faire voir que l'extenſion de ſes muſcles relâchez; & l'épaiſſeur des vertebres plus petite d'un côté que de l'autre ſont uniquement l'effet de la contraction de ſes muſcles racourcis. Ce que je vais démontrer.

Comme je n'ay jamais vû d'enfant venir au monde avec une épine contournée, je ſuppoſe que cette femme a paſſé quelque tems de ſa vie ayant l'épine à l'ordinaire; mais qu'étant arrivé quelque obſtruction dans ſes nerfs, ſes

mufcles fe font plus contractez d'un côté que de l'autre. Or comme depuis cette obftruction l'épine de cette femme a toûjours gardé la figure contournée qu'on remarque dans fon Squelet, qu'il n'a point été en fon pouvoir de la redreffer, il eft évident que l'ame n'a pû pouffer affez d'efprits dans les mufcles étendus de l'épine pour furmonter la refiftance de fes mufcles racourcis; parceque les nerfs de ceux-ci ayant toûjours refté ouverts, fes mufcles contractez ont reçû inceffamment beaucoup plus d'efprits que fes mufcles relâchez, les nerfs de ceux-là étant toûjours demeuré fermez. Donc les mufcles racourcis de l'épine la tenant par leur contraction permanente inflexiblement flechie de leur côté, ils ont dû premierement tenir les mufcles qui leur font oppofez dans une perpetuelle extenfion. Secondement ils ont toûjours preffé les vertebres moins dures qu'à l'ordinaire les unes contre les autres, & empêché par confequent leur corps de s'étendre du côté de leur racourciffement, & en les écartant de l'autre leur permettre de s'épaiffir davantage du côté des mufcles relâchez. Donc l'extenfion des mufcles allongez de l'épine, & l'épaiffeur du corps des vertebres plus grande d'un côté que de l'autre, ne peuvent être que l'effet de la contraction de fes mufcles racourcis. La contraction permanente & involontaire de ces mufcles eft donc l'unique caufe efficiente de la courbure extraordinaire de l'épine.

Car il n'y a pas d'apparence que la pefanteur du corps ait pû y avoir part; parceque la pefanteur ne pouvant faire pencher le corps que du côté qu'elle fe rrouve plus grande, elle n'auroit pû faire décrire à l'épine que d'un côté feulement une feule courbure, & éloigner par confequent la tête de la ligne perpendiculaire qu'elle décrit avec l'os facrum, les os des iles demeurant immobiles fur les deux jambes.

Or comme l'épine du Squelet de cette femme forme fur fes côtez dans l'étenduë de fa longueur quatre lignes courbes toutes oppofées les unes aux autres en fens con-

traires, & que le coxis répond cependant en ligne droite à la premiere vertebre du coû malgré cette irrégularité, il ne paroît donc nullement vrai-semblable que la pesanteur du corps ait pû causer ces differens contours de l'épine. Il n'en est pas de même de la courbure des os des cuisses & des jambes que je vais examiner.

Onziéme Observation. Les deux fœmurs décrivent chacun presqu'un demi-cercle, dont la partie convexe est située sur le devant, & la concave sur le derriere de ces os. Mais parceque l'un & l'autre se jettent en dehors, l'espace qui est entr'eux se trouve beucoup plus grand dans leur milieu qu'entre leurs extremitez.

Le tibia & le peroné de chaque jambe forment la même figure que les deux fœmurs (ce qui est assez mal representé, à moins que la perspective ne le demande, comme le dessinateur le prétend) mais avec cette difference que la partie convexe du demi-cercle qu'ils décrivent se porte en dedans, & la concave en dehors ; de sorte que les deux tibia se touchent presque par leur milieu , & qu'ils sont fort écartez l'un de l'autre par leurs extremitez, ce qui fait que les pieds qui n'ont rien de difforme se jettent en dehors. De plus le tibia & le peroné sont applatis considerablement sur les côtez dans leur partie moïenne, & un peu tortus dans toute leur longueur.

Après avoir décrit la figure irréguliére de ces os, faisons voir à present que la pesanteur du corps de cette femme jointe à leur peu de solidité, a beaucoup contribué à leur courbure.

Douziéme Observation. Si l'on fait attention que les pieds de son Squelet posant à plomb sur un plancher, les os des cuisses se trouvent necessairement flechis en devant, ce qui fait que ce Squelet paroît assis quoiqu'il soit debout, on concevra aisément qu'il n'y a eu que la seule pesanteur du corps qui ait pû forcer les cuisses de cette femme à demeurer flechies en marchant. Car l'on ne peut pas dire que pour les tenir en cet état leurs muscles flechisseurs

soient demeurez dans une perpetuelle contraction comme ceux de l'épine, puisque cette femme ayant pû pendant sa vie se mettre à genoux, il est évident que ces muscles ont dû se relâcher pour donner lieu à leurs antagonistes d'étendre les cuisses, sans quoi il eût été absolument impossible à cette femme de prendre cette posture.

Il y a même bien de l'apparence, chaque fœmur décrivant un arc convexe en devant & concave par derriere, que la contraction des muscles extenseurs des cuisses a toûjours été plus forte que celle de leurs flechisseurs, autrement les fœmurs n'auroient pû ainsi se courber.

Mais parceque les jambes se flechissent en arriere, & que leurs os décrivent des arcs semblables à ceux des cuisses tat par leur figure que par la situation de leurs parties, il paroît fort vrai-semblable que la contraction des muscles flechisseurs des jambes a dû être au contraire plus forte que celle de leurs extenseurs.

Cependant il faut bien observer que ni la pesanteur du corps ni la contraction des muscles des cuisses & des jambes n'auroient jamais pû causer la courbure du fœmur, du tibia & du peroné, si ces os eussent eu assez de dureté pour résister à l'impression de ces deux causes, leur peu de solidité a donc contribué en quelque façon à les flechir. Aussi voit-on que ni pesanteur du corps ni la contraction des muscles ne produisent point cet effet quand la résistance de ces os surpasse l'effort de ces deux causes.

Il faut encore remarquer que la pesanteur du corps & la molesse des os ne peuvent être que des causes occasionelles de leur courbure, puisqu'il n'y a que la contraction des muscles des cuisses & des jambes plus forte d'une part de l'autre qui ait pû déterminer le fœmur, le tibia & le peroné à se flechir plutôt en arriere qu'en devant.

La courbure des os des bras à laquelle il est certain que la pesanteur du corps n'a pû contribuer, est une preuve évidente de cette verité ; d'où je concluë enfin que la contraction des muscles plus forte d'un côté que de l'autre, est l'unique cause efficiente de la courbure des os.

Je

5.
em.

5.
'em.



Je dis que la contraction des muſcles doit être plus forte d'une part que de l'autre pour flechir les os mêmes ; parceque quand les muſcles antagoniſtes d'une partie agiſſent avec force égale, ils maintiennent les os dans leur figure naturelle, malgré leur moleſſe & la peſanteur du corps.

A l'égard de l'applatiſſement des os des cuiſſes & des jambes, comme il ne paroît pas qu'il puiſſe être rapporté à aucune des cauſes dont j'ai parlé, il y a lieu de croire qu'il ne peut être que l'effet d'une vicieuſe conformation.

COMPARAISON

De l'Obſervation de l'Eclipſe de Lune arrivée en Avril 1706, & faite dans l'Iſle de S. Domingue en Amerique, avec celle qui a été faite à l'Obſervatoire Royal à Paris.

PAR M. DE LA HIRE.

LE Pere Goüye communiqua à l'Academie Samedy dernier une Obſervation de l'Eclipſe de Lune du mois d'Avril de cette année, laquelle avoit été faite au Port de Pei dans l'Iſle de S. Domingue en Amerique. 1706. 24 Novem.

Cette obſervation porte que la Lune étoit éclipſée de 1 doit $\frac{1}{2}$ à $7^h\ 15'$ du ſoir le 27 Avril, & que la fin de l'Eclipſe parut à $9^h\ 40'$. Sa quantité dans le tems de ſa plus forte obſcuration étoit de 5 doits $\frac{1}{2}$. L'Obſervateur marque qu'il ne connoiſſoit pas l'heure dans la derniere exactitude.

Cependant cette Obſervation ne laiſſera pas d'être d'une aſſez grande utilité, puiſque nous n'en avons point qui ait été faite dans ces quartiers dont nous en puiſſions conclure la longitude.

Comme le commencement de cette Eclipſe n'a pû être obſervé à Paris, nous ne pouvons rien dire de l'Obſervation de 1 doit $\frac{1}{2}$; mais pour la fin nous l'avons très-bien obſervée le 28 Avril au matin à $3^h\ 4'\ 30''$, & au Port de Pei on l'a vûë le 27 au ſoir à $9^h 40'$: donc la difference de lon-

gitude entre l'Obſervatoire Royal & le Port de Pei ſera de 5h 24′ 30″, ou bien 81° 7′ ½, dont ce lieu de l'Iſle de S. Domingue eſt plus occidental que Paris.

La quantité de cette Eclipſe dans le tems de la plus grande obſcuration a été obſervée ici de 5 doits 40′, & au Port de Pei de 5 doits 30′, ce qui n'eſt que fort peu éloigné pour une Obſervation qui n'a pas été faite avec tous les inſtrumens neceſſaires pour une grande juſteſſe, & elle peut nous perſuader de la bonté des précedentes.

Enfin je remarquerai que la plûpart des Cartes que nous eſtimons les plus correctes, poſent ce lieu de S. Domingue moins éloigné de Paris qu'il ne paroît par cette Obſervation, d'environ *6* degrés.

OBSERVATION

De la conjonction de Jupiter avec le cœur du Lion arrivée au mois d'Octobre. 1706.

PAR M. DE LA HIRE.

1706. 18. Dec. JE ne trouve dans les anciens Memoires d'Aſtronomie que nous avons entre les mains, que deux Obſervations de cette conjonction. La premiere fut faite à Athenes l'an 108 de Notre Seigneur le 28 Septembre au matin, comme le rapporte M. Boüillaud au Liv. 7. Chap. 7. de ſon Aſtronomie Philolaïque, ce qu'il avoit tiré d'un Manuſcrit de la Bibliotheque du Roy.

Cette Obſervation porte que Jupiter étoit ſeulement éloigné du cœur du Lion vers le Septentrion de 3 doits, & M. Boüillaud eſtimant un doit de 2′ 30″, cet éloignement ſera de 7′ 30″. Mais il ajoûte que le cœur du Lion étoit alors à 8° 40′ 54″ ♌, & le Pere Riccioli qui rapporte cette même Obſervation, dit que ſuivant ſes propres Obſervations des Etoiles fixes, le cœur du Lion devoit être à 8° 51′ 57″ ♌. La difference qu'il y a entre ces deux poſi-

tions de cette Etoile, eſt ſeulement de 2′ 3″ dont le Pere Riccioli la fait plus avancée. M. Boüillaud s'étoit ſervi du Catalogue des Etoiles de Tycho ; mais le Pere Riccioli avoit beaucoup d'obſervations ſur les Etoiles avec le P. Grimaldi.

Mais par mes Tables je trouve le lieu du cœur du Lion au tems de l'Obſervation d'Athenes à 8° 53′ 54″ ♌, ce qui eſt 4′ plus avancé que M. Boüillaud. La longitude de ♃ étoit donc alors la même que celle de l'Etoile *Regulus* ou le cœur du Lion à 8° 53′ 54″ ♌.

La latitude du cœur du Lion, comme je l'ai déterminée, eſt de 27′ 6″ *B* ; & la poſant invariable, ſi on l'ajoûte aux 7′ 30″ de la diſtance *B* de cette étoile à ♃, on aura ſa latitude de 34′ 36″ *B* dans le tems de l'Obſervation. Mais M. Boüillaud trouve à propos d'ajoûter encore un doit à l'Obſervation de la diſtance de ♃ à *Regulus*, & par conſequent cette latitude ſeroit de 37′ 6″ Bor.

La ſeconde Obſervation d'une ſemblable conjonction que M. Boüillaud rapporte auſſi dans le 3. Chap. du Liv. 7. de ſon Aſtronomie, eſt de lui-même, en 1623 le 12 Octobre à 17ʰ à Loudun. Il dit qu'il obſerva que ♃ étoit plus avancé en longitude de 3′ que le cœur du Lion, & qu'il en étoit éloigné de 8′ vers le Septentrion. Il conclud delà la longitude de ♃ au 24° 40′ 6″ ♌ avec ſa latitude Boreale de 35′. Par les Tables des fixes du Pere Riccioli la longitude de ♃ ſera au 24° 36′ 35″ du ♌. M. Boüillaud qui n'avoit que 19 ans alors ne rapporte point de quelle maniere il fit cette obſervation, ni avec quels inſtrumens, quoique le Pere Riccioli lui faſſe dire que c'étoit avec la Lunette.

Par ma poſition de *Regulus* je trouve que ♃ étoit alors au 24° 40′ 1″ ♌ comme fait M. Boüillaud. Pour la latitude de ♃ elle auroit été de 35′ 6″ ſuivant ma latitude de *Regulus*, & à très-peu près comme M. Boüillaud.

Voici l'obſervation d'une ſemblable conjonction de cette Planete que j'ai faite le 17 Octobre 1706 à 4ʰ 12′ 40″ du matin. Je meſurai avec le micrometre la diſtance

entre le cœur du Lion & ♃ de 19′ 25″, étoit vers le Septentrion à l'égard de cette étoile, & de plus il étoit dans la ligne droite qui passe par l'étoile marquée *A* dans Bayer & par le cœur du Lion ; cependant ♃ me sembloit un peu plus vers l'Occident.

Je trouve par mes Tables que le lieu du cœur du Lion étoit alors au 25° 47′ 15″ ♌. Mais par la position que je viens de marquer, ♃ étoit moins avancé que *Regulus* ou le cœur du Lion selon l'ordre des Signes de 7′ 35″ ; donc la longitude de ♃ étoit alors à 25° 39′ 40″ du ♌.

Mais aussi la distance de ♃ à *Regulus* de 19′ 25″ étant oblique à l'Ecliptique, elle se réduit à 17′ 55″ par sa position entre les étoiles fixes ; & comme la latitude de *Regulus* est de 27′ 6″ par mes Tables, on aura la latitude Bor. de ♃ de 45′ 1″.

J'ai calculé par mes Tables le lieu de ♃ tant en longitude qu'en latitude au tems de mon observation, & j'ay trouvé la longitude à 25° 40′ 11″ : donc la difference n'est que de 31″ de degré. Pour la latitude tirée du calcul elle est de 46′ 21″ Bor. & l'observée 45′ 1″ *B* ; & par consequent la difference seroit de 1′ 20″.

Les differences que je viens de trouver entre mon observation & mon calcul ne sont pas considerables ; mais comme dans la construction de mes Tables Astronomiques je me suis presque toûjours servi des observations des passages par le meridien, que j'estime bien plus sûres, bien plus justes & plus déterminantes que toute autre, surtout à cause de tous les avantages que nous avons tant de la part des instrumens & des horloges, que des connoissances necessaires pour déterminer leur veritable position en longitude & en latitude ; j'ai voulu voir si ces sortes d'observations que j'avois faites aux environs de cette conjonction répondoient à celles dont je m'étois servi, & premierement pour la position du nœud de ♃ & pour son mouvement : car c'est dans ce point où je suis beaucoup éloigné de M. Boüillaud, comme je le dirai dans la suite.

Le premier passage de ♃ par le meridien que j'ai pû observer avant qu'il fût arrivé à son nœud ascendant a été en 1705 le 6e Mars au soir à 5h 56′ 51″, & sa vraïe hauteur meridienne étoit de 63° 50′ 25″.

Je conclus de cette observation que la longitude de ♃ étoit alors au 17° 25′ 10″ de ♊, & sa latitude australe de 12′ 55″. Mais par le calcul de mes Tables je trouve pour ce même tems la longitude au 17° | 23′ 45″ de ♊, & la latitude australe de 12′ 19″. La difference de longitude entre le calcul & l'observation est de 1′ 25″, & celle de la latitude de 36″.

Mais le premier passage de ♃ par le meridien que je pus observer ensuite après qu'il eût passé par ce même nœud, fut en 1705 le 27 Aoust au matin à 9h 7′ 3″: sa vraïe hauteur meridienne étoit de 63° 9′ 48″. Il faut toûjours entendre dans ces observations que c'est du çentre de cette Planete dont je parle.

Je conclus de cette observation que la longitude de ♃ étoit alors à 20° 44′ 9″ du ♋, & que sa latitude Boreale étoit de 6′ 3″. Mais par le calcul de mes Tables sa longitude étoit de 20° 41′ 34″, & la latitude 6′ 47″ Bor. La difference de longitude entre le calcul & l'observation est donc de 2′ 35″, & celle de la latitude de 44″.

Quoique la difference de latitude entre le calcul & ces deux observations ne soit que d'une demi-minute ou environ, ce qui n'est pas considerable dans ces sortes de positions, je pourrois pourtant le faire convenir en avançant le nœud un peu plus que je n'ai fait ; mais mes anciennes observations ni d'autres plus recentes ne s'y seroient pas accordées. Et c'est cela principalement qui m'a fait conjecturer qu'il y avoit dans le mouvement du nœud des Planetes une irrégularité à peu près semblable à celle que nous connoissons dans celui de la Lune, & comme elle m'a paru sensiblement dans Saturne, laquelle demanderoit une prostapherese particuliere. Mais comme je n'ay pas trouvé que dans ♃ cette irregularité fût assez sensible pour y avoir égard, je me suis contenté de prendre une

poſition moïenne entre toutes celles qui m'étoient marquées par mes obſervations. Cette poſition ou Epoque a été pour l'année 1700 moins avancée que celle de M. Boüillaud de plus de 2 degrés. Si j'avois poſé le nœud de ♃ comme M. Boüillaud le met, j'aurois trouvé dans les deux obſervations précedentes une difference de pluſieurs minutes entre l'obſervation & le calcul.

Enfin pour revenir à la conjonction de ♃ avec *Regulus*, j'ai crû qu'il ne ſuffiſoit pas d'avoir montré que mes Tables s'accordoient aſſez bien avec mon obſervation dans ce point ; mais qu'il falloit encore en donner des preuves par quelque paſſage de cette Planete par le meridien, avec ſes vraïes hauteurs meridiennes obſervées dans le même tems. Voici donc celles que j'ai faites lorſqu'il m'a été poſſible de l'obſerver; car je ne puis pas voir ♃ au meridien, à moins qu'il ne ſoit éloigné du Soleil d'environ 30 degrés.

Le 20 Septembre de cette année 1706 avant la conjonction de ♃ avec *Regulus*, ſon centre paſſa au meridien à $9^h\ 45'\ 25''$ du matin, & ſa vraïe hauteur meridienne étoit de $56^\circ\ 23'\ 31''$. Je tire de cette obſervation la longitude de ♃ au $20^\circ\ 49'\ 47''$ du ♌, & ſa latitude Boreale de $40'\ 51''$. Le calcul de mes Tables me donne pour ce même tems la longitude de cette Planete au $20^\circ\ 52'\ 0''$, & la latitude Bor. de $41'\ 58''$. La difference de longitude entre l'obſervée & le calcul eſt de $2'\ 13''$, & celle de la latitude eſt de $1'\ 7''$.

Le 14 Octobre ſuivant, & trois jours avant la conjonction de ♃ à *Regulus*, j'obſervai le paſſage du centre de ♃ par le meridien à $8^h\ 35'\ 16''$ du matin, & ſa vraïe hauteur meridienne étoit de $55^\circ\ 1'\ 8''$. Je conclus de cette obſervation que la longitude de ♃ étoit alors au $25^\circ\ 13'\ 26''$ du ♌, & que ſa latitude étoit Boreale de $45'\ 33''$. Le calcul de mes Tables donne ſa longitude pour ce tems-là au $25^\circ\ 12'\ 11''$ du ♌, & ſa latitude Boreale de $45'\ 51''$: donc la difference de longitude entre l'obſervée & le calcul eſt de $1'\ 15''$, & celle de latitude de $18''$.

Le 18 du même mois & le jour ſuivant la conjonction de ♃ à *Regulus*, j'obſervay le paſſage du centre de ♃ par le meridien à 8ʰ 22′ 51″ du matin, & ſa vraïe hauteur meridienne de 54° 48′ 22″, d'où je tire par les regles ordinaires le vrai lieu de ♃ au 25° 51′ 9″ du ♌ avec une latitude Boreale de 45′ 47″. Mais par le calcul de mes Tables je trouve pour ce même tems le vrai lieu de ♃ au 25° 51′ 12″ du ♌ avec une latitude Boreale de 45′ 35″: donc la difference de longitude entre l'obſervation & les Tables 3″, & celle de la latitude de 12″.

Enfin le 27 ſuivant j'obſervay encore le paſſage du centre de ♃ par le meridien à 7ʰ 53′ 57″ du matin, & ſa vraïe hauteur meridienne de 54° 23′ 7″. Je conclus de cette obſervation que ♃ étoit alors au 27° 12′ 21″ du ♌, & que ſa latitude étoit Boreale de 48′ 13″, & le calcul par mes Tables donne la longitude pour ce même tems de 27° 11′ 34″ du ♌, & la latitude Boreale de 48′ 22″. La difference de longitude entre l'obſervation & le calcul ſera donc de 47″, & celle de latitude de 9″.

Les obſervations que je viens de rapporter en dernier lieu, leſquelles ſont comparées avec le calcul, font voir la juſteſſe de mes Tables, & l'on ne doit pas s'étonner ſi dans celles qui ſont proches les unes des autres on y trouve des differences qui paſſent une minute de degré tantôt excedente & tantôt défaillante, ce qu'on doit plutôt attribuer à quelque cauſe particuliere de l'obſervation ou des inſtrumens qu'aux Tables, ſur tout pour les Planetes ſuperieures qui vont lentement: car il s'y doit trouver une eſpece de progreſſion aſſez uniforme pour un peu de tems, & à peu prés telle que la donne le calcul.

Je pourrois rapporter icy pluſieurs cauſes qui empêchent que les obſervations ne répondent à l'exactitude & aux ſoins qu'on y apporte; mais il me ſuffira de dire à preſent que pour remedier à cet inconvenient, on doit faire un grand nombre de ſemblables obſervations entre leſquelles on prend un milieu.

Dans ce que j'ai dit cy-devant je n'ai point comparé

mon calcul avec l'obſervation de 508, ni avec celle de 1623, ſur leſquelles M. Boüillaud fonde une partie de ſon ſyſtême de Jupiter; car il m'a ſemblé qu'elles ne ſçauroient s'accorder exactement entr'elles, ni avec celles que nous faiſons preſentement. Ces ſortes d'obſervations ſont ſujettes à des erreurs très-conſiderables, n'étant faites pour la plûpart qu'à la vûë ſimple & ſans aucune détermination poſitive. On ne laiſſe pas pourtant de s'en ſervir autant qu'on le peut: quand elles ſont fort éloignées de ces tems-cy, parcequ'elles ſont utiles pour déterminer à peu près les mouvemens des corps celeſtes; mais on ne doit pas s'y aſſujettir par trop, quand elles repugnent aux dernieres qu'on connoît pour très-exactes.

Par exemple, mes Tables me donnent dans le tems de l'obſervation d'Athenes le lieu de ♃ plus avancé que l'obſervation ne demanderoit de près de 8′, & la latitude ſeulement plus petite de trois quarts de minute. Mais pour celles de M. Boüillaud de 1623, elles me donnent la longitude un peu plus de 10′ plus avancée que l'obſervation, & la latitude plus grande de plus de 10′, & dans tous ces tems-cy elles s'accordent avec le Ciel.

C'eſt cette latitude plus grande de 10′ qui me rend ſuſpecte l'obſervation de M. Boüillaud; car mes Tables donnent la latitude dans la même minute que l'obſervée en 508, & depuis ce tems-là juſqu'à l'obſervation de M. Boüillaud en 1624 il y a plus de 1100 ans, pendant leſquels le nœud de ♃ n'a fait que 2 ou 3 degrès, & en 508 au tems de l'obſervation l'argument de latitude n'étoit que de 27° environ; donc en 1623 l'orbite ♃ n'avoit pas changé conſiderablement de ſa premiere place, & dans le tems de cette obſervation ♃ & la terre ſe trouvoient encore à peu près dans le même aſpect: mais comme le cœur du ♌ s'eſt avancé en 1100 ans de plus de 15 degrès, il faut neceſſairement que l'argument de latitude ſoit augmenté de plus de 13 degrès, ce qui doit donner en 1623 une inclinaiſon à ♃ beaucoup plus grande qu'elle n'étoit en 508; & par conſequent la latitude de ♃ devoit être beaucoub plus

plus grande en 1623 qu'en 508 ; cependant l'obſervation de 508 donne la latitude de ♃ de 34′ 36″ ou 37′ 6″ comme veut M. Boüillaud, & ſon obſervation de 1623 ne la montre que de 35′ 6″, ce qui ne peut pas être ; auſſi je l'ay trouvée par mes Tables de 10′ plus grande que celle qu'on tire de cette obſervation.

Enfin M. Boüillaud finit ſon ſeptiéme Livre où il traite des mouvemens de ♃ par une eſpece d'inſulte qu'il fait à Kepler, en donnant le calcul de ♃ pour le tems de l'obſervation de l'an 508 par les Tables Rudolphines pour faire voir que ces Tables ſont fort défectueuſes pour cette Planete ; car il dit qu'elles marquent la diſtance de ♃ à Regulus de plus d'un degré à cauſe de la latitude, & la longitude par ce même calcul étoit plus grande que l'obſervée de près de 48′. Mais je remarque que le peu de difference de latitude entre Regulus & ♃, n'a pas pû augmenter la diſtance de 48′ à plus d'un degré. Il conclud enfin que Kepler n'a pas pû mieux faire ayant été privé de ce ſecours, c'eſt-à-dire des deux obſervations dont il parle.

Cependant comme je ſuis perſuadé de l'exactitude de Kepler, & que s'il n'a pas eu les deux obſervations de M. Boüillaud, il en a eu d'autres & plus anciennes & dans le même tems à peu près que celle de 1623, j'entens celles de Tycho que j'eſtime des plus juſtes, & dont M. Boüillaud a eu auſſi quelque connoiſſance ; & quoique je ſçuſſe bien que mes Tables étoient aſſez éloignées des Rudolphines en quelques endroits, j'ay voulu verifier le calcul que M. Boüillaud rapporte tout au long de la poſition de ♃ dans le tems de l'obſervation de 508 ſuivant les Rudolphines.

J'ay trouvé tout d'abord que le calcul de M. Boüillaud eſt faux, car il trouve le Soleil moins avancé d'un degré qu'il ne devroit être par ces Tables, ce qui eſt une erreur aſſez conſiderable, & ce qui vient aſſurément de ce que M. Boüillaud en calculant n'a pas fait attention que l'année 508 étoit Biſſextile, & il l'a calculée comme une année comme, car il lui manque le mouvement du Soleil

pour un jour. Il a fait auſſi la même faute pour le calcul de ♃ qu'il rapporte enſuite. Ces deux fautes enſemble lui auroient encore avancé le lieu de ♃ de 3′ environ. Pour la latitude elle eſt trés-peu éloignée de celle qu'on tire de l'obſervation.

Pour ce qui eſt de l'obſervation de M. Boüillaud de 1623, les Tables Rudolphines s'y accordent aſſez bien en ce qui regarde la longitude, mais pour la latitude elles s'en écartent à peu prés autant que je l'ay trouvé par les miennes; d'où je conclus enfin que M. Boüillaud n'avoit pas bien eſtimé ou meſuré la diſtance entre Regulus & ♃, & que la grande lumiere de ♃ lui faiſoit paroître cette diſtance beaucoup plus petite qu'elle n'étoit en effet; & c'eſt une raiſon qu'il rapporte lui-même dans l'examen qu'il fait de quelques obſervations.

DIFFERENTES MANIERES INFINIMENT GENERALES

De trouver les Rayons oſculateurs de toutes ſortes de Courbes, ſoit qu'on regarde ces Courbes ſous la forme de Polygones, ou non.

PAR M. VARIGNON.

1706. 18. Decem. LA maniére dont j'ay cherché le raport des Forces centrales aux Peſanteurs des corps dans le Memoire que je donnay ſur cela à l'Academie le 24 Avril dernier *, m'aïant engagé (excepté dans la troiſiéme Solution du Problême par où ce Memoire commence) à conſiderer les Courbes, non à l'ordinaire ſous la forme de Polygones infiniti-lateres réctilignes, mais comme faites d'élemens veritablement courbes eux-mêmes; je fus obligé d'en chercher les rayons oſculateurs dans cette hypothêſe, dans laquelle je ne ſçais perſonne qui l'ait encore fait. C'eſt ce

* Voyez cy-deſſus la page 178.

qui m'a fait penser à les y rechercher en general ; & cette consideration des Courbes comme faites d'élémens véritablement courbes eux-mêmes, m'a donné des expressions de ces rayons osculateurs, lesquelles se sont trouvées précisement les mêmes que celles que la consideration de ces mêmes Courbes sous la forme de Polygones infiniti-lateres réctilignes m'avoit déja données dans les Memoires de 1701. pag. 25. &c.

Voici comment ces expressions me sont venuës dans la premiere de ces considerations ou hypothêses ; & puis nous verrons encore quelques autres manieres de les trouver dans la seconde par des voïes toutes differentes de celle que j'ay suivie dans ces Memoires de 1701.

PROBLÊME I.

Une Courbe quelconque, dont les ordonnées concourent en quelque point que ce soit, étant donnée ; trouver une expression generale de ses rayons osculateurs sans y rien supposer de constant, & en regardant cette Courbe, non à l'ordinaire sous la forme de Polygone infiniti-latere réctiligne ; mais comme faite d'élemens courbes eux-mêmes.

SOLUTION.

I. Soit *DBY* la Courbe quelconque donnée ; dont les ordonnées *BE*, *CE*, &c. concourent en *E* ; & dont *AB*, *BC*, soient deux élemens, c'est-à-dire, deux arcs infiniment petits du premier genre, lesquels ne different entr'eux que d'une grandeur infiniment petite du second genre, & par conséquent nulle par raport à eux. Soïent aussi *AB*, *BC*, les cordes de ces deux petits arcs, dont la premiere prolongée vers *R*, rencontre en *S* l'ordonnée *EC* prolongée de ce côté-là. Soient de plus l'angle *SBP* $=$ *SEB* ; l'arc *CI* décrit du centre *B* par *C*, & qui rencontre la droite *BP* en *I* ; la droite *CM* perpendiculaire en *N* sur *BP*, laquelle *BP* soit aussi rencontrée en *L* par *KL* parallele à *ES*. Soient ensuite *BV*, *CV*, deux rayons osculateurs de la Courbe en question, laquelle Courbe Fig. I.

DBY soit touchée au point *B* par la droite *ZQ* exactement perpendiculaire au premier *BV* de ces rayons, & qui rencontre le second *VC* prolongé en *F*, l'ordonnée *EC* prolongée en *Q*, & la droite *CM* en *X*. Enfin après avoir fait la droite *CO* perpendiculaire en *O* sur la tangente *ZQ*, soient aussi les droites *AG*, *EH*, *CT*, perpendiculaires en *G*, *H*, *T*, sur *BE*, *CE*, *LK*, laquelle *LK* rencontre en *K* la seconde *BH* de ces perpendiculaires.

Cela fait, soit y le nom des ordonnées *BE*, *CE*; dx, celui de leurs perpendiculaires *AG*, *BH*; ds, celui des arcs élementaires *AB*, *BC*; & r, celui des rayons osculateurs *BV*, *CV*.

II. Tout cela supposé, les angles rectilignes *ABE*, *BPE*, étant externes par rapport aux triangles *EBS*, *BPS*, l'on aura l'angle réctiligne $ABE = BES + BSE$ (*art.* 1.) $= PBS + BSE = BPE$. Donc les angles en *G* & en *H*, étant (*art.* 1.) droits, les triangles réctilignes *ABG* & *BPH* seront semblables entr'eux ; & par consequent (*art.* 1.) les triangles réctilignes *ABG*, *BLK*, le seront aussi : De sorte que si l'on suppose de plus $BK = AG$, ces deux derniers triangles seront non-seulement semblables, mais aussi égaux en tout. Donc la corde *AB* ou son arc infiniment petit $AB\,(ds) = BL = BI\,(ds) + IL$; & par consequent $IL = -dds$ négative, les ds (AB) allant ici en diminuant pendant que les dx (AG) vont en augmentant : Ce qui donnera au contraire $HK = ddx$ positive. D'où l'on aura aussi $BH\,(dx).\,BP\,(ds)::HK\,(ddx).\,LP = \frac{dsddx}{dx}$. Donc $IP\,(IL + IP) = -dds + \frac{dsddx}{dx}$, ou $NP = \frac{dsddx - dxdds}{dx}$.

Mais la ressemblance (*art.* 1.) des triangles réctilignes *PNC*, *PHB*, donne *PH* ou $CH\,(dy).\,BH\,(dx)::NP\,\left(\frac{dsddx - dxdds}{dx}\right).\,NC = \frac{dsddx - dxdds}{dy}$. De même la ressemblance (*art.* 1.) des triangles réctilignes *BEH*, *MBN*, donne aussi $BE\,(y).\,BH\,(dx)::BM\,(ds).\,MN = \frac{dxds}{y}$. Donc la droite $MC\,(MN + NC) =$

$= \frac{dxds}{y} + \frac{dsddx - dxdds}{dy} = \frac{dydxds + ydsddx - ydxdds}{yay}$.

III. Concevons présentement que l'*osculum* ou l'attouchement de la Courbe proposée *DBT* avec son cercle osculateur décrit du centre *V* par *B*, se fasse (en tout ou en partie) sur l'arc infiniment petit *ABC*. En ce cas cet arc *ABC* de la Courbe proposée *DBT*, sera aussi un arc de cercle décrit du centre *V* & du rayon *VB* ou *VC*. Donc suivant la doctrine d'Euclide Prop. 32. du Liv. 3. & Prop. 33. du Liv. 6. les angles réctilignes *ABZ*, *CBQ*, compris entre sa touchante *ZQ*, & les cordes des arcs partiaux *AB*, *BC*, seront entr'eux comme ces arcs. Par conséquent ces arcs, qui (*art.* 1.) ne différent entr'eux que d'une difference infiniment petite par rapport à eux, devant passer pour égaux, les angles rectilignes *ABC*, *CBQ*, doivent passer de même pour égaux entr'eux. Mais l'angle réctiligne *ABZ* est aussi égal à l'angle *SBQ* qui lui est opposé au sommet *B*. Donc les deux angles réctilignes *CBQ*, *SBQ*, sont pareillement égaux entr'eux. Par conséquent encore suivant la doctrine d'Euclide Prop. 3. du Liv. 6. *BQ* doit diviser la droite *CM* en en *X* de maniere qu'elle donne *CX*. *XM* : : *BC*. *BM*. en prenant ici *BC* pour la corde de l'arc. *BC*. Mais l'angle indéfiniment petit *CBM*, compris entre cette corde & l'autre *AB* prolongée vers *R*, rend cette premiere corde *BC* égale à *BM*. Donc aussi $CX = XM$, ou $CX = \frac{1}{2} CM$. Mais on vient de trouver (*art.* 2.) $CM = \frac{dxdyds + ydsddx - ydxdds}{ydy}$. Donc on aura pareillement $CX = \frac{dxdyds + ydsddx - ydxds}{2ydy}$.

Or si l'on considére que les angles (*art.* 1.) droits *BNG*, *BOC*, *QBV*, rendant les triangles *BNX*, *COX*, & *FOC*, *FBV*, semblables entr'eux deux à deux, il en doit résulter *CX*. *CO* : : *BX*. *BN*. Et *CO*. *CF* : : *VB*. *VF*. On verra que les angles (*art.* 1.) infiniment petits *NBX*, & *BVF*, rendant aussi $BX = BN$, & $VB = VF$, il en doit résulter $CX = CF$. Donc $CF = \frac{dxdyds + ydsddx - ydxdds}{2ydy}$.

Mais en confiderant, ainfi que l'on fait ici, l'arc (d'*ofculum*) BC comme un veritable arc de cercle dont V eft le centre, & BF la tangente en B, perpendiculaire au rayon BV; la doctrine d'Euclide (*Prop.* 36. *Liv.* 3.) donne $\overline{BF}^2 = CF \times \overline{FV + CV}$: De forte que la fuppofition de l'angle BVF (*art.* 1.) infiniment petit, donnant auffi $FV = CV = BV$, & l'arc $BC = BF$, ce cas doit donner de même $\overline{BC}^2 = \overline{BF}^2 = CF \times \overline{FV + CV} = CF \times 2CV = 2CF \times BV$, & conféquemment auffi $BV = \frac{BC \times BC}{2CF}$.

Donc en fubftituant ici la valeur précedente de CF, avec les noms de ds & de r, donnez à l'arc BC & au rayon BV dans l'art. 1. Cette confideration des élemens AB, BC, de la Courbe propofée DBY, comme de veritables arcs de fon cercle ofculateur ABC, donne enfin $r = \frac{y\,dy\,ds^2}{dx\,dy\,ds + y\,ds\,ddx - y\,dx\,dds}$ pour l'explication génerale du rayon de ce cercle, ou de la Dévelopée de cette Courbe, fans y rien fuppofer de conftant : & cette expreffion eft précifément la même que la premiere des infiniment génerales que j'ai tirée dans les Memoires de 1701. pag. 26. de la confideration de cette même Courbe DBY fous la forme de Polygone infiniti-latere, dont les côtez infiniment petits AB, BC, étoient regardés comme de petites lignes droites. *Ce qu'il falloit trouver.*

AUTRE SOLUTION.

FIG. II.

IV. Au lieu de BP, LK, CM, CI, CO, CT, foient ET, Et, perpendiculaires fur EB, EC, & qui rencontrent en T, O, t, les cordes BA, CB, prolongées de ce côté-là. Du point O foit OM perpendiculaire en M fur Bt. Soit de plus du centre E par T l'arc TK qui rencontre en K la foûfecante Et, fur laquelle tombe auffi TL perpendiculaire en L.

V. Tout le refte demeurant le même que dans l'art. 1. la conftruction qui rend (*art.* 4.) les triangles rectilignes rectangles BGA, BET, & BHE, TLE, femblables en-

tr'eux, donnera $BG(dy)$. $AG(dx)$: : $BE(y)$. $TE = \frac{ydx}{dy}$: : $BH(dx)$. $TL = \frac{dx^2}{dy}$. La même construction rendant aussi (*art.* 4.) les triangles rectilignes rectangles *SEO*, *TLO*, semblables entr'eux, donnera pareillement *SE* ou $CE(y)$. *EO* ou $ET\left(\frac{ydx}{dy}\right)$: : $TL\left(\frac{dx^2}{dy}\right)$. *LO* ou $KO = \frac{dx^3}{dy^2}$. Or si l'on prend la difference de la soûsecante $ET\left(\frac{ydx}{dy}\right)$ sans y rien supposer de constant, il vient $Et - ET$ ou $Kt = \frac{dxdy^2 + ydyddx - ydxddy}{dy^2}$. Donc $Ot = \frac{dx^3 + dxdy^2 + ydyddx - ydxddy}{dy^2}$ (à cause de $dx^2 + dy^2 = ds^2$) $= \frac{dxds^2 + ydyddx - ydxddy}{dy^2}$. De sorte que la construction rendant (*art.* 4.) les triangles rectilignes rectangles *CHB*, *CEt*, *OMt*, semblables entr'eux, l'on aura aussi $CB(ds)$. $CH(dy)$: : $Ot\left(\frac{dxds^2 + ydyddx - ydxddy}{dy^2}\right)$. $OM = \frac{dxds^2 + ydyddx - ydxddy}{dyds}$. Ajoûtez à cela que les triangles rectilignes semblables *BGA*, *BET*, donnent pareillement $BG(dy)$. $BA(ds)$: : $BE(y)$. *BT* ou $BO = \frac{yds}{dy}$. Donc l'angle *OBM* étant égal à la moitié de l'arc (d'*osculum*) *ABC*, ou (*art.* 1.) à l'arc entier *BC*, lequel est aussi égal à l'angle *BVC*; les triangles rectilignes *OMB*, *FBV*, (*hyp.*) rectangles en *M*, *B*, donneront enfin $OM\left(\frac{dxds^2 + ydyddx - ydxddy}{dyds}\right)$. *MB* ou $BO\left(\frac{yds}{dy}\right)$: : *BF* ou $BC(ds)$. $BV(r) = \frac{yds^3}{dxds^2 + ydyddx - ydxddy}$. Et cette expression des rayons osculateurs, resultante de la consideration de la courbure des élémens de la Courbe proposée sans y rien supposer de constant, est encore la même que la troisiéme des infiniment generales des Memoires de 1701. pag. 27. tirées de la consideration de ces mêmes élemens regardez comme autant de petites lignes droites ou de côtez infiniment petits du Polygone infiniti-latere rectiligne sous la forme duquel cette Courbe étoit regardée. *Ce qu'il falloit encore trouver.*

TROISIE'ME SOLUTION.

FIG. III. VI. Soit encore DBY une Courbe quelconque dont les ordonnées BE, CE, &c. concourent en E; & dont les arcs AB, BC, ſoient encore deux élemens ou infiniment petits du premier genre. Soient de plus BT, Ct, deux tangentes de ces arcs en leur extrémitez B, C, dont la premiere prolongée en S. Après avoir fait les droits ET, Et, perpendiculaires aux ordonnées BE, CE, & qui rencontrent les tangentes BT, Ct, en T, O, t; ſoient les droites TL, OM, perpendiculaires en L, M, à Et, Ct; ſoient auſſi des centres E, N, les arcs circulaires TK, OP. Soient enfin les droites AG, BH, perpendiculaires ſur BE, CE, & qui prolongées rencontrent en F, Q, les tangentes BT, Ct.

Cela fait, ſoit encore y le nom des ordonnées BE, CE; dx, celui de leurs perpendiculaires AG, BH; ds, celui des arcs élémentaires AB, BC; & r, celui des rayons oſculateurs BV, CV.

VII. Tout cela ſuppoſé, & procedant à peu près comme dans la Solution 2. les triangles rectilignes (*conſtr.*) ſemblables BGF, BET, & BHE, TLE, donneront BG (dy). FG ou AG (dx) : : BE (y). $TE = \frac{ydx}{dy}$: : BH (dx). $TL = \frac{dx^2}{dy}$. Pareillement les triangles rectilignes (*conſtr.*) ſemblables SEO, TLO, donneront auſſi SE, ou CE (y). EO ou ET $\left(\frac{ydx}{dy}\right)$: : TL $\left(\frac{dx^2}{dy}\right)$. LO ou $KO = \frac{dx^3}{dy^2}$. Or en prenant la difference de la ſoûtangente ET $\left(\frac{ydx^2}{dy}\right)$ ſans y rien ſuppoſer de conſtant, on la trouve être $ET - ET$ ou $Kt = \frac{dxdy^2 + ydyddx - ydxddy}{dy^2}$. Donc $Ot = \frac{dx^3 + dxdy^2 + ydyddx - ydxddy}{dy^2}$ (à cauſe de $dx^2 + dy^2 = ds^2$) $= \frac{dxds^2 + ydyddx - ydxddy}{dy^2}$. Donc auſſi les triangles rectilignes (*conſtr.*) ſemblables CHQ, OMt, donneront CQ ou CB (ds). CH (dy) : : Ot $(dx$

$\left(\frac{d\ \text{[illegible]}\ ds\ \text{[illegible]} - y}{dy^2}\right)$. OM ou $OP = \frac{dxds^2 + ydyddx - ydxddy}{dyds}$. De plus les triangles rectilignes (*constr*,) semblables BGF, BET, donnent pareillement BG (dy). BF ou BA (ds) : : BE (y). BT ou $NO = \frac{yds}{dy}$. De plus encore le quadrilatere rectiligne $VBNC$ ayant les angles droits en B, C, l'angle BNC avec l'angle V en doit valoir deux droits de même qu'avec l'angle ONP : Ainsi ce dernier angle ONP doit être égal à l'angle V, & le secteur NOP être semblable au secteur VBC. Donc enfin OP $\left(\frac{dxds^2 + dyddx - ydxddx}{dyds}\right)$. ON $\left(\frac{yds}{dy}\right)$: : BC (ds). BV (r) $= \frac{yds^3}{dxds^2 + ydyddx - ydxddy}$. Ce qui est la même expression des rayons osculateurs que celle qui vient d'être trouvée dans la précedente Solution 2.

Voilà de quelle maniere ces expressions infiniment générales se peuvent trouver, sans considerer les Courbes sous aucune forme de Polygones rectilignes. Voici presentement plusieurs autres maniéres de les trouver encore en considerant les Courbes sous cette forme de Polygones infiniti-lateres rectilignes, dont quelques-unes m'ont été inspirées par l'Analyse des Infiniment petits.

PROBLÊME II.

Une Courbe quelconque, dont les ordonnées concourent en quelque point que ce soit, étant encore donnée, trouver encore une expression générale de ses rayons osculateurs sans y rien supposer de constant; mais en regardant presentement cette Courbe comme un Polygone infiniti latere rectiligne.

PREMIÉRE SOLUTION.

VIII. Soit DBT la Courbe proposée, dont les ordonnées BE, CE, &c. concourent toutes au point E. Soient de plus BV, CV, deux de ses rayons osculateurs infiniment proches l'un de l'autre, lesquels se rencontrent en V; soient aussi par leurs extremités B, C, les tangentes BT, Ct, faites des petits côtés prolongés BA, CB, de la Fig. IV.

Courbe conſiderée comme polygone réctiligne infinitilatere, leſquels ſe joignent en B. Soient ET, Et, perpendiculaires en E aux ordonnées BE, CE, de cette Courbe, & qui rencontrent en T, t, les tangentes BT, Ct, qui leur répondent, & dont CE rencontre encore TB prolongée en S. Du centre E par les points A: B, T, ſoient les petits arcs des cercles AG, BH, TK, qui rencontrent BE, CE, Et, en G, H, K. Enfin du centre B par le point O, ou BT rencontre Et, ſoit l'arc OP qui rencontre Ct en P.

IX Cela fait, les angles droits VCB, ou VCt, & VBT, rendant les angles en B, V, des triangles iſoſcelles OBP, BVC, égaux entr'eux, ces triangles ſeront ſemblables, de même que le ſont les triangles SEO, TKO; BGA, BET; & les petits ſecteurs EBH, ETK. Donc OP. BO ou Ct : : BC. $BV = \frac{BC \times Ct}{OP}$. Et en appellant les ordonnées BE ou CE, y; BG ou CH, dy; AG ou BH, dx; & AB ou BC, ds; l'on aura pareillement $BG\,(dy)$. $AG\,(dx)$: : $BE\,(y)$. $ET = \frac{ydx}{dy}$: : $BH\,(dx)$. $TK = \frac{dx^2}{dy}$. Et SE ou $GE\,(y)$. EO ou $ET = \left(\frac{ydx}{dy}\right)$: : $TK\left(\frac{dx^2}{y}\right)$. $KO = \frac{dx^3}{dy^2}$. Or ſi l'on prend la difference de ET $\left(\frac{xdx}{dy}\right)$ ſans y rien ſuppoſer de conſtant, il vient $Et - ET$ ou Kt $= \frac{dxdy^2 + ydyddx - ydxddy}{dy^2}$; & partant $OK + Kt$ ou Ot $= \frac{dx^3 + dxdy^2 + ydyddx - ydxddy}{dy^2}$ (à cauſe de $dx^2 + dy^2 = ds^2$) $= \frac{dxds^2 + ydyddx - ydxddy}{dy^2}$

X. De plus les triangles ſemblables CHB, GEt, OPt, donnent $BC\,(ds)$. $CH\,(dy)$: : Ct. $CE\,(y)$: : Ot $\left(\frac{dxd\ldots - y\,d\ldots xddy}{dy^2}\right)$. $OP = \frac{dxds^2 + ydyddx - ydxddy}{dyds}$. D'où réſulte auſſi $Ct = \frac{yds}{dy}$. Donc en ſubſtituant ces valeurs de OP, Ct, avec celle de $BC\,(ds)$, dans la formule BV $= \frac{BC \times Ct}{OP}$ trouvée cy-deſſus art. 9. l'on aura auſſi $BV =$ $\frac{yds^3}{dxdy + dyddx - ydxddy}$ pour l'expreſſion generale cherchée

des rayons osculateurs de toutes sortes de Courbe, laquelle est la même que celle des art. 5. 7. & dans laquelle il n'y a encore rien de constant. *Ce qu'il falloit encore trouver.*

SECONDE SOLUTION.

XI. Au lieu des tangentes, *BT*, *Ct*, de leurs soûtangentes *ET*, *Et*, & des petits arcs *TK*, *OP*, soient du point *V* les perpendiculaires *Vm*, *VM*, sur les ordonnées *BE*, *CE*, dont celle-ci *CE* soit rencontrée en *N* par *VM* perpendiculaire sur l'autre *BE*, de qui la partie *MB* soit appellée v.

Tout le reste demeurant le même que cy-dessus art. 8. & 9. les triangles semblables *BHC*, *BMV*, donneront $BH\,(dx).\ BC\,(ds) :: MB\,(v).\ BV = \frac{vds}{dx}$. Donc *BV* étant constante, sa différence $\frac{dvdxds + vdxdds - vdsddx}{dx^2}$ doit être $= o$. Donc $v = \frac{dvdxds}{dsddx - dxdds}$. Mais les mêmes triangles semblables *BHC*, *BMV*, donnnent aussi $BH\,(dx).\ CH\,(y) :: MB\,(v).\ MV$ ou $mV = \frac{vdy}{dx}$. Et à cause de triangles semblables *BEH*, *NVm*, l'on aura de même $BE\,(y).\ mV\,\left(\frac{vdy}{dx}\right) :: BH\,(dx).\ Nm = \frac{vdy}{y}$. Donc $dy - \frac{vdy}{y} = CH - Nm = dv$, à cause que (*hyp.*) $v = MB = EB = EM$, c'est-à-dire, $dv = \frac{ydy - vdy}{y}$. Donc aussi en substituant cette valeur de dv dans la précedente équation $v = \frac{dvdxds}{dsddx - dxdds}$, l'on aura $yvdsddx - yvdxdds = ydydxds - vdydxds$; ce qui donne $v\,(MB) = \frac{ydxdyds}{ydsddx - ydxdds + dxdyds}$. Mais les triangles semblables *BHC*, *BMV*, donnent encore $BH\,(dx)\ BC\,(ds) :: MB\left(\frac{ydxdyds}{ydsddx - ydxdds + dxdyds}\right)$. $BV = \frac{ydyds^2}{ydsddx - ydxdds + dxdyds}$. Ce qui est encore une autre expression générales des rayons des Dévelopées de toutes sortes de Courbes, dans laquelle il n'y a encore rien de

constant, & qui est aussi la même que celle de l'art. 3. ci-dessus. Ce qu'il falloit encore trouver ; & ce que l'équation $BV = \frac{vds}{dx}$ trouvée ci-dessus, auroit aussi donné en y substituant la derniere valeur de v.

TROISIE'ME SOLUTION.

XII. Toutes demeurant les mêmes que dans l'art. 11. excepté qu'au lieu de $BM = v$, on suppose ici le rayon osculateur $BV = r$ constant. Les triangles semblables BHC, BMV, donneront $BC\ (ds)$. $BH\ (dx)$: : $BV\ (r)$. $BM = \frac{rdx}{ds}$. Et $BC\ (ds)$. $CH\ (dy)$: : $BV\ (r)$. $MV = \frac{rdy}{ds}$. De qui la différence est $MN = \frac{-rdsddy + rdydds}{ds^2}$ négative à cause que $BE(y)$ & $MV\left(\frac{rdy}{ds}\right)$ croissent alternativement, & qu'on fait ici dy positif. Donc $BH - MN\ \left(dx - \frac{rdydds + rdsddy}{ds^2}\right)$. $BH\ (dx)$: : $BM\ \left(\frac{rdx}{ds}\right)$. $BE(y)$. Ce qui donne $ydxds^2 - rydydds + rydsddy = rdsdx^2$; & par conséquent $r\ (BV) = \frac{ydxds^2}{dsdx^2 + ydydds - ydsddy}$. Ce qui est encore une expression génerale du rayon osculateur telle qu'on la demande.

QUATRIE'ME SOLUTION.

XIII. Au lieu des droites VM, Vm, soient du point E les perpendiculaires EF, Ef, sur les rayons osculateurs BV, CV, dont le premier BV soit rencontré en L par Ef perpendiculaire sur le second CV.

Tout le reste demeurant le même que daus l'art. 11. les triangles semblables BHC, BFE, donneront $BC\ (ds)$. $BH\ (dx)$: : $BE\ (y)$. BF ou $BL = \frac{ydx}{ds}$. Et $BC\ (ds)$. $CH\ (dy)$: : $BE\ (y)$. $EL = \frac{ydy}{ds}$. De qui la difference est $Lf = \frac{dsdy^2 + ydsddy - ydydds}{ds^2}$. Donc à cause des triangles semblables

BVC, *LVf*, l'on aura auſſi $BC - Lf \left(\frac{ds^3 - dsdy^2 - ydsddy + ydydds}{ds^2}\right)$. $BC\ (ds) :: BL \left(\frac{ydx}{ds}\right)$. $BV\ (r) = \frac{ydxds^2}{ds^3 - dsdy^2 - ydsddy + ydydds}$ (à cauſe de $dx^2 = ds^2 - dy^2$) $= \frac{ydxds^2}{dsdx^2 - ydsddy + ydydds}$. Ce qui eſt la même expreſſion générale cherchée que celle de l'art. 12.

Cinquie'me Solution.

XIV. Soit encore une Courbe quelconque *DBT*, dont *AB*, *BC*, ſoient deux des côtés infiniment petits en la conſiderant encore comme polygone infiniti latere rectilignes, & dont les ordonnées *BE*, *CE*, &c. concourent toutes au point *E*. De ce centre *E* par les points *A*, *B*, *L*. ſoient les arcs *AG*, *BH*, *LO*, en prenant auſſi *BL* pour infiniment petite du premiere genre. Enſuite après avoir décrit du centre *B* l'arc *AM* qui rencontre *LO* en *R*, & le petit côté *CB* prolongé ou la tangente *BK* en *M*; ſoit l'angle *KBO* égal à l'angle *CBE*, & dont le côté *BO* rencontre cet arc *AM* en *N*, & *LO* en *O*. Soit de plus *AP* parallele à *BE*, & qui rencontre auſſi *LO* en *P*. Fig. v.

Soient enfin appellées *AG* ou *BH*, dx; *AB* ou *BC*, ds; & *BE* ou *CE*, y; ce qui donnera auſſi *BG* ou $CH = dy$ poſitive en prenant l'origine de tout cela du côté de *D*.

Cela poſé, les triangles (*conſtr.*) ſemblables *HEB* & *MBN* donneront $EB\ (y).\ BH\ (dx) :: BM$ ou $BA\ (ds).\ MN = \frac{dxds}{y}$. Pareillement les triangles (*conſtr.*) ſemblables *OLB*, *ONR*, & *APR*, donneront auſſi *OL* ou $AG\ (dx).\ BL$ ou $BG\ (dy) :: ON.\ NR = \frac{ON \times dy}{dx}$. Et *OL* ou $AG\ (dx).\ BO$ ou $BA\ (ds) :: AP.\ AR = \frac{AP \times ds}{dx}$. Donc $AM\ (MN + NR + RA)\ \frac{dxds}{y} + \frac{ON \times dy}{dx} + \frac{AP \times ds}{dx} = \frac{dsdx^2 + ON \times ydy + AP \times yds}{ydx}$.

Or ſi l'on imagine que *AV*, *BV*, ſoient deux rayons de la Dévelopée de la Courbe *DBT*, la reſſemblance des triangles *BVA*, *MBA*, donnera de plus *AM*

$\left(\frac{dsdx^2 + ON \times ydy + AP \times yds}{dx}\right). AB\ (ds) :: AB\ (ds). BV =$

$= \frac{ydxds^2}{dsdx^2 + ydy \times ON + yds \times AP}.$

XV. Quant aux valeurs de ON & de AP, elles se détermineront en supoſant $BL = CH$; car alors (les triangles HCB & LBO ſe trouvant non-ſeulement ſemblables, à cauſe que leurs angles en H & en L ſont ſuppoſés droits & que ceux-ci $EBO + OBR = EBR = ECB + CEB$ (*hyp.*) $= ECB + OBR$, donnent $EBO = ECB$; mais encore égaux en tout à cauſe qu'on ſuppoſe auſſi $BL = CH$) l'on aura $ON = B = BA = CB - BA = dds$, & $AP = BG = BL = BG - CH = -\ ddy$ négative, à cauſe que dy diminuë pendant que tout le reſte augmente. Donc en ſubſtituant ces valeurs de ON & de AP dans la précedente (*art.* 14.) de BV, l'on aura $BV = \frac{ydxdsds^2}{dsdx^2 + ydydds - ydsddy}.$ Ce qui eſt encore une expreſſion générale des rayons oſculateurs, dans laquelle il n'y a encore rien de conſtant, & la même encore que celle des deux Solutions précedentes art. 12. & 13.

REMARQUE.

XVI. Les Memoires de l'Academie de 1701. pag. 25. &c. fourniſſent encore une ſixiéme Solution de ce Probl. 2. toute auſſi générale que les précédentes, ne renfermant (non plus qu'elles) rien de conſtant. Outres les trois Formules des rayons oſculateurs qu'elles & celles du Probl. 1. donnent ces Memoires de 1701. pag. 29. en contiennent encore trois autres tirées de celles-là : les voici encore ici pour n'être pas obligé de recourir à ces Memoires dans l'uſage qu'on en fait dans ceux-ci pag. 201. & 218.

Pour cela ſoit dans les Fig. 4. & 5. l'arc de cercle $DQ = z$ décrit du centre E & du rayon $DE = a$. Cela fait, on aura $EQ\ (a). EB\ (y) :: Qq\ (dz). BH\ (dx)$. Ce qui don-
Fig. IV. V. nant $dx = \frac{xdz}{a}$, & $ddx = \frac{dydz + yddz}{a}$, il n'y aura qu'à ſubſtituer ces valeurs de dx & de ddx en leurs places dans les trois Formules des rayons oſculateurs trouvées dans les

Solutions précedentes des Probl. 1. & 2. pour avoir les trois autres supposées ci-dessus pag. 201. & 218. Les voici toutes six pour n'être pas obligé de recourir aux Mèmoires de 1701. qu'on y suppose, & dans l'ordre des Formules des forces centrales où l'on s'en est servi, soient encore ces rayons appellés *r*.

Formules infiniment génerales des Rayons osculateurs.

1°. $$r = \frac{ydyds^2}{dxddyds + ydsddx - ydxdds}$$

2°. $$r = \frac{ydxds^2}{dsdx^2 + ydydds - ydxddy}.$$

3.° $$r = \frac{yds^3}{dxds^2 + ydyddx - ydxddy}.$$

4°. $$r = \frac{adyds^2}{2dzdyds + ydsddz - ydzdds}.$$

5°. $$r = \frac{aydzds^2}{ydsdz^2 + aadydds - aadsddy}.$$

6°. $$r = \frac{ads^3}{dzds^2 + dzdy^2 + ydyddz - ydzddy}.$$

Voilà ce que donnent les précedentes Solutions analytiques des Probl. 1. & 2. en voici presentement une autre purement geometrique, laquelle supposant à l'ordinaire les élemens des Courbes & de leurs coordonnées successivement constans, se trouve restrainte à ces conditions comme tout ce que j'ay vû jusqu'ici d'autres Solutions de pareils Problêmes, lesquelles n'ont d'universalité qu'autant qu'elles fournissent de formules génerales pour chacune de ces hypothêses, & non aucune qui convienne à toutes à la fois, comme font les formules précédentes, lesquelles on voit pourtant avoir été assez faciles à trouver; mais on ne pense pas à tout.

PROBLÊME III.

FIG. VI. *Soit encore une Courbe quelconque* DBY, *dont* AE. BE, CE, *ſoient trois ordonnées infiniment proches les unes des autres, leſquelles concourent avec toutes les autres au point* E, *duquel point (comme centre) ſoient décrits les arcs circulaires* AG, BH; *ſoient auſſi* BV, CV, *deux des rayons de ſa Dévelopée. De plus après avoir prolongé en* R *le petit côté* AB *de cette Courbe conſiderée ſous la forme de polygone infiniti-latere rectiligne, enſorte que* BR *en ſoit une touchante en* B, *ſoit fait l'angle* RBP *égal à l'angle* BEA; *& du point* B *(comme centre) l'arc* CON *qui rencontre la Courbe en* C, *ſa tangente en* N, *& la droite* BP *en* O, *laquelle eſt auſſi rencontrée en* P *par* EC *prolongée. Soient enfin faites* OQ *&* CM *paralleles à* BH, *avec* OK *&* ML *paralleles auſſi à* PH. *On demande preſentement de trouver par la ſeule geometrie l'expreſſion generale des rayons oſculateurs* BV, CV, *&c. dans chacune des hypothêſes des élémens* BC, BH, CH, *ſucceſſivement conſtans.*

SOLUTION.

XVII. Puiſque AER eſt (*hyp*) une ligne droite, l'on aura l'angle $EBR = EAB + BEA = EAB + RBP$; & par conſéquent l'angle $EB = EAB$. Donc en retranchant de part & d'autre les angles droits EAG, EBH, il reſtera l'angle $GAB = HBP$. Ainſi les angles en G, H, K, L, étant (*hyp.*) droits, auſſi-bien que les angles CQM ou COP, & KOQ; les triangles AGB, BHP, BKO, BLM, COP, CQO, & MOC, ſeront tous ſemblables entr'eux. Cela poſé.

1°. Si l'on ſuppoſe BC conſtante, c'eſt-à-dire, $BC = AB$, les triangles ſemblables BKO, CQO, donneront OK (CH). BO (BC) :: OQ (HK). $CO = \frac{BC \times HK}{CH}$. Et BK (EH). BO (BC) :: CQ. $CO = \frac{BG \times CQ}{BH}$.

2°. Si l'on ſuppoſe BH conſtante, c'eſt-à-dire $BH = BG$, la reſſemblance des triangles BHP, COP, donnera de même

même BP (BC). BH : : CP. $CO = \frac{BH \times CP}{BC}$ Et HP (HC). BH : : OP. $CO = \frac{BH \times OP}{HC}$

3°. Enfin si l'on suppose CH constante, c'est-à-dire, $CH = BG$, la ressemblance des triangles BLM, MOC, donnera aussi de même BM (BC). ML (CH) : : MC (LH) $CO = \frac{CH \times LH}{BC}$. Et BL (BH). ML (CH) : : MO. $CO = \frac{CH \times MO}{BH}$.

XVIII. Donc les triangles (*constr.*) semblables CVB & CBN, AEG & NBO, donnant $BV.BC$: : $BC.CN = \frac{BC \times BC}{BV}$. Et $AE.AG$ (BH) : : BN (BC). $NO = \frac{BC \times BH}{AE}$. Et par conséquent aussi CO ($CN - NO$) $= \frac{BC \times BC}{BV} - \frac{BC \times BH}{AE} = \frac{AE \times BC \times BC - BC \times BH \times BV}{AE \times BV}$. Si l'on égale successivement cette derniere valeur de CO à chacune des six qu'on lui vient de trouver dans l'art. 17. l'on aura

Dans l'hypothêse de BC *constante*,

1°. $\frac{BC \times HK}{CH} = \frac{AE \times BC \times BC - BC \times BH \times BV}{AE \times BV}$, d'où résulte $BV = \frac{AE \times BC \times CH}{AE \times HK + BH \times CH}$.

2°. $\frac{BC \times CQ}{BH} = \frac{AE \times BC \times BC - BC \times BH \times BV}{AE \times BV}$, d'où résulte $BV = \frac{AE \times BC \times BH}{AE \times CQ + BH \times BH}$.

Dans l'hypothêse de BH *constante*,

3°. $\frac{BH \times CP}{BC} = \frac{AE \times BC \times BC - BC \times BH \times BV}{AE \times BV}$, d'où résulte $BV = \frac{AE \times BC \times BC \times BC}{AE \times BH \times CP + BH \times BC \times BC}$.

4°. $\frac{BH \times OP}{HC} = \frac{AE \times BC \times BC - BC \times BH \times BV}{AE \times BV}$, d'où résulte $BV = \frac{AE \times BC \times BC \times HC}{AE \times BH \times OP + BH \times BC \times HC}$.

Dans l'hypothêse de CH *constante*,

5°. $\frac{CH \times LH}{BC} = \frac{AE \times BC \times BC - BC \times BH \times BV}{AE \times BV}$, d'où résulte $BV = \frac{AE \times BC \times BC \times BC}{AE \times CH \times LH + BH \times BC \times BC}$.

6°. $\frac{CH \times MO}{BH} = \frac{AE \times BC \times BC - BC \times BH \times BC}{AE \times BV}$, d'où résulte $BV = \frac{AE \times BC \times BC \times BH}{AE \times CH \times MO + BC \times BH \times BH}$.

Telles sont les expressions purement geometriques des rayons osculateurs de toutes sortes de Courbes dans les trois hypothêses précedentes; & *c'est tout ce qu'il falloit ici trouver.*

COROLLAIRE.

XIX. Voilà en géneral pour les Courbes dont les ordonnées partent d'un même point E; & par conséquent en regardant ce point comme infiniment éloigné, c'est-à-dire, AE comme infinie, ainsi qu'elle le doit devenir dans les cas des ordonnées paralleles entr'elles, l'art. 18. donnera pour ce cas.

1°. (*nomb.* 1.) $BV = \frac{BC \times CH}{HK}$, & (*nombr.* 2.) $BV = \frac{BH \times BH}{CQ}$, en supposant BC constante.

2°. (*nomb.* 3.) $BV = \frac{BC \times BC \times BC}{BH \times CP}$, & (*nomb.* 4.) $BV = \frac{BC \times BC \times HC}{BH \times OP}$, en supposant BH constante.

3°. (*nomb.* 5.) $BV = \frac{BC \times BC \times BC}{CH \times LH}$, & (*nomb.* 6.) $BV = \frac{BC \times BC \times BH}{CH \times MO}$, en supposant CH constante.

SCHOLIE.

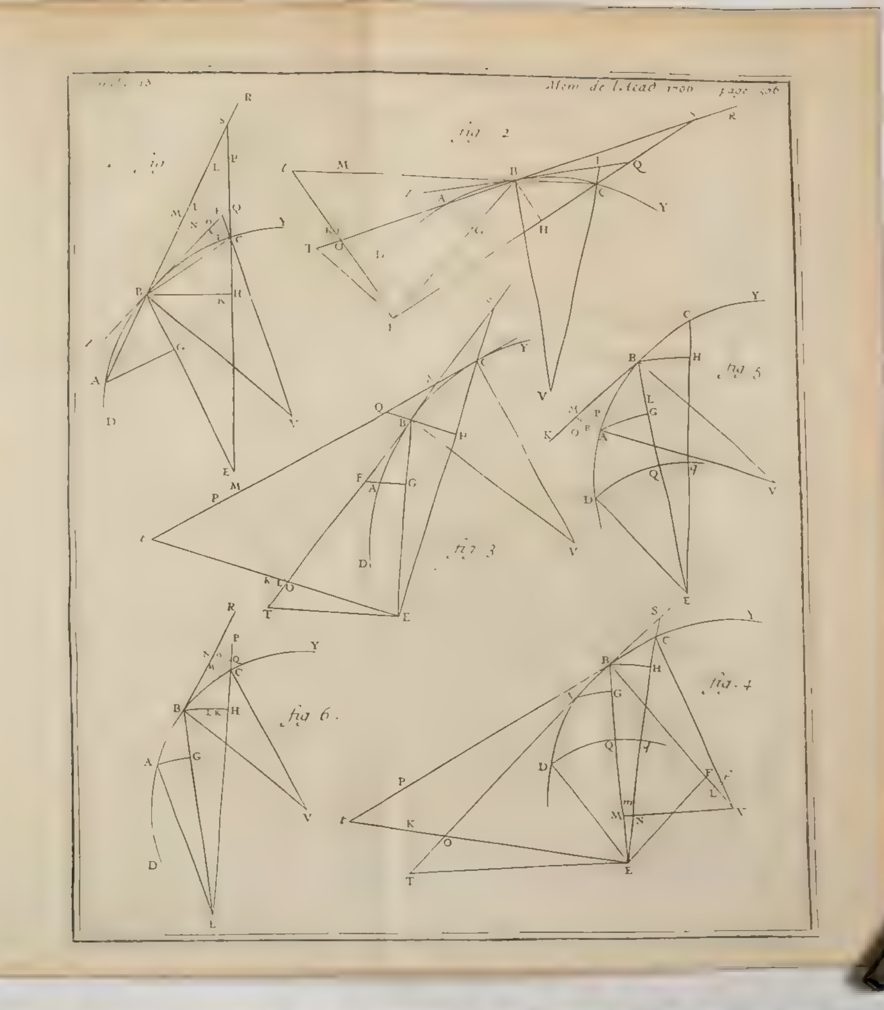
XX. Ces six dernieres formules pourroient encore se trouver seules par la même synthese que les six générales de l'art. 18. d'où elles se déduisent. Et si l'on vouloit avoir le tout en termes analytiques, il n'y auroit qu'à appeller BV, r; AE ou BE ou CE, y; BG ou CH, dy; AG ou

fig. 2.

fig. 3.

fig. 5.

fig. 4.



Mem de l'Acad 1700 page 506
fig 2
fig 3
fig 4
fig 5
fig 6

BH, dx ; & *AB* ou *BC*, ds : Ce qui en prenant l'origine de tout cela du côté de *D*, donneroit $QC = -ddy$, $HK = ddx$, dans le cas de *BC* (ds) constante ; $CP = -ddy$, $OP = dds$, dans le cas de *BH* (dx) constante ; & $LH = ddx$, $MO = dds$, dans le cas de *CH* (dy) constante : Et la substitution de tous ces noms dans les formules des art. 18. & 19. les rendroit toutes en termes analytiques, & les mêmes qu'elles resulteroient des infiniment generales trouvées dans les Solutions des Prob. 1. & 2. cy-dessus, en y supposant successivement ds, dx, dy, constantes, & de plus ensuite y infinie pour le cas des ordonnées paralleles entr'elles. Tout cela est presentement trop clair pour s'y arrêter davantage.

Au reste je crois devoir avertir que la Démonstration de l'art. 6. pag. 293. des Mem. de 1704. est de M. (Jean) Bernoulli.

ANALYSE CHIMIQUE
DE L'EPONGE
DE LA MOYENNE ESPECE.

PAR M. GEOFFROY.

L'Analyse que Mrs de la Societé Royale de Montpellier ont faite des Plantes nommées *Litophyton*, dont ils ont tiré une quantité assez considerable de sel volatil urineux, m'a fait soupçonner que cette espece de Plante marine ne seroit peut-être pas la seule qui fourniroit du sel volatil urineux. Dans cette pensée j'ay entrepris de travailler sur l'Eponge, qui est la Plante marine que j'ai trouvée le plutôt sous ma main. 1706. 22. Dec.

Cette Eponge brûlée à la chandelle ou sur les charbons sent la corne ou les cheveux brûlez.

Une livre d'Eponge prise dans un tems humide, après avoir été sechée dans une étuve & separée autant qu'il

eſt poſſible du ſable & de la terre qu'elle contenoit, s'eſt trouvée réduite à onze onces. Ces onze onces de matiere ont été diſtillées à feu gradué. On a ſeparé toutes les ſubſtances qui ſont venuës par la diſtillation, & on a rectifié le ſel & l'eſprit ; après quoi il s'eſt trouvé une once quatre gros & demi de phlegme rouſſâtre, ou d'eſprit fort foible qui avoit un peu d'odeur & de ſaveur, une once & demi d'eſprit volatil, urineux une once quatre gros & demi de ſel volatil urineux, une demi-once d'huile fetide épaiſſe, demi-once de ſel fixe, qui contenoit outre l'alcali lixiviel un peu de ſel marin, & cinq onces de tête-morte, dans laquelle ayant paſſé le couteau aimanté, il s'eſt rencontré quelques parcelles de fer.

Le poids de ces matieres raſſemblé fait en tout dix onces cinq gros ; par conſequent il y a eu trois gros de perte, tant par la diſſipation des eſprits, que parce que les vaiſſeaux retiennent toûjours quelque peu des matieres.

Par cette Analyſe comparée avec celle que M. Tournefort a faite de la Soye rapportée dans les Memoires de 1700, l'Eponge donne preſqu'autant de ſel volatil que la Soye, qui eſt de toutes les matieres tirées des animaux celle qui en donne le plus. Car quinze onces de Soye ont donné deux onces deux gros de ſel volatil concret, & onze onces d'Eponge en ont produit une once quatre gros & demi, ce qui ne fait environ que quatre grains de difference pour once, ce qui eſt peu de choſe.

Il eſt fait mention dans la Pharmacopée de Bathe de ce ſel volatil d'Eponge, ſans marquer cependant que cette Plante en fourniſſe une ſi grande quantité. L'Auteur de ce Livre recommande fort l'eſprit & le ſel volatil d'Eponge pour la gravelle, les tumeurs ſcrophuleuſes & les goëtres, & ſon ſel fixe comme un excellent antinephretique.

OBSERVATION ANATOMIQUE.

PAR M. GEOFFROY.

UN homme après avoir été attaqué pendant deux ans d'accès de phrenesie très-violens, mourut d'un abcès au foye. 1706. 22. Dec.

On trouva à l'ouverture de son corps outre l'abcès du foye qui étoit assez considerable pour contenir les deux points, trente-trois petites pierres dans la vesicule du fiel, dont les unes étoient grosses comme des noyaux de nesle, & les autres à peu près comme des grains d'orge, toutes de figure irreguliere, legeres, friables, inflammables, &c. qui ne parurent que de la bile épaissie & grumelée.

Après avoir levé le crane avec peine à cause de la forte adherence de la dure mere, on apperçut cette membrane beaucoup plus épaisse & plus ferme qu'elle ne l'est ordinairement.

Cette partie qu'on nomme la faux à cause de sa figure, étoit ossifiée presque dans toute sa longueur; ou plutôt cette membrane paroissoit revêtuë presque partout de lames osseuses. On pouvoit en quelques endroits les separer aisément de la membrane sans la rompre, en d'autres elles y étoient tellement unies qu'on ne pouvoit les détacher sans la détruire, & en quelques-uns on ne distinguoit point du tout la membrane de la substance osseuse. Ces lames étoient fort inégales & raboteuses, ayant dans quelques endroits deux à trois lignes d'épaisseur.

L'extremité de cette faux osseuse étoit fortement attachée à l'épine ou crête de l'os ethmoïdes, de maniere qu'on ne pût la détacher sans la rompre.

La pie-mere étoit plus épaisse qu'à l'ordinaire, elle avoit presque la même fermeté qu'a coûtume d'avoir la dure-

mere dans les autres ſujets. On la levoit avec facilité de deſſus la ſubſtance du cerveau, même dans les anfractuoſités, & elle étoit toute parſemées de vaiſſeaux ſanguins fort engorgés de ſang.

La ſubſtance du cerveau étoit fort deſſechée, & beaucoup plus ferme qu'elle ne l'eſt ordinairement. Ses circonvolutions, qui imitent aſſez bien celles des menus inteſtins, y étoient d'autant plus diſtinctes que les ſillons entre ces circonvolutions étoient devenus larges & profonds par le deſſéchement du cerveau. Nonobſtant ce deſſechement on a trouvé dans les ventricules une ſeroſité aſſez abondante.

La ſubſtance du cervelet avoit conſervé ſa conſiſtance naturelle.

Cet homme qui avoit paſſé ſa vie dans des applications continuelles qui demandoient beaucoup de contention d'eſprit, avoit fait auſſi un fort grand uſage du vin & des liqueurs ſpiritueuſes ; & c'eſt à cet uſage outré que l'on peut attribuer la principale cauſe de ſa maladie, & du deſordre qui s'eſt trouvé dans la tête & dans le foye.

Le mal que peut faire dans nous l'uſage des liqueurs ſpiritueuſes eſt très-conſiderable. Ce malade l'avoit éprouvé pendant ſa maladie pluſieurs fois dans une circonſtance particuliere. Car ayant été obligé de lui donner quelques teintures d'Opium pour calmer des inſomnies fâcheuſes qui accompagnoient ſes accès de phrenéſie, toutes les fois qu'on lui donnoit les teintures avec l'eſprit de vin, non ſeulement il n'étoit point calmé, mais il tomboit dans des accès encore plus violens, au lieu que les teintures avec l'eau le calmoient & lui donnoient quelques heures de ſommeil.

On n'eſt pas aſſez perſuadé de ce mauvais effet des liqueurs ſpiritueuſes, & même de l'uſage immoderé du vin. Prévenu en faveur de ces liqueurs qui flatent très-agreablement le goût, chacun croit prendre des forces & de la vie en les prenant, & on ne s'apperçoit pas qu'elles ne paroiſſent fortifier qu'en augmentant le reſſort des fibres, &

qu'elles l'augmentent quelquefois à un point qu'elles les rendent trop roides & même tout-à-fait osseuses : qu'elles épaississent tous les sucs du corps, qu'elles les coagulent quelquefois jusqu'à les convertir en pierre ; & que c'est par-là que ces liqueurs engendrent la goutte, la gravelle, la pierre, & qu'elles causent des vapeurs, des affections convulsives, des rhumatismes, des apoplexies, & des paralysies. Une seule experience peut convaincre de cette verité.

Si on verse sur la sérosité du sang de l'esprit de vin bien rectifié, cette sérosité qui est claire se grumelle aussitôt, & se caille en une masse blanche, qui se durcit peu à peu comme du blanc d'œuf cuit, si on la tient à une legere chaleur de digestion. L'esprit de vin caille la bile de la même maniere. On peut juger delà ce que l'on doit attendre de l'usage immoderé du vin, & encore plus des liqueurs spiritueuses que l'on en tire.

OBSERVATIONS

De l'Eclipse de Lune du 21 Octobre 1706 faites à Marseille & à Bologne.

PAR M. MARALDI.

NOus avons reçû deux Observations de l'Eclipse de Lune du 21 Octobre dernier, dont nous ne pûmes observer rien de précis à l'Observatoire, à cause que la Lune pendant l'Eclipse étoit dans des nuages, qui ne permettoient pas de voir les taches ni le terme de l'ombre que confusément ; de sorte que nous ne pûmes déterminer les phases avec assez d'évidence. 1706. 22. Dec.

Une de ces Observations a été faite à Marseille par le P. Laval & par M. Chazelles dans l'Observatoire des PP. Jesuites. Voici ce qu'ils en ont écrit.

On n'esperoit pas d'observer cette Eclipse, le Ciel ayant

été fort couvert l'après-midy du 21 ; mais la pluïe ayant cessé sur les six heures du soir, & le vent étant sauté du Sud-Est au Sud-Oüest aux nuages, quoiqu'à la terre il fût toûjours Sud-Est, il se fit quelques ouvertures aux nuages qui donnerent lieu d'observer les phases suivantes. Les Lunettes dont on s'est servi sont de trois pieds, ce sont les deux du quart de cercle qui sont excellentes.

A six heures 29′ 30″ la Lune paroissant entre des nuages étoit déja éclipsée d'environ deux doigts; mais on ne pouvoit pas distinguer par quelles taches l'ombre passoit.

A 6^h 46′ 30″ la mer Caspie éloignée de l'ombre de la distance de son grand diametre.

A 7^h 47′ 30″ la Lune paroissant foiblement à travers des nuages étoit éclipsée de plus de deux tiers ; mais on ne distinguoit pas assez l'ombre de la penombre à cause des nuages.

A 8^h 2′	0″	Copernic touche l'ombre & commence à sortir.
4	26	Aristarchus sur le bord de l'ombre.
6	21	Copernicus tout dehors.
7	0	Petanius sur le bord de l'ombre.
9	37	Catharina sur le bord de l'ombre.
13	15	Eratosthene hors de l'ombre.
15	36	Insula sinus medii hors de l'ombre.
18	21	Langrenus sur le bord de l'ombre.
20	0	Heraclides hors de l'ombre.
21	7	Timocaris hors de l'ombre.
21	46	Harpalus hors de l'ombre.
24	21	Helicon sort de l'ombre.

Le Ciel étant serein l'ombre paroissoit bien tranchée lorsqu'on observoit ces taches ; mais des foibles nuages ayant de nouveau couvert la Lune empécherent de bien distinguer les taches pendant un tems considerable, & furent cause que l'ombre & la penombre étoient confonduës.

A 8^h

A 8^h 37′ 35″ Langrenus entierement ſorti, cette tache a demeuré long-temps ſur le bord de l'ombre.
29 2 Poſſidonius & Teruntius hors de l'ombre.
44 26 La mer Caſpie commence à ſortir.
47 19 Proclus hors de l'ombre.
50 16 La mer Caſpie entierement hors de l'ombre.
52 16 Fin de l'Eclipſe à la Lunete.

Le Ciel étoit ſerein & l'ombre bien tranchée pendant qu'on obſervoit ces dernieres taches. L'Eclipſe a fini entre la mer Caſpie & Meſſala, mais plus près de Meſſala ; l'horloge avoit été reglée par des hauteurs correſpondantes du Soleil, & on connoiſſoit ſon état par une ſuite de hauteurs correſpondantes priſes depuis le commencement du mois de Septembre.

L'autre Obſervation a été faite à Bologne dans l'Obſervatoire de M. le Comte Marſigli par M[rs] Manfridi & Scantari. Ils obſerverent cette Eclipſe par deux Lunetes de huit pieds, dont une ſervoit à marquer l'arrivée de l'ombre aux taches de la Lune, l'autre à marquer la grandeur de l'Eclipſe en meſurant par un Micrometre la partie de la Lune qui reſtoit claire & ſon diametre apparent.

Ils ne purent pas obſerver le commencement de l'Eclipſe à cauſe des nuages.

A 7^h 36′ la Lune commence de paroître entre les nuages quand ſa partie éclipſée étoit déja aſſez grande.

Voici le détail de ce qu'ils obſerverent comme nous l'avons reçû.

7^h 43′ *Deficiebat paulo plus quàm dimidia.*
7 52 50 *Umbra per Grimaldum, cujus adhuc notabilis pars latet.*
7 56 10 *Pars illuminata in minutis & ſecundis circuli maximi.* 11′ 30″.

7h	56'	30"	*Ricciolus totus exit ab umbra.*	
8	2	30	*Pars illuminata* 11' 23" *: tunc fuit maxima obscuratio.*	
8	3	0	*Umbra tangit Fracastorium & transit per Petavium.*	
8	5	10	*Pars illuminata.*	12' 10".
8	8	30	*Pars Lunæ lucida.*	12 10.
8	9	30	*Galilæus exit.*	1 11.
8	11	30	*Pars Lunæ illuminata.*	12 21.
8	16	37		12 55.
8	20	30		13 41.
8	24	20		14 16.
8	25	48	*Aristarchi medium exit.*	
8	28	0	*Pars Lunæ illuminata.*	15 34.
8	29	0	*Umbra per medium Copernici.*	
8	31	0	*Totus Copernicus exit.*	
8	32	30	*Pars Lunæ illuminata.*	16 43.
8	38	0		17 44.
8	42	15	*Heraclides exit.*	
8	44	30	*Pars Lunæ illuminata.*	19 46.
8	46	0	*Harpalus exit.*	
8	47	20	*Dionysius exit.*	
8	48	0	*Pars Lunæ illuminata.*	21 17.
8	49	0	*Manilaus exit.*	
8	51	20	*Pars lucida Promontorii acuti exit : pars Lunæ illuminata.*	22 49.
8	52	55	*Menelaus exit.*	
8	53	40	*Plato incipit.*	
8	54	30	*Pars Lunæ illuminata.*	23 25.
8	54	30	*Totus Plato exit.*	
8	56	0	*Langrenus totus exit.*	
8	57	15	*Plinius exit.*	
8	59	2	*Teruntius exit.*	
8	59	20	*Pars Lunæ illuminata.*	25 15.
9	1	55	*Euxodi medium emergit.*	
9	2	0	*Pars Lunæ illuminata.*	26' 43".
9	2	30	*Aristotelis medium emergit.*	

9 h 4′ 45″	*Possidonii medium emergit.*		
9 6 35	*Incipit mare Crisium.*		
9 6 30	*Pars Lunæ illuminata.*	28′	23″.
9 6 40	*Proclus exit.*		
9 10 20	*Medium maris Crisium.*		
9 10 45	*Pars Lunæ illuminata.*	30	25.
9 13 25	*Hermes totus emergit.*		
9 14 30	*Totum mare Crisium.*		
17 55	*Finis uno tubo.*		
18 20	*Finis altero tubo.*		
8 30 0	*Diameter Lunæ fuit.*	33	42.
9 18 20	*Diameter fuit.*	33	50.

REFLEXIONS.

La fin de l'Eclipse fut observée à Marseille à $8^h\ 52'\ 16''$. Si on ôte de cette Observation 12 minutes pour la difference des meridiens, on aura la fin de l'Eclipse à Paris à $8^h\ 40'\ 16''$ à peu de secondes prés de celle qui est marquée dans la Connoissance des Temps.

La fin de l'Eclipse à Bologne a été observée par une Lunete à $9^h\ 17'\ 55''$, & par l'autre à $9^h\ 18'\ 20''$. Ayant supposé la difference des meridiens de 36′ comme on l'a déterminée, on aura la fin de l'Eclipse à Paris à $8^h\ 41'\ 25''$, & à $8^h\ 45'\ 50''$ par l'autre ; ce qui est à une demie minute prés de celle qui est marquée dans la Connoissance des Temps.

La plus grande Phase de l'Eclipse observée arriva à $8^h\ 2'\ 30''$, quand la partie claire de la Lune étoit de 11′ 23″ ; & une demie-heure aprés le diametre apparent de la Lune fut observé de 23′ 42″, qui devoit être plus grand de quelques secondes qu'au temps de cette Phase. Negligeant cette petite difference qui ne peut pas être sensible dans la détermination des doits éclipsez, la partie éclairée de la Lune étoit de 4 doits 3′ de doit, & par consequent la partie éclipsée étoit alors de 8 doits moins 3 minutes de doit. Cette grandeur de l'Eclipse s'accorde assez

bien à celle qui fut estimée à Marseille vers la même heure. La plus grande Phase observée à Bologne a été 4 minutes après le milieu déterminé par la Connoissance des Tems. Par les Observations de Bologne la grandeur de l'Eclipse a été d'un demi doit plus grande que par la Connoissance des Temps, & par l'Observation de Marseille un peu plus d'un demi doit.

EXPLICATION DES FIGURES

du Monstre dont il est parlé à la page 418, *& aux suivantes.*

LA premiere Figure represente ces Enfans couchez sur le dos.

AA. La partie du bas ventre commune aux deux Enfans.

B. Le nombril.

C C. Une espece de coûture legere, par laquelle ces Jumeaux paroissoient joints ensemble.

La seconde Figure represente une partie de ces Jumeaux vûs par derriere.

AA. Les deux verges qui naissent de l'endroit où devroit être l'Anus de chaque Enfant.

BBBB. Deux replis de peau qui representent de chaque côté un Scrotum vuide & applati.

La troisiéme Figure represente une partie de ces Enfans couchez l'un sur l'autre, pour faire voir la situation naturelle des Verges, qui au lieu d'être suspenduës en devant à l'ordinaire, après avoir pris leur naissance des os pubis qui sont dans ces Enfans placez sur les côtez, viennent s'attacher au ligament qui separe les deux bassins, & qui les suspend en arriere.

A. La Verge de l'Enfant qui est dessous dans sa situation naturelle.

BB. Son Scrotum.

C. La Verge de l'Enfant de deſſus, qu'on a relevée avec ſon Scrotum, pour mieux faire voir celle de l'Enfant qui eſt deſſous.

La quatriéme Figure repreſente les os des Baſſins de ces Jumeaux (qui n'en compoſent qu'un) vûs de côté un peu en deſſus.

AAAA. Les os des Iles.

BBBB. Les os Iſchions.

CCCC. Les Pubis.

DD. Les os Sacrum.

EE. Les Coccyx.

FF. Les ligaments qui joignent les os Pubis d'un des Enfans avec ceux de l'autre.

La cinquiéme Figure repreſente les mêmes os vûs de front & un peu en deſſus.

AAAA. Les os des Iles.

BBBB. Les os Iſchions.

CCCC. Les os Pubis.

DD. Les os Sacrum.

EE. Les Coccyx.

FF. Les ligaments qui joignoient les os Pubis d'un des Enfans avec ceux de l'autre.

GG. Le ligament en forme de cintre renverſé qui ſeparoit les deux baſſins.

H. Ligne ponctuée qui marque l'endroit où étoit la coûture du bas ventre qui faiſoit auſſi un cintre, mais dans un ſens oppoſé.

La ſixiéme Figure repreſente les muſcles du bas ventre découverts.

AAAA. Les Muſcles droits.

BBBB. L'endroit où ils commencent à ſe détourner.

CCCC. Leur inſertion dans les os Pubis.

D. Le nombril au milieu de l'eſpace qui eſt entre ces Muſcles.

E. Les fibres tendineuſes, dont la peau étoit fortifiée à l'endroit de la coûture.

La ſeptiéme Figure repreſente les inteſtins comme ils

paroiſſoient en ouvrant le bas ventre.

AAAAAA. Les inteſtins grêles des deux Jumeaux.

BB. L'endroit où les inteſtins nommez Ileons viennent s'ouvrir dans un inteſtin commun.

C. Cet inteſtin commun qui tient lieu de colon.

DD. Deux replis de cet inteſtin.

E. Un des Cœcum du ſecond inteſtin commun, dont la naiſſance n'a pû être marquée dans cette Figure.

F. L'appendice de ce Cœcum.

GH. Une partie de cet inteſtin qui va ſous les inteſtins grêles de l'un & de l'autre de ces Jumeaux.

I. La Veſſie.

LLL. Les trois Arteres ombilicales.

M. L'Ouraque.

NN. Les deux Veines ombilicales.

O. Le Cordon.

La huitiéme Figure repreſente les gros inteſtins & la Veſſie.

AA. L'extrémité de l'Ileon de chaque Enfant.

B. Le gros inteſtin commun aux deux Enfans, dans lequel les deux Ileons s'ouvrent, & qui eſt garni de feüillets en dedans.

C. Le Cœcum de cet inteſtin.

D. Son appendice vermiforme.

EF. Deux replis de cet inteſtin.

G. L'endroit où cet inteſtin s'ouvre dans un autre inteſtin qui n'a point de feüillets.

H. Le premier Cœcum de cet inteſtin, dont le ſecond ne paroît pas, & ſera repreſenté cy-aprés.

I. L'appendice vermiforme de ce Cœcum.

L. Le premier replis de cet inteſtin paſſant ſous les inteſtins grêles de l'un des Jumeaux.

M. Le ſecond replis paſſant ſous les inteſtins grêles de l'autre Jumeau.

N. La portion de cet inteſtin qui paroît une eſpece de Rectum.

O. Son embouchure dans la Veſſie.

P. La Veſſie.

QQQQ. Les Vaiſſeaux du cordon.

RRR. Eſt la membrane parſemée de Vaiſſeaux, qui eſt un prolongement du Mezentere de l'un des enfans, & qui eſt attachée à l'un des côtez de l'inteſtin commun.

SSS. Eſt une membrane ſemblable appartenant à l'autre Jumeau, & qui ſert pareillement de Mezocolon.

TTTT. La Veine mezenterique ſuperieure.

VVVV. La Veine mezenterique inferieure.

On n'a point fait repreſenter les Arteres pour ne pas trop charger la Figure.

La Figure neuviéme repreſente une portion des gros inteſtins.

A. Eſt l'extrémité du premier gros inteſtin qui eſt commun.

B. Son inſertion dans un autre gros inteſtin.

CC. Les deux Cœcums.

DD. Leurs Appendices.

E. Le corps de cet inteſtin.

La figure dixiéme repreſente la Veſſie, les Reins, les Ureteres, les Teſticules, & leurs Vaiſſeaux.

A. La Veſſie double ou jumelle.

B. L'embouchure du gros inteſtin dans cette Veſſie.

CCCC. Sont les reins de chaque Jumeau.

DDDD. Les Arteres & Veines émulgentes coupées.

EEEE. Les quatre Ureteres de ces deux Jumeaux.

FFFF. Leurs inſertions dans les deux côtez de cette Veſſie jumelle.

GG. Deux des Teſticules, dont l'un appartenoit à l'un des Jumeaux, & l'autre à l'autre, & qui étoient enfermez dans la region de l'aîne.

HH. Les deux autres Teſticules de ces deux Enfans qui étoient à nud dans la cavité du ventre.

IIII. Les Vaiſſeaux déferents de ces quatre Teſticules, dont chaque paire vient s'ouvrir dans un des côtez de la Veſſie particuliere à chaque Enfant.

LLLL. Les Veſſicules ſeminales.

La Figure onziéme repreſente la Veſſie ouverte par l'un des côtez.

A. Un des côtez de la Veſſie dans ſon état naturel.

BB. Les Ureteres.

C C. Les Vaiſſeaux déferents.

DD. Les Veſſicules ſeminales.

E. La naiſſance de l'Urethre.

F. La Veſſie ouverte de l'autre côté.

GG. Les ouvertures des Ureteres dans l'un des côtez de la veſſie.

HH. Les ouvertures des Canaux déferents.

I. L'embouchure de l'Urethre.

Dans toutes les Figures précedentes les parties ſont repreſentées de telle maniere que le bas de la Veſſie eſt en haut ; mais dans les Figures ſuivantes les parties ſont dans un autre point de vûë, & repreſentées de maniere que la Veſſie s'y trouve dans ſa ſituation naturelle.

La douziéme Figure repreſente les deux plans des Fibres charnuës d'un des côtez de la Veſſie, dont une partie des longitudinales tire ſon origine du ligament qui ſepare les deux baſſins, & qui ſont marquées *AA.*

La treiziéme Figure eſt encore celle de la Veſſie ; elle fait voir l'inſertion de l'inteſtin commun dans la Veſſie jumelle avec une eſpece de ſac aveugle, & la naiſſance & le progrès des Urethres.

A. L'embouchure de l'inteſtin commun dans la Veſſie.

B. Le ſac aveugle.

C C. L'origine de chaque Urethre.

DD. L'endroit où elle ſe recourbe ſous le ligament qui ſepare les deux baſſins.

EE. Leurs extrémitez.

Les autres parties ont été expliquées dans les Figures précedentes.

La quatorziéme Figure repreſente les Muſcles particuliers de l'Urethre de ces Enfans.

A. L'Urethre vûë par ſa partie anterieure.

BB. Lignes ponctuées qui repreſentent les trous ovalaires.

laires des os innominés d'un des Jumeaux.

CC. La premiere paire de ces Muſcles qui s'implantent dans la partie de l'Urethre qui regarde le Coccyx.

DD. La ſeconde partie de ces Muſcles qui s'implante à la partie anterieure de l'Urethre.

La quinziéme Figure repreſente la Veſſie avec les vaiſſeaux du cordon.

AA. La double Veſſie.

BC. Les deux Arteres ombilicales de l'un de ces Jumeaux, dont celle qui eſt marquée *B* eſt dans ſa ſituation ordinaire, au lieu que celle qui eſt marquée *C* paſſe par deſſous la veſſie pour ſe rendre au cordon.

D L'Artere ombilicale de l'autre Jumeau qui n'en a qu'une, & qui toute ſeule eſt auſſi groſſe que les deux autres enſemble.

E. L'Ouraque.

FF. Les deux Veines ombilicales.

G. Le Nombril.

La ſeiziéme Figure repreſente ces enfans comme on peut préſumer qu'ils étoient dans la matrice, & la Figure dix-ſeptiéme les repreſente dans la ſituation qui leur auroit été la plus commode après leur naiſſance. On s'eſt contenté de repreſenter ſeulement par un trait ces deux Figures.

FIN.



Fig. 1.



Fig. 2.

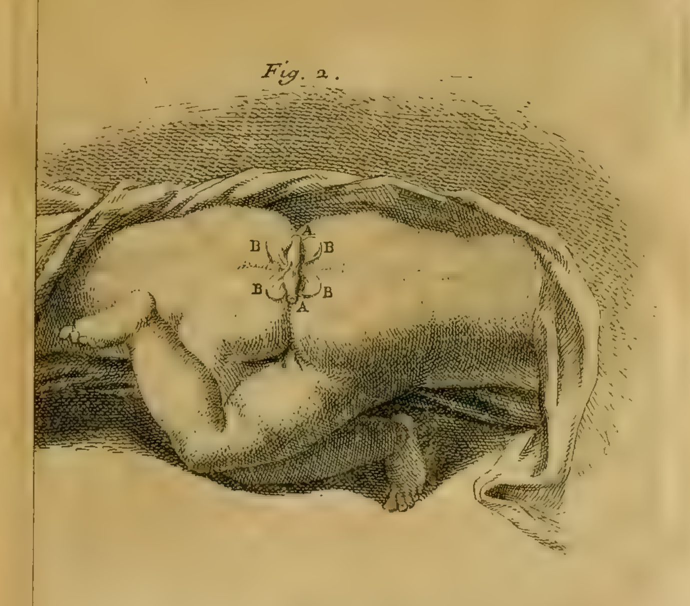


Fig. 1



Fig. 2

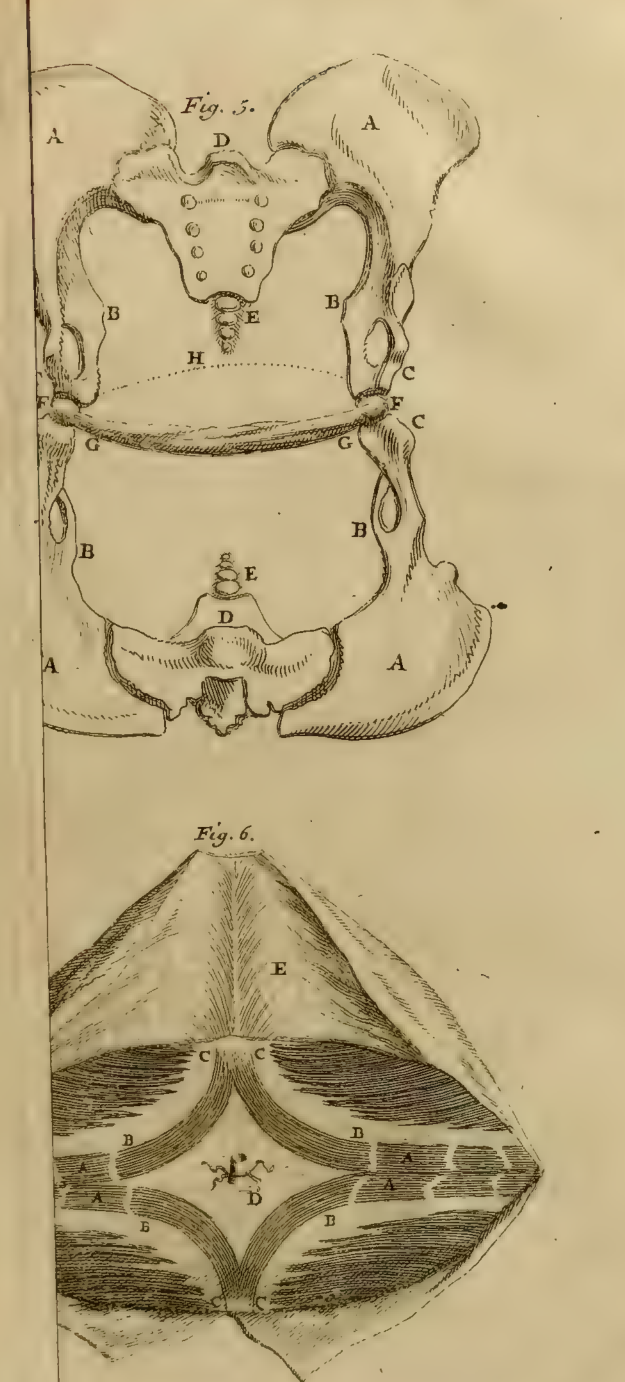


Fait par Simonneau Fils


Fig. 3.
C
B
A
B
Fig. 4.
A
C
C
A
F
B
B
E
E
D
D
A
A
C
C
F
B
B


Fig. 3.
C
D
A
B

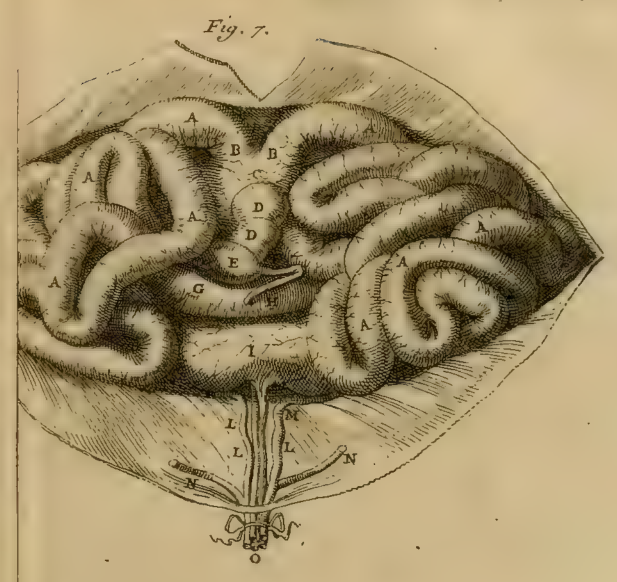

Fig. 4
A
C
C
A
F
B
B
D
E
E
D
A
A
F
B
b


Fig. 5.
A
D
A
B
E
B
H
C
F
F
C
G
G
B
B
E
D
A
A
Fig. 6.
E
C
C
B
B
A
A
A
A
D
B
B
C
C



A
D
A
B
E
B
H
C
F
C
F
C
C
G
G
B
B
E
D
A
A
E
C
C
B
B
A
A
D
B
C
C

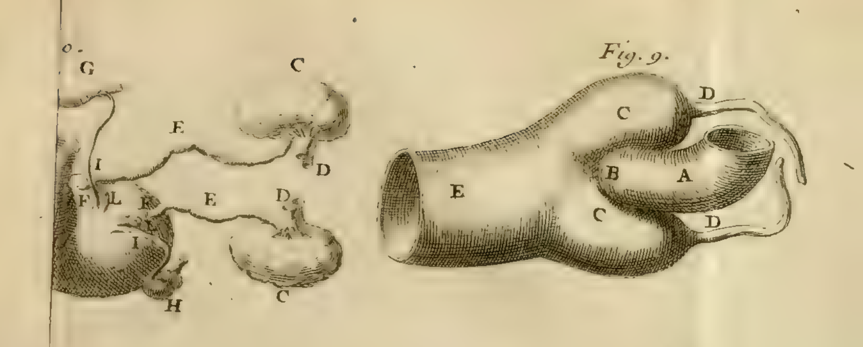
Fig. 7.

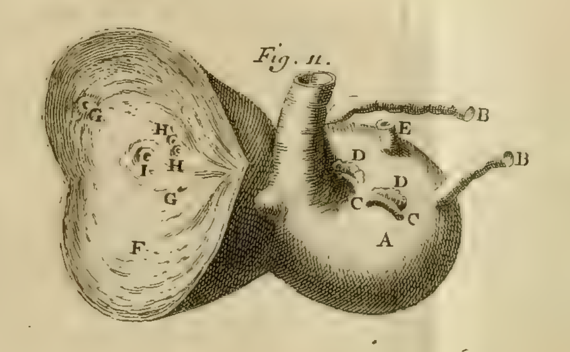


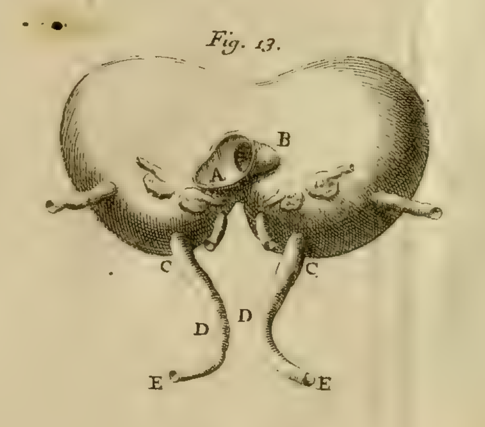

A
B
D
G
H
I
L
M
N

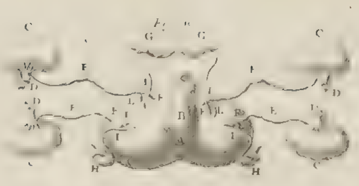
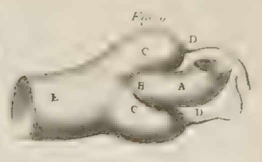

Memoires de l'Acad. de 1706. Pl. 5. pag. 22
Fig. 8.
A
A
B
C
D
T
R
E
F
G
H
I
M
N
L
O
V
P
Q
Q
Q
Q


B
C
D
E
F
G
H
L
M
N
O
P
S


G
C
E
I
D
F
L
K
E
D
L
I
H
C
Fig. 9.
D
C
B
A
E
C
D


Fig. 11.
G
H
B
E
I
H
D
D
G
C
C
B
A
F


Fig. 13.
B
A
C
C
D
D
E
E

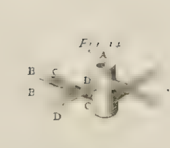
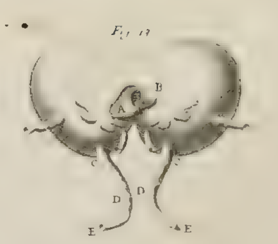




Fig. 15.

F F E B D C A A

Fig. 16.

Fig. 17.


E
F
B
D
A
C
A